E. W. SCHPOLSKI

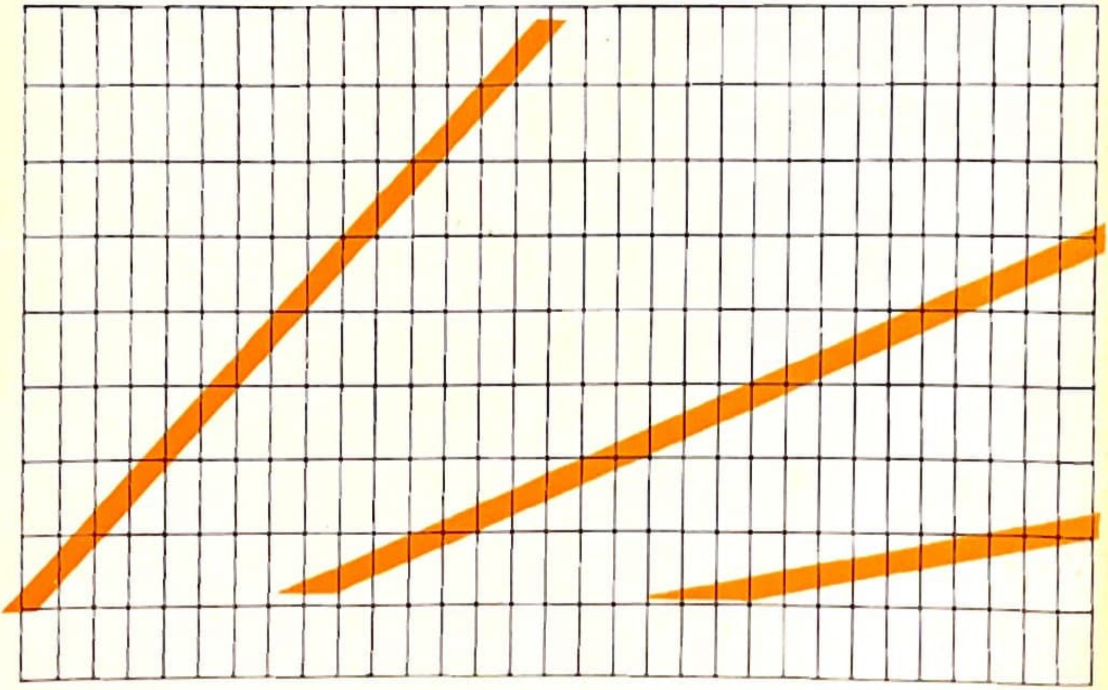
ATOMPHYSIK

II

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

SCHPOLSKI

ATOM PHYSIK



TEIL 2

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 9

ATOMPHYSIK

DIE ELEKTRONENHÜLLE DES ATOMS UND DIE ATOMKERNE

VON

E. W. SCHPOLSKI

TEIL II

Zweite, unveränderte Auflage

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1958

Э. В ШПОЛЬСКИЙ

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Электронная оболочка атома и атомное ядро

Москва 1951 Ленинград

Vom Ministerium für Hochschulbildung der UdSSR als Lehrbuch an Staatlichen Universitäten zugelassen.

Erschienen im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur Moskau – Leningrad 1951.
Die Übersetzung besorgten F. Heller und H. Oswald,
die Bearbeitung lag in den Händen von Prof. Dr. G. Heber und V. Bredel.
Herr Prof. Schpolski las freundlicherweise eine Korrektur.
Verantwortlicher Verlagsredakteur: I. Scholz

Alle Rechte vorbehalten
Copyright 1956 by VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 • 435/157/57
Gesamtherstellung: Druckerei Fortschritt Erfurt, Werk II

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort zur dritten Auflage XI

Abschnitt XII. DIE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

§ 153. Einführung 1
§ 154. Lineare Operatoren 1
§ 155. Eigenwerte und Eigenfunktionen linearer Operatoren 6
§ 156. Selbstadjungierte Operatoren 9
§ 157. Die Orthogonalität der Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren 11
§ 158. Entwicklung nach orthogonalen Funktionen 13
§ 159. Die Wellenfunktion 16
§ 160. Das Prinzip der Superposition 17
§ 161. Die Operatoren der Quantenmechanik 18
§ 162. Quantelung 21
§ 163. Das freie Teilchen 23
§ 164. Die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Werte mechanischer Größen 26
§ 165. Mittelwerte 28
§ 166. Beispiele zur Berechnung von Mittelwerten 31
§ 167. Gemeinsame Eigenfunktionen 33
§ 168. Die HEISENBERGschen Ungleichungen 36
§ 169. Die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung 39
§ 170. Dichte und Strom der Wahrscheinlichkeit 42
§ 171. „Reine Zustände" und Mischungen 45
§ 172. Stationäre Zustände 48
§ 173. Das Theorem von EHRENFEST 50
§ 174. Die Bewegungsgleichungen 55
§ 175. Die Erhaltungssätze 59

Abschnitt XIII. DIE BEWEGUNG IM ZENTRALFELD

§ 176. Das Impulsmoment 63
§ 177. Die Eigenschaften des Impulsmomentes 66
§ 178. Eigenfunktionen und Eigenwerte des Quadrats des Impulsmoments 69
§ 179. Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators der Projektion des Impulsmoments 72
§ 180. Beschreibung der verschiedenen Zustände im Zentralfeld 73
§ 181. Räumliche Quantelung 76
§ 182. Graphische Darstellungen 79
§ 183. Normalzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms 83
§ 184. Das KEPLER-Problem. Allgemeiner Fall 89
§ 185. Das Valenzelektronenmodell 99
§ 186. Die Spektralserien der Alkalimetalle 104

§ 187. Zwei Elektronen im Zentralfeld 110
§ 188. Störungstheorie für einfache (nicht entartete) Eigenwerte 112
§ 189. Der Grundzustand des Heliumatoms 116

Abschnitt XIV. STRAHLUNG

§ 190. Die Methode der Variation der Konstanten 120
§ 191. Absorption und Emission des Lichts 122
§ 192. Die Berechnung der EINSTEIN-Koeffizienten 128
§ 193. Auswahlregeln 131
§ 194. Das BOHRsche Magneton 140
§ 195. Das Elektron im Magnetfeld 143
§ 196. Die Theorie des normalen ZEEMAN-Effekts 145

Abschnitt XV. DER ELEKTRONENSPIN

§ 197. Die Hypothese des rotierenden Elektrons 148
§ 198. Der STERN-GERLACH-Versuch 150
§ 199. Magneto-mechanische Effekte 153
§ 200. Spin und Polarisation 154
§ 201. Die relativistische Wellengleichung zweiter Ordnung 157
§ 202. Die DIRAC-Gleichung 159
§ 203. Die Existenz des magnetischen Eigenmoments und Spins des Elektrons 163
§ 204. Die Feinstrukturformel 170
§ 205. Verschiebung der Wasserstoff-Energieniveaus 179
§ 206. Die Dubletts der Alkalimetalle 181
§ 207. Die Quantenzahl des Gesamtimpulsmoments 182
§ 208. Der anomale ZEEMAN-Effekt 185
§ 209. Theorie des anomalen ZEEMAN-Effekts. Schwaches Feld 186
§ 210. Theorie des anomalen ZEEMAN-Effekts. Starkes Feld 192

Abschnitt XVI. ATOME MIT MEHREREN ELEKTRONEN

§ 211. Das Heliumspektrum. Parhelium und Orthohelium 194
§ 212. Austauschentartung 196
§ 213. Das Heliumproblem 201
§ 214. Die Energie in erster Näherung 205
§ 215. Das PAULI-Prinzip 209
§ 216. Singulett- und Triplettzustände des Heliums 212
§ 217. Die Spektren der Atome der zweiten Gruppe des Periodischen Systems 216
§ 218. Einige Gesetzmäßigkeiten in den komplizierten Spektren 223
§ 219. Magnetische Eigenschaften der Atome 225
§ 220. Die Spektren isoelektronischer Ionen 227
§ 221. Theorie des Periodischen Systems von D. I. MENDELEJEW 230
§ 222. Der Aufbau der einzelnen Perioden des Systems der Elemente von D. I. MENDELEJEW 233
§ 223. Röntgenspektren 238
§ 224. Schema der Energieniveaus für Röntgenspektren 240
§ 225. Direkte Bestimmung der Röntgenenergieniveaus 243

Abschnitt XVII. ANGEREGTE ATOME

§ 226. Optische Anregung und Resonanzfluoreszenz 247
§ 227. Stufenweise Anregung 249
§ 228. Thermische Anregung 251
§ 229. Stöße zweiter Art 252
§ 230. Sensibilisierte Fluoreszenz 254
§ 231. Resonanz beim Energieaustausch durch Stöße zweiter Art 256
§ 232. Lebensdauer von angeregten Zuständen 260
§ 233. Niveaubreite. Autoionisation 262
§ 234. Intensität der Spektrallinien 266
§ 235. Metastabile Zustände 269
§ 236. Verbotene Übergänge 272

Abschnitt XVIII. ALLGEMEINE CHARAKTERISTIK DES ATOMKERNS

§ 237. Einige einleitende Bemerkungen 276
§ 238. Der Kernspin 281
§ 239. Spin und Statistik der Atomkerne 284
§ 240. Das magnetische Dipolmoment des Kerns 288
§ 241. Elektrisches Quadrupolmoment des Kerns 296
§ 242. Feld und Radius des Kerns 297
§ 243. Der Aufbau des Kerns aus Protonen und Neutronen 301
§ 244. Die Bindungsenergie 303
§ 245. Eine halbempirische Formel für die Bindungsenergie 311
§ 246. Die Elementarteilchen 316
§ 247. Das Deuteron 319
§ 248. Theorie des Deuterons 322
§ 249. Die Abhängigkeit der Kernkräfte vom Spin 327
§ 250. Die Natur der Kernkräfte 328

Abschnitt XIX. EXPERIMENTELLE METHODEN DER KERNPHYSIK

A. Zähl- und Beobachtungsmethoden für schnelle Teilchen 335

§ 251. Methoden zur Teilchenzählung 335
§ 252. Die photographische Aufnahme der Bahnen schneller Teilchen 342

B. Beschleuniger geladener Teilchen 346

§ 253. Der elektrostatische Generator 346
§ 254. Das Zyklotron 348
§ 255. Die Beschleunigung von Elektronen. Das Betatron 354
§ 256. Synchrotron und Phasotron 362
§ 257. Lineare Beschleuniger 366

Abschnitt XX. KERNREAKTIONEN

§ 258. Allgemeine Charakteristik der Kernreaktionen 370
§ 259. Bestimmung der Reaktionsenergie 373
§ 260. Die gleichzeitige Anwendung des Energie- und Impulssatzes 375

§ 261. Der Wirkungsquerschnitt 379
§ 262. Der Zwischenkern 381
§ 263. Der Kern als quantenmechanisches System 385
§ 264. Der Einfang eines Teilchens durch den Kern 388
§ 265. Niveaubreite und Resonanz 390
§ 266. Die Kernreaktionen der Neutronen 396
§ 267. Die Reaktionen der Protonen und Deuteronen 398
§ 268. Die Reaktionen der α-Teilchen 404
§ 269. Die Kernreaktionen bei sehr hohen Energien 406
§ 270. Der Kernphotoeffekt 410

Abschnitt XXI. DIE RADIOAKTIVITÄT

A. Gesetze der radioaktiven Umwandlungen 412
§ 271. Allgemeine Charakteristik der radioaktiven Prozesse 412
§ 272. Das Elementargesetz des radioaktiven Zerfalls 413
§ 273. Der statische Charakter des radioaktiven Zerfallsgesetzes 416
§ 274. Die Theorie der Zerfallsreihen 420
§ 275. Die Einheit der Radioaktivität 425
§ 276. Der Erwärmungseffekt 426
§ 277. Radioaktive Familien 428

B. Die Wechselwirkung radioaktiver Strahlung mit Substanzen 432
§ 278. Die Reichweite von α-Teilchen 432
§ 279. Reichweite und Energie der β-Teilchen 437
§ 280. Absorption und Streuung von γ-Strahlen 441
§ 281. Die Entstehung von Positronen bei der Absorption von γ-Strahlen 444
§ 282. Die Eigenschaften der Positronen und die Diracsche Theorie 446
§ 283. Paarbildung 448

C. Die radioaktiven Zerfallsarten 453
§ 284. α-Zerfall 453
§ 285. γ-Strahlen, die den α-Zerfall begleiten, und die Eigenniveaus des Kerns 456
§ 286. Der β-Zerfall 459
§ 287. Die β-Spektren 460
§ 288. Das Neutrino 463
§ 289. Erlaubte und verbotene β-Prozesse 469
§ 290. Die Radioaktivität unter Emission eines Positrons und der K-Einfang 471
§ 291. Einfache und komplexe β-Spektren 475
§ 292. Die Stabilität der Isobare 476
§ 293. Die γ-Strahlung 477
§ 294. Die innere Umwandlung der γ-Strahlen 481
§ 295. Isomere Übergänge 487

Abschnitt XXII. NEUTRONEN

§ 296. Die Entdeckung der Neutronen 492
§ 297. Masse, Spin und magnetisches Moment des Neutrons 494
§ 298. Neutronenquellen 497

§ 299. Beugung schneller Neutronen 500
§ 300. Absorption und Streuung langsamer Neutronen 504
§ 301. Neutronenbeugung 512
§ 302. Einige optische Eigenschaften der Neutronen 519

Abschnitt XXIII. DIE KERNSPALTUNG UND DIE AUSNUTZUNG DER ATOMENERGIE

§ 303. Die Entdeckung der Spaltung schwerer Kerne 521
§ 304. Theorie der Atomkernspaltung 526
§ 305. Die Aktivierungsenergie bei der Spaltung 530
§ 306. Die spontane Spaltung 534
§ 307. Die verschiedenen Spaltungsverfahren 535
§ 308. Die Spaltprodukte 536
§ 309. Die bei der Spaltung freiwerdenden Neutronen 538
§ 310. Transurane 540
§ 311. Die Kettenreaktion 544
§ 312. Die Anwendung von Moderatoren. Der Uranmeiler 547
§ 313. Die Plutoniumgewinnung. Die Anwendung der Kernenergie 552
§ 314. Die Rolle der Kernenergie in der Natur 555

Abschnitt XXIV. DIE HÖHENSTRAHLUNG

§ 315. Einleitung 561
§ 316. Die wichtigsten Untersuchungsergebnisse 562
§ 317. Die Wirkung des Magnetfeldes der Erde auf die Primärstrahlung (geomagnetische Effekte) 569
§ 318. Die Energieverluste bei der Ionisation 576
§ 319. Die Beobachtung schneller geladener Teilchen mit der WILSON-Kammer und der Photoplatte 578
§ 320. Die Entdeckung des Positrons 585
§ 321. Schauer 587
§ 322. Die Wechselwirkung schneller Teilchen mit Substanzen 590
§ 323. Die Bildung von Kaskadenschauern 592
§ 324. Die weiche und die harte Komponente 595
§ 325. Die Mesonen 597
§ 326. Die Eigenschaften der μ-Mesonen 600
§ 327. Die Messung der Lebensdauer von μ-Mesonen 604
§ 328. Die Wechselwirkung zwischen Mesonen und Kernen 609
§ 329. Die Entdeckung der π-Mesonen 611
§ 330. Die künstliche Erzeugung von π-Mesonen unter Laboratoriumsbedingungen 615
§ 331. Masse und Lebensdauer geladener π-Mesonen 617
§ 332. Neutrale Mesonen 619
§ 333. Mesonen anderen Typs 621
§ 334. Erscheinungen bei Wechselwirkungen zwischen primären Höhenstrahlen und Atomkernen 621
§ 335. Der Ursprung der Höhenstrahlung 624

ANHANG

VII. Berechnung einiger Integrale 627
VIII. Die elektrostatische Wechselwirkung zweier Ladungen 628
IX. Quasistationäre Zustände und virtuelle Energieniveaus 631
X. Die Erhaltung des Drehimpulses für ein relativistisches Elektron 637
XI. Dipol- und Quadrupolstrahlung 639
XII. Die Parität des Zustands 643
XIII. Tabelle der Massen leichter Kerne 647
XIV. Tabelle der Isotope 651
XV. Die wichtigsten Atomkonstanten 676
XVI. Periodisches System der Elemente von D. I. Mendelejew 680

SACHREGISTER 681

VORWORT ZUR DRITTEN AUFLAGE

Die vorliegende dritte Auflage des zweiten Bandes der „Atomphysik" wurde wiederum einer bedeutenden Umarbeitung unterzogen. Die in den verschiedenen Teilen des Buches durchgeführten Änderungen haben allerdings nicht überall den gleichen Charakter. Die Mehrzahl der Änderungen in der ersten Hälfte des Buches verbessern und präzisieren nur die Darstellung, betreffen jedoch weder den Aufbau noch den allgemeinen Charakter des Werkes. Nur ein Paragraph, der die interessante und prinzipiell wichtige Frage der Verschiebung der Niveaus des atomaren Wasserstoffs kurz behandelt, wurde in diesem Teil neu hinzugefügt.

Die zweite Hälfte des Buches, eine Einführung in die Kernphysik, wurde einer tiefergehenden Bearbeitung unterzogen. Hier wurden sowohl die Reihenfolge der Kapitel als auch die Einteilung des Materials in den einzelnen Kapiteln, und selbst die Darstellung geändert. Dabei trachtete ich keineswegs danach, in dem Buch ein Maximum an neuesten Tatsachen zu bringen. Dieses Gebiet der Physik erweitert sich so schnell, daß eine derartige Aufgabe gar nicht zu lösen wäre. Das Ziel der Umarbeitung war vielmehr eine logisch bessere Systematik und Vertiefung der Darstellung, soweit der elementare Charakter des Buches überhaupt eine Vertiefung gestattet. Die wichtigsten neuen Tatsachen, wie Kernreaktionen sehr schneller Teilchen, neue Arten von Mesonen und ihre Umwandlungen u. a. m., wurden jedoch in das Buch aufgenommen. Wie auch in der vorigen Auflage wurde das Kapitel XXIV „Höhenstrahlung" von A. O. Weissenberg bearbeitet. Wertvolle Hilfe leistete mir auch der Redakteur des Verlages, W. A. Leschkowzew, dem ich meinen aufrichtigen Dank ausspreche.

Der Verfasser hofft, daß diese neue Form des zweiten Bandes der „Atomphysik" die Ansprüche der zahlreichen Leser, die das Studium dieses wichtigen Gebietes der modernen Physik beginnen, besser als die frühere befriedigt.

E. Schpolski

Moskau, August 1951

XII. DIE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

§ 153. Einführung

Im ersten Teil dieses Buches behandelten wir die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie und stellten die SCHRÖDINGER-Gleichung auf, mit deren Hilfe wir einfachste Probleme lösten. Der erste Teil umreißt somit den Grundkomplex unserer atomtheoretischen und quantenmechanischen Erkenntnisse. Jetzt gehen wir dazu über, die Quantenmechanik ausführlicher und systematisch darzustellen.

Das Verständnis der Quantenmechanik ist in gewissem Maße erschwert durch die Besonderheiten ihres mathematischen Apparates und die Eigentümlichkeiten der in ihr auftretenden Begriffe. Die Kenntnisse, die sich der Leser beim Studium des Abschnittes XI erworben hat, werden ihm helfen, das System der Quantenmechanik zu verstehen. An der entsprechenden Stelle werden wir natürlich erneut auf die SCHRÖDINGER-Gleichung stoßen, sie wird jedoch unter einem anderen Aspekt erscheinen. Dieser neue Aspekt ist nicht nur vom Gesichtspunkt des logischen Aufbaus wesentlich, er bietet auch neue Möglichkeiten einer Verallgemeinerung und Erweiterung des Anwendungsgebietes der Quantenmechanik.

Bei der Aufstellung der SCHRÖDINGER-Gleichung im Abschnitt XI gingen wir von den Welleneigenschaften der Mikroteilchen aus. Den systematischen Aufbau der Quantenmechanik werden wir von einer anderen Seite her in Angriff nehmen.

Wir werden uns von dem Gesichtspunkt leiten lassen, daß das logische Schema der Quantenmechanik möglichst eng an das der klassischen Mechanik anzulehnen ist. Dieses Bestreben ist schon deshalb verständlich, weil sich die Anwendung der sogenannten „klassischen Mechanik“ auf einen gewaltigen Kreis von Erscheinungen gut bewährt hat. Nach dem Korrespondenzprinzip sollte man außerdem erwarten, daß die Makromechanik einen Grenzfall der Mikromechanik, der Quantenmechanik, darstellt. Die Gesetze und Resultate der letzteren müssen automatisch in all den Fällen, in denen man die PLANCKsche Konstante gleich Null setzen kann, in die Gesetze der klassischen Mechanik übergehen. Aus diesem Grunde ist natürlich zu erwarten, daß den Grundvorstellungen und Grundgleichungen der klassischen Mechanik gewisse *maßgebende* Vorstellungen und Gleichungen in der Quantenmechanik entsprechen. Es ist selbstverständlich, daß dies neue Vorstellungen sein werden, Vorstellungen allgemeinerer Art als die der klassischen Mechanik, da diese nicht auf die Bewegung sehr kleiner Teilchen anzuwenden ist.

§ 154. Lineare Operatoren

Es hat sich gezeigt, daß zur Entwicklung der Quantenmechanik der mathematische Begriff des linearen Operators notwendig ist. Erhält man aus der Funktion $u\ (x_1, x_2, \ldots)$ eine andere Funktion v derselben unabhängigen Veränderlichen durch Anwendung irgendeiner Rechenvorschrift, so kann dies symbolisch in Form des Produkts von u mit dem

entsprechenden Operator dargestellt werden.[1]) Erhält man z. B. die Funktion $v(x)$ aus $u(x)$ durch Differentiation, so kann man das in folgender Form darstellen:

$$v = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u. \tag{154,1}$$

$\frac{d}{dx}$ ist in diesem Falle der auf die Funktion u anzuwendende Operator. Ein anderes Beispiel: Erhält man die Funktion v aus u durch Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen x (wo x irgendeine beliebige der unabhängigen Veränderlichen sei), so wäre zu schreiben:

$$v = xu = xu, \tag{154,2}$$

x ist der Operator der Multiplikation mit einer unabhängigen Veränderlichen. Bezeichnen wir den Operator mit F, so werden wir schreiben

$$Fu = v. \tag{154,3}$$

Wenn zwei beliebige Operatoren F und G auf die Funktion u angewendet und die Resultate addiert werden, so kann man das wie folgt darstellen:

$$Fu + Gu = (F + G)u.$$

Vertauscht man die Seiten dieser Gleichung

$$(F + G)u = Fu + Gu, \tag{154,4}$$

so kann man sie als Definition einer *Operatorensumme* ansehen. So ist z. B. für $F = x$ und $G = \frac{d}{dx}$:

$$(F + G)u = \left(x + \frac{d}{dx}\right)u = xu + \frac{du}{dx}.$$

Als *Produkt* mehrerer Operatoren bezeichnet man denjenigen Operator, der, auf die Funktion u angewandt, zum gleichen Ergebnis führt wie die aufeinanderfolgende Anwendung der einzelnen Operatoren. Wenn also der Operator K ein Produkt der Operatoren F und G ist, so bedeutet das

$$Ku = F(Gu). \tag{154,5}$$

Man kann also z. B. aus den schon betrachteten Operatoren x und $\frac{d}{dx}$ das Produkt

$$K = x\frac{d}{dx}$$

[1]) Für die Quantenmechanik sind auch Operatoren von Interesse, die eine Funktion gewisser Variablen (z. B. der Kartesischen Koordinaten) in eine Funktion anderer Variablen (z. B. der Impulskomponente) überführen. Wir werden jedoch in diesem Buch derartigen Operatoren nicht begegnen.

bilden, welches dann die folgende Bedeutung hat:

$$Ku = x\left(\frac{du}{dx}\right) = xu'.$$

Die n-mal aufeinanderfolgende Anwendung ein- und desselben Operators kann mit Hilfe von Potenzen ausgedrückt werden:

$$F^2u = F(Fu), \quad F^3u = F[F(Fu)],$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 u = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Die Besonderheit von Operatorprodukten besteht darin, *daß diese im allgemeinen nicht kommutativ sind*, also

$$FG \neq GF.$$

Als Beispiel nicht-kommutativer Operatoren kann man x und $\frac{d}{dx}$ anführen. Es ist

$$x\frac{d}{dx}u = xu', \tag{154,6}$$

$$\frac{d}{dx}xu = \frac{d}{dx}(xu) = u + xu', \tag{154,7}$$

so daß

$$\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right)u = u \neq 0.$$

Dagegen sind die Operatoren x_1 und x_2 sowie $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ kommutative Operatoren, da

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Wenn die Anwendung des Operators FG zu derselben Funktion *mit entgegengesetztem Vorzeichen* führt, wie die Anwendung des Operators GF, also

$$FG = -GF$$

ist, so sind die Operatoren *antikommutativ*.

Das Produkt eines Operators F und einer Konstante c, also cF, ist wiederum ein Operator, der darauf hinweist, daß das Resultat der Anwendung von F auf u mit c zu multiplizieren ist:

$$(cF)u = cFu.$$

Zum besseren Verständnis des Dargestellten empfehlen wir dem Leser, folgende Übungen auszuführen:

Übungen:

1. Es ist zu zeigen, daß die Operatoren x und $\frac{\partial}{\partial y}$, y und $\frac{\partial}{\partial x}$, x und $\frac{\partial}{\partial z}$ und überhaupt die Operatoren „unabhängige Variable" und „Differentiationen nach einer anderen unabhängigen Variablen" kommutativ sind.

2. Es ist zu zeigen, daß die Anwendung des Operators $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)x\right]^2$ auf die Funktion $\sin x$ das Resultat $\sin x + 3x\cos x - x^2 \sin x$ hat, die Anwendung des Operators $\left[x\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^2$ auf dieselbe Funktion aber $x\cos x - x^2\sin x$ ergibt.

3. Es ist zu zeigen, daß

$$\text{a)}\quad \left(\frac{d}{dx}+1\right)^2 u = \frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} + u,$$

so daß

$$\left(\frac{d}{dx}+1\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1.$$

$$\text{b)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

so daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

4. Es ist zu zeigen, daß

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)^2 u = \frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} + x^2u + u.$$

Dabei ist zu beachten, daß

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)^2 \neq \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}x + x^2,$$

was durch Anwendung des auf der rechten Seite obiger Ungleichung stehenden Operators auf die Funktion u zu zeigen ist.

5. Es ist zu zeigen, daß

$$(F+G)\,(F-G) = F^2 - G^2 - (FG - GF),$$

$$(F-G)\,(F+G) = F^2 - G^2 + (FG - GF),$$

so daß eine Zerlegung in Multiplikatoren

$$F^2 - G^2 = (F+G)\cdot(F-G)$$

nur bei kommutativen Operatoren vorgenommen werden darf.

Es gibt Operatoren, die bei Anwendung auf eine beliebige Funktion diese unverändert lassen. So erhalten wir z. B. aus (154,6) und (154,7)

$$\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right)u = u.$$

Dies sind die sogenannten „Einheitsoperatoren"

$$\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = 1. \qquad (154,8)$$

Aus den vorangegangenen Darlegungen ist zu ersehen, daß man mit Operatoren wie mit algebraischen Größen verfahren kann, dabei aber beachten muß, daß ihr Produkt im allgemeinen nicht kommutativ ist. Es ist daher notwendig, die Multiplikation mit dem Operator von links her (154,6) streng von der Multiplikation von rechts her (154,7) zu unterscheiden.

Beispiel: Unter Benutzung der Operatorenalgebra ist zu zeigen, daß

$$FG^2 - G^2F = 2G$$

wenn

$$FG - GF = 1. \qquad (154,9)$$

Um das zu beweisen, multiplizieren wir (154,9) mit G zuerst von links

$$GFG - G^2F = G \qquad (154,10)$$

und dann von rechts

$$FG^2 - GFG = G. \qquad (154,11)$$

Addiert man (154,10) und (154,11), so ergibt sich

$$FG^2 - G^2F = 2G.$$

Es sei $F = \frac{d}{dx}$ und $G = x$. Mit (154,8) ist dann

$$FG - GF = \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = 1.$$

Wir können also gleich schreiben:

$$\left(\frac{d}{dx}x^2 - x^2\frac{d}{dx}\right)u = \frac{d}{dx}(x^2u) - x^2\frac{du}{dx} = 2xu.$$

Übung:

Es ist zu zeigen, daß

$$FG^3 - G^3F = 3G^2$$

und allgemein

$$FG^n - G^nF = nG^{n-1}.$$

Als *linear* bezeichnen wir Operatoren, die ' n Forderungen

$$F(u_1 + u_2) = Fu_1 + Fu_2$$

$$F(cu) = cFu$$

entsprechen, wo c eine Konstante ist. Es ist evident, daß die Operatoren $\frac{d}{dx}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, x$ linear sind.

Wir haben es im weiteren also nur mit linearen Operatoren zu tun, wenn wir von Operatoren schlechthin sprechen werden.

Übung:

Es ist zu zeigen, daß die Operatoren

$$c_1F + c_2G$$

und

$$c_3FG$$

linear sind, wenn die Operatoren F und G linear sind.

§ 155. Eigenwerte und Eigenfunktionen linearer Operatoren

Bei Anwendung des Operators F auf eine Funktion u erhält man zuweilen wieder die gleiche Funktion, multipliziert mit einer Zahl λ:

$$Fu = \lambda u. \tag{155,1}$$

Beispiel:

$$F = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad u = \cos 4x,$$

$$Fu = -\frac{d^2}{dx^2}\cos 4x = 16 \cos 4x.$$

Hat die Beziehung (155,1) Gültigkeit und ist *u eine stetige, endliche und für jedes x eindeutige Funktion*, so nennt man u *Eigenfunktion* des Operators F und λ seinen zur Funktion u gehörigen Eigenwert. In unserem Beispiel ist cos $4x$ die Eigenfunktion des Operators $-\frac{d^2}{dx^2}$ und 16 der zu cos $4x$ gehörige Eigenwert desselben Operators. Es sei jedoch bemerkt, daß laut der Definition einer Eigenfunktion der hyperbolische Kosinus cosh $4x$ keine Eigenfunktion des Operators $-\frac{d^2}{dx^2}$ ist, obwohl

$$-\frac{d^2}{dx^2}\cosh 4x = -16 \cosh 4x$$

ist, da

$$\cosh 4x = \frac{1}{2}(e^{4x} + e^{-4x})$$

ist, woraus hervorgeht, daß $\cos h\, 4x$ für $x \to \pm\infty$ unendlich wird und daher die Forderung der Endlichkeit nicht erfüllt ist.

Übung:

Es ist zu zeigen, daß $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ Eigenfunktion des Operators

$$-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

zum Eigenwert 1 und $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ Eigenfunktion des gleichen Operators zum Eigenwert 3 ist.

In der Quantenmechanik spielt eine gewisse Funktion ψ, die im ganzen Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen definiert ist, eine äußerst wichtige Rolle. Sind diese Variablen z. B. die Kartesischen Koordinaten, so muß ψ in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ für jede der Koordinaten x, y und z definiert sein. Sind jedoch die Polarkoordinaten r, ϑ, φ die unabhängigen Variablen, so ist die Funktion ψ für r von 0 bis ∞, für ϑ von 0 bis π und für φ von 0 bis 2π zu definieren. Die Forderungen der Endlichkeit, Stetigkeit und Eindeutigkeit im ganzen Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen werden wir im folgenden als Standardbedingungen bezeichnen. Die Bedingung der Eindeutigkeit spielt eine besonders wichtige Rolle, wenn die Winkel ϑ und φ die unabhängigen Variablen sind.

Die Gesamtheit der Eigenwerte eines Operators bezeichnet man als sein Spektrum. Um das Spektrum der Eigenwerte aufzufinden, sucht man die Funktion u, die der Gleichung (155,1) und den Standardbedingungen gerecht wird. Wenn, wie dies in der Mehrzahl der uns interessierenden Fälle vorkommt, F ein Differentialoperator $\left(\frac{d}{dx}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{u.d.m.}\right)$ ist, so läuft die Aufgabe darauf hinaus, eine Differentialgleichung zu integrieren und diejenigen ihrer Lösungen aufzusuchen, die den Standardbedingungen entsprechen. Es ist höchst bemerkenswert, daß man infolge der Eigenschaften linearer Differentialgleichungen zulässige Lösungen (also solche, die den Standardbedingungen entsprechen) nur für ausgewählte Werte des Parameters λ erhält, für Werte also, die eine diskrete Zahlenfolge, wie z. B. (siehe weiter unten Beispiel 3) die Folge der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ..., bilden. In diesem Fall spricht man von einem diskreten Spektrum. Daneben kommen Fälle vor, in denen die Lösungen die erforderlichen Eigenschaften für stetig ändernde Werte von λ besitzen. In diesen Fällen bezeichnet man das Spektrum als kontinuierlich. Wir wollen dies an drei Beispielen erläutern, indem wir das Eigenwertspektrum einiger Operatoren aufsuchen.

1. Der Operator sei:

$$F = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}. \tag{155,2}$$

Als Besonderheit dieses Operators ist zu vermerken, daß er die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ enthält. Mit solchen Operatoren werden wir es oft zu tun haben. Die Bedingung (155,1) führt uns in diesem Falle auf die Gleichung

$$\frac{1}{i}\frac{du}{dx} = \lambda u$$

oder

$$\frac{du}{dx} - i\lambda u = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung

$$u = e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$$

entspricht den Standardbedingungen für beliebige reelle λ. Sollte jedoch λ eine imaginäre (oder komplexe) *Zahl* sein, so wäre die Bedingung der Endlichkeit nicht mehr erfüllt. So sei z. B. $\lambda = ia$, mit a reell, dann ist

$$u = e^{i\lambda x} = e^{-ax}.$$

Diese Funktion wird unendlich für $x \to -\infty$. Somit hat der Operator (155,2) ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten, das aus beliebigen positiven oder negativen reellen Zahlen λ (einschließlich Null) besteht.

2. Der Operator sei

$$F = -\frac{d^2}{dx^2}. \tag{155,3}$$

Die Bedingung (155,1) ergibt

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0.$$

Die partiellen Lösungen dieser Gleichung sind

$$u = e^{\pm\sqrt{-\lambda}x};$$

$$\text{a)}\ \lambda > 0,\ \sqrt{-\lambda} = i\sqrt{|\lambda|} = ia,\ a = \sqrt{|\lambda|},$$

$$u = e^{\pm iax} = \cos ax \pm i \sin ax.$$

Diese Lösung entspricht den Standardbedingungen.

b) $\lambda < 0$, $\sqrt{-\lambda}$ ist eine reelle Zahl. Es sei $\sqrt{-\lambda} = \beta$, dann ist

$$u = e^{\pm\beta x}.$$

Diese Lösung entspricht nicht der Endlichkeitsbedingung (die Lösung mit positivem Exponenten wird unendlich bei $x \to \infty$, die Lösung mit negativem Exponenten bei $x \to -\infty$). Somit hat der Operator (155,3) ein kontinuierliches Spektrum, das aus allen reellen *positiven* Zahlen λ besteht.

3. Der Operator sei

$$F = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2. \tag{155,4}$$

Die Bedingung (155,1) ergibt

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)u = \lambda u$$

bzw.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda - x^2)u = 0. \tag{155,5}$$

Wenn wir diese Gleichung und die uns schon im Band I begegnete Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - a^2x^2)\psi = 0 \tag{149,4}$$

gegenüberstellen, so sehen wir, daß die letzte bei $a = 1$ mit (155,5) übereinstimmt. Die Gleichung (149,4) hat nun aber Lösungen, die der Endlichkeitsbedingung nur bei ausgewählten Werten des Parameters λ entsprechen, und zwar bei

$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Somit hat der Operator (155,4) ein diskretes Spektrum von Eigenwerten, das aus den ungeraden positiven Zahlen 1, 3, 5, ... besteht.

§ 156. Selbstadjungierte Operatoren

Unter den linearen Operatoren werden diejenigen für uns von besonderem Interesse sein, die zur Klasse der *selbstadjungierten* oder *hermiteschen* Operatoren gehören. Diese Operatoren sind folgendem Kriterium unterworfen: Es seien $u(x_1, x_2, \ldots)$ und $v(x_1, x_2, \ldots)$ zwei Funktionen; der Operator heißt selbstadjungiert, wenn

$$\int u^* F v\, dX = \int (Fu)^* v\, dX, \tag{156,1}$$

wobei $dX = dx_1, dx_2, dx_3, \ldots$ ist und die Integration sich über den gesamten Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen erstreckt. Wenn diese unabhängigen Veränderlichen speziell die Kartesischen Koordinaten x, y, z sind, so erstreckt sich die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$, und die Funktionen u und v müssen quadratisch integrierbar sein, d. h., sie müssen bei Annäherung an die Integrationsgrenzen hinreichend schnell verschwinden.

Unser Interesse an den selbstadjungierten Operatoren ist dadurch bedingt, daß sie *reelle Eigenwerte* besitzen. Zum Beweis wählen wir mit v irgendeine aus der Schar der Eigenfunktionen des Operators F. Es ist dann definitionsgemäß

$$Fv = \lambda v,$$

worin λ der zu v gehörige Eigenwert von F ist. Es sei ferner $u = v$. Damit haben wir

$$\int u^* F v\, dX = \int v^* F v\, dX = \lambda \int v^* v\, dX,$$

$$\int \overline{(Fu)^*} v\, dX = \int (Fv)^* v\, dX = \lambda^* \int v^* v\, dX.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind nach der Definition der Hermitezität (156,1) einander gleich, und daher ist

$$\lambda = \lambda^*.$$

Dies kann jedoch nur dann der Fall sein, wenn λ eine reelle Zahl ist.

Betrachten wir einige Beispiele.

1. Der Operator bedeute die Multiplikation mit einer unabhängigen Veränderlichen: $F = x$.

Da x eine reelle Größe darstellt, ist

$$x = x^*,$$

und deshalb

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^* x v \, dX = \int_{-\infty}^{+\infty} x u^* v \, dX = \int_{-\infty}^{+\infty} (xu)^* v \, dX.$$

Wir sehen, daß das Kriterium (156,1) erfüllt ist: Der Operator „unabhängige Veränderliche" ist ein selbstadjungierter Operator.

2. $F = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$; in diesem Falle ist $F^* = -\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$. Wir schreiben den linken Teil der Gleichung (156,1) hin und integrieren partiell

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^* F v \, dx = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} u^* \frac{dv}{dx} \, dx = \frac{1}{i} u^* v \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du^*}{dx} v \, dx. \qquad (156{,}2)$$

Da beide Funktionen u und v bedingungsgemäß quadratisch integrierbar sind, verschwinden beide, wenn x gegen Unendlich geht. Das erste Glied rechts in (156,2) ergibt also Null, und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^* F v \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{i}\frac{du^*}{dx} v \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (Fu)^* v \, dx.$$

Der Operator $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ ist also selbstadjungiert.

Es sei aber bemerkt, daß der Operator $F = \frac{d}{dx}$ *nicht* selbstadjungiert ist. Da die imaginäre Einheit im Operator fehlt, ist $F = F^*$, und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^* F v \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u^* \frac{dv}{dx} \, dx = u^* v \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du^*}{dx} v \, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} (Fu)^* v \, dx,$$

d. h., der Operator $\frac{d}{dx}$ ist nicht selbstadjungiert.

3. Der Operator sei $F = -\frac{d^2}{dx^2}$; auch hier ist $F^* = F = -\frac{d^2}{dx^2}$. Führt man eine zweimalige partielle Integration aus und beachtet, daß die Funktionen u und v stetig sind und an den Grenzen verschwinden, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^* Fv\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} u^* \frac{d^2 v}{dx^2} dx = -u^* \frac{dv}{dx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du^*}{dx}\frac{dv}{dx} dx =$$

$$= \frac{du^*}{dx} v \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 u^*}{dx^2} v\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (Fu)^* v\, dx;$$

der Operator $-\frac{d^2}{dx^2}$ ist also selbstadjungiert.

Beachten wir nun, daß der Operator $-\frac{d^2}{dx^2}$ das Produkt zweier selbstadjungierter und dabei *kommutativer Operatoren* $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ ist. Allgemein läßt sich zeigen, daß FG ein selbstadjungierter Operator ist, wenn F und G zwei selbstadjungierte kommutative Operatoren sind. Es ist in der Tat

$$\int u^* FGv\, dX = \int u^* F(Gv)\, dX.$$

Da F und G selbstadjungierte Operatoren sind, folgt

$$\int u^* F(Gv) dX = \int (Fu)^* Gv\, dX = \int (GFu)^* v\, dX.$$

Da jedoch die Operatoren F und G kommutativ sind, also $FG = GF$, ist

$$\int u^* FGv\, dX = \int (FGu)^* v\, dX,$$

was zu beweisen war.

Übungen:

Zur Übung schlagen wir vor, die folgenden nützlichen Theoreme zu beweisen:

1. Sind die Operatoren F und G selbstadjungiert, so sind es auch die Operatoren $F + G$ und $FG + GF$.
2. Sind die Operatoren F und G selbstadjungiert aber nicht kommutativ, so ist der Operator $FG - GF$ nicht selbstadjungiert, wohl aber der Operator $i\,(FG - GF)$.

§ 157. Die Orthogonalität der Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren

Die Eigenfunktionen eines linearen, selbstadjungierten Operators besitzen eine wichtige Eigenschaft: Sie sind zueinander orthogonal. Mit Funktionen, die Orthogonalitätseigenschaften besitzen, hatten wir es schon bei den trigonometrischen Funktionen $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ zu tun (siehe Bd. I, § 46); sie sind im Intervall $-\pi$, $+\pi$ orthogonal. Zwei beliebige Funktionen u_m und u_n, die dem System $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ angehören, werden als orthogonal bezeichnet, wenn

$$\int u_m u_n\, dX = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n, \tag{157,1}$$

wobei sich die Integration über den ganzen Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen erstreckt. Die oben angeführten Funktionen $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ sind zueinander orthogonal, da z. B.

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \, d\varphi &= 0,\\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi &= 0\end{aligned}\right\} \text{für } m \neq n.$$

In der Quantenmechanik hat man es mit komplexen Funktionen zu tun. Die Definition der Orthogonalität ändert sich dadurch etwas. Komplexe Funktionen u_m und u_n sind nämlich orthogonal, wenn

$$\int u_m^* u_n \, dX = 0, \tag{157,2}$$

wobei sich, wie früher, die Integration über den ganzen Variabilitätsbereich der unabhängigen Variablen erstreckt.

Unsere Behauptung besteht darin, daß zwei beliebigen Funktionen eines Systems

$$u_1, u_2\, u_3, \ldots, u_m, \ldots$$

von Eigenfunktionen eines linearen selbstadjungierten Operators, der ein diskretes (punktartiges Eigenwertspektrum besitzt, die Eigenschaft (157,2) zukommt, wenn diesen Funktionen ungleiche Eigenwerte entsprechen.

Zum Beweis beachten wir, daß gemäß der Definition von Eigenfunktionen

$$F u_m = \lambda_m u_m, \quad F u_n = \lambda_n u_n, \tag{157,3}$$

wobei λ_m und λ_n Eigenwerte sind, für die wir $\lambda_m \neq \lambda_n$ voraussetzen. Da F ein selbstadjungierter Operator ist, sind seine Eigenwerte reell, d. h. $\lambda_m = \lambda_m^*$ und $\lambda_n = \lambda_n^*$. Ferner muß wegen der Hermitezität des Operators F die Bedingung

$$\int u_m^* F u_n \, dX = \int (F u_m)^* u_n \, dX$$

erfüllt sein. Nach (157,3) ergibt dies

$$\lambda_n \int u_m^* u_n \, dX = \lambda_m \int u_m^* u_n \, dX,$$

woraus

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int u_m^* u_n \, dX = 0 \tag{157,4}$$

folgt, und da bedingungsgemäß $\lambda_m \neq \lambda_n$, so ist

$$\int u_m^* u_n \, dX = 0 \tag{157,5}$$

was zu beweisen war.

§ 158. Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Funktionen, die einem Orthogonalsystem angehören, werden gewöhnlich *normiert*, d. h. ihnen wird eine solche Form gegeben, daß das Integral des Quadrats des absoluten Betrages einer jeden von ihnen gleich 1 ist:

$$\int u_n^* u_n \, dx = 1. \tag{158,1}$$

Dies wird erreicht durch Multiplikation der Funktionen mit entsprechend ausgesuchten Konstanten. So werden z. B. im Falle $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ wegen

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 n\varphi \, d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = \pi$$

alle Funktionen mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ multipliziert. Dadurch wird das System

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\varphi, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2\varphi, \ \ldots, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\varphi, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2\varphi, \ \ldots$$

orthogonal und normiert (man sagt auch kurz „orthonormiert"), denn

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = 1.$$

Fügt man dem System noch das Glied $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ hinzu, so wird es außerdem *vollständig*, d. h., es gibt dann keine Funktion mehr, die zu allen Funktionen des Systems orthogonal ist.

Im Falle anderer Orthogonalsysteme wird die Normierung in analoger Weise vollzogen. Da die Funktionen $u_n(x)$ quadratisch integrierbar sind, ist das Integral $\int |u_n|^2 dx$ einer endlichen Zahl gleich. Man kann daher immer solche Multiplikatoren aufsuchen — im allgemeinen komplexe, also $a_n = |a_n| e^{i\delta_n}$ —, durch die die Funktionen normiert werden. Hierbei bleibt die „Phasenkonstante" δ_n unbestimmt, da

$$a_n a_n^* = |a_n|^2.$$

Einer solchen Unbestimmtheit des Phasenmultiplikators begegnet man, wie wir weiter sehen werden, in der Quantenmechanik ständig. Allerdings hat sie keine wesentliche Bedeutung, da nur die Quadrate der absoluten Beträge der entsprechenden Zahlen physikalische Bedeutung haben.

Es sei ein vollständiges System orthogonaler normierter Funktionen

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

gegeben.

In mathematischen Handbüchern[1]) wird bewiesen, daß eine beliebige Funktion $u(x)$, die im ganzen Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen (speziell von $-\infty$ bis $+\infty$) quadratisch integrierbar ist, im übrigen aber sehr weiten mathematischen Bedingungen genügt, in die Reihe

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_n u_n(x) + \ldots \tag{158,2}$$

entwickelt werden kann. Ist eine solche Entwicklung möglich, so gestattet die Eigenschaft

$$\int u_m^* u_n \, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ 1 \text{ für } m = n \end{cases} \tag{158,3}$$

eine bequeme Koeffizientenermittlung: Zur Berechnung des beliebigen Koeffizienten c_k von u_k multiplizieren wir beide Seiten von (158,2) mit u_k^* und integrieren

$$\int u u_k^* \, dx = c_1 \int u_1 u_k^* \, dx + c_2 \int u_2 u_k^* \, dx + \ldots + c_k \int u_k u_k^* \, dx + \ldots + c_n \int u_n u_k^* \, dx + \ldots .$$

Wegen (158,3) sind alle Integrale auf der rechten Seite gleich Null, mit Ausnahme des Integrals bei c_k, das gleich 1 ist. Somit ist

$$\int u u_k^* \, dx = c_k . \tag{158,4}$$

Abschließend sei bemerkt, daß die Vollständigkeit des Systems orthogonaler Funktionen, nach denen die Entwicklung vorgenommen wird, eine wesentliche Bedingung dafür ist, daß die Reihe, die im rechten Teil von (158,2) steht, auch wirklich zur vorgegebenen Funktion konvergiert. Andernfalls kann sich eine Reihe ergeben, die zwar auch konvergiert, aber nicht zu der uns interessierenden Funktion.

Nicht selten ist es so, daß mehreren verschiedenen Eigenfunktionen des Operators ein und derselbe Eigenwert zukommt. Einen solchen Fall bezeichnet man als *Entartung*. Die Eigenfunktionen sind im Falle einer Entartung nicht orthogonal, da in der Beziehung

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int u_m^* u_n \, dX = 0 \tag{157,4}$$

$\lambda_n = \lambda_m$ ist und demzufolge

$$\int u_m^* u_n \, dX \neq 0 .$$

Untersuchen wir diese Frage etwas ausführlicher. Zunächst haben wir zu definieren, *welche* Eigenfunktionen wir als *verschieden* ansehen werden. Das ist schon deshalb notwendig, weil ohne präzise Definition unklar ist, ob z. B. die Funktion u_n und dieselbe Funktion, multi-

[1]) Siehe W. I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. IV, § 38, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958, und R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Kap. 2, 2. Auflage 1931, Springer, Berlin.

pliziert mit einer Konstante, also cu_n, als verschiedene Funktionen anzusehen sind. Wir werden Eigenfunktionen dann verschieden nennen, wenn sie *linear unabhängig* sind. Dies bedeutet: Es seien n Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gegeben; diese Funktionen bezeichnet man als *linear abhängig*, wenn bei beliebigen Werten der Veränderlichen die Beziehung

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = 0 \tag{158,5}$$

gilt, wobei wenigstens eine der Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ von Null verschieden ist. Wenn die Beziehung (158,5) nicht identisch zu erfüllen ist, so bezeichnet man die Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ als linear unabhängig.

Nehmen wir jetzt an, daß irgendein Eigenwert des Operators F, sagen wir λ_n, entartet ist. Das bedeutet, daß es mehrere Eigenfunktionen $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_k}$ gibt, denen gleiche Eigenwerte λ_n entsprechen. Die Zahl der Funktionen k bezeichnet man in diesem Falle als Entartungsgrad: Wir sprechen von zweifacher, dreifacher usw. Entartung. Diese k Eigenfunktionen sind nicht zueinander orthogonal. Es zeigt sich jedoch, daß man aus diesen entarteten Eigenfunktionen Linearkombinationen bilden kann, die auch Eigenfunktionen desselben Operators sind, deren Koeffizienten aber derart ausgewählt werden können, daß diese neuen Eigenfunktionen orthogonal sind.

Es seien u_1 und u_2 linear unabhängige Eigenfunktionen des Operators F, die ein und demselben Eigenwert λ zugeordnet sind, also

$$Fu_1 = \lambda u_1, \quad Fu_2 = \lambda u_2.$$

Wir bilden die Linearkombination

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2.$$

Diese Funktion ist auf jeden Fall von Null verschieden, da sonst u_1 und u_2 linear abhängig wären. Die Funktion u ist auch eine Eigenfunktion des Operators F, denn

$$Fu = F(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 F u_1 + c_2 F u_2 = \lambda (c_1 u_1 + c_2 u_2) = \lambda u.$$

Wir wollen nun zeigen, daß man aus unseren entarteten Eigenfunktionen u_1 und u_2 solche Linearkombinationen bilden kann, die orthogonal und normiert sind. Zu diesem Zweck normieren wir zunächst u_1. Es sei a der Normierungsfaktor, so daß

$$|a|^2 \int u_1^* u_1 \, d\tau = 1.$$

Hieraus folgt

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{\int u_1^* u_1 \, d\tau}}.$$

Damit ist die Funktion

$$w_1 = \frac{u_1}{\sqrt{\int u_1^* u_1 \, d\tau}}$$

zu 1 normiert; sie unterscheidet sich von u_1 nur durch einen Zahlenfaktor. Bilden wir jetzt eine Linearkombination aus w_1 und u_2:

$$v_2 = a_{21} w_1 + u_2 .$$

Der Koeffizient a_{21} kann so gewählt werden, daß w_1 und v_2 orthogonal sind. Wirklich, aus der Orthogonalitätsbeziehung

$$0 = \int w_1^* v_2 \, d\tau = a_{21} \int w_1^* w_1 \, d\tau + \int w_1^* u_2 \, d\tau = a_{21} + \int w_1^* u_2 \, d\tau$$

folgt

$$a_{21} = - \int w_1^* u_2 \, d\tau .$$

Es ist evident, daß bei einer derartigen Wahl von a_{21} die Funktion v_2 zu w_1 orthogonal ist; sie ist aber noch nicht normiert. Nimmt man die Normierung wie oben vor, so erhält man

$$w_2 = \frac{v_2}{\sqrt{\int v_2^* v_2 \, d\tau}} .$$

Aus den Funktionen u_1 und u_2 haben wir somit orthogonale und normierte Funktionen w_1 und w_2 gebildet. In einem ähnlichen Prozeß können drei, vier usw. entartete Eigenfunktionen orthogonalisiert werden.[1])

Man kann somit davon ausgehen, daß die Orthogonalitätsbedingung für Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Operators immer erfüllt ist: In Fällen einer Entartung können die entarteten Eigenfunktionen durch ihre orthogonalisierten Linearkombinationen ersetzt werden. Man hat nur zu beachten, daß bei der Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen in Fällen, in denen einige von ihnen entartet sind, eine dem Entartungsgrad entsprechende Anzahl von orthogonalisierten Linearkombinationen dieser entarteten Eigenfunktionen einzusetzen ist.

§ 159. Die Wellenfunktion

Wir haben jetzt hinreichende mathematische Hilfsmittel zur Verfügung und können uns der Formulierung der Grundlagen der Quantenmechanik zuwenden.[2])

Hierzu ist es angebracht, zunächst auf die bereits im Kapitel X des ersten Bandes behandelte Bewegung eines freien Teilchens zurückzugreifen. Wir sahen dort, daß das in der klassischen Mechanik übliche Verfahren — die Bewegung durch gleichzeitige Angabe von Koordinaten und Impulskomponenten zu kennzeichnen — im allgemeinen nicht auf sehr kleine Teilchen, wie es die Elektronen, Protonen usw. sind, übertragen werden kann. Es

[1]) Über die Orthogonalisierung eines Systems von Funktionen siehe Näheres bei R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Kap. 2, 2. Auflage, 1931, Springer, Berlin.

[2]) Einen tieferen Einblick in die prinzipiellen Fragen der Quantenmechanik vermittelt das Buch von D. I. Blochinzew, Grundlagen der Quantenmechanik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

erwies sich als notwendig, das Verhalten solcher Mikroteilchen durch die Funktion

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i\frac{2\pi}{h}(xp_x + yp_y + zp_z - Et)} \tag{159,1}$$

darzustellen, die, in reeller Form ausgedrückt,

$$\psi(x, y, z, t) = a \cos\left[\frac{2\pi}{h}(xp_x + yp_y + zp_z - Et) + \delta\right] \equiv a \cos\left[\frac{2\pi}{h}(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{p} - Et) + \delta\right] \tag{159,1'}$$

eine *ebene Welle* (DE-BROGLIE-Welle) beschreibt. Dabei wird die Beziehung zwischen dieser Wellenbeschreibung und den Teilchen statistisch festgesetzt: Das Amplitudenquadrat der ebenen Welle a^2, das gleich dem Quadrat des absoluten Betrages $\psi\psi^*$ der komplexen Funktion (159,1) ist, multipliziert mit dem Raumelement $d\tau = dx\,dy\,dz$, also $\psi\psi^* d\tau$, wird als Wahrscheinlichkeit dafür angesehen, daß das Teilchen in dem kleinen Raumelement, deren Koordinaten zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$ liegen, aufzufinden ist. Somit kann man die Funktion ψ als die Wahrscheinlichkeitsamplitude bezeichnen und das Quadrat ihres absoluten Betrages — als die *Wahrscheinlichkeitsdichte*.

Dieses Ergebnis, das wir für die Bewegung eines *freien* Teilchens (d. h. in Abwesenheit eines Feldes) erhielten, wollen wir verallgemeinern und legen dem System, welches wir im weiteren entwickeln werden, folgende Annahme zugrunde: Es existiert eine komplexe Funktion der Koordinaten und der Zeit $\psi(x, y, z, t)$, die die Bewegung in einem *Kraftfeld* derart beschreibt, daß $\psi^*\psi\,d\tau$ das Maß der Wahrscheinlichkeit dafür ist, das Teilchen im Raumelement $d\tau$ (oder, wie wir auch sagen können: „am gegebenen Ort des Raumes") vorzufinden. Diese Funktion werden wir ebenso als Wellenfunktion bezeichnen, obwohl im Falle einer Bewegung im Kraftfeld nicht nur das Bild einer ebenen Welle, sondern sogar einer Welle mit konstanter (d. h. von den Koordinaten unabhängigen) Amplitude überhaupt, im allgemeinen untauglich ist.

Da die Funktion ψ den Zustand eines physikalischen Systems beschreibt, müssen ihre mathematischen Eigenschaften durch die Forderung der Endlichkeit, Stetigkeit und Eindeutigkeit im ganzen Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen beschränkt sein, d. h. durch jene Forderungen, die wir in § 155 *Standardbedingungen* nannten. In vielen Fällen wird an diese Funktion noch die Forderung der quadratischen Integrierbarkeit gestellt, die aus der Notwendigkeit der Normierung der Funktion

$$\int \psi^*\psi\,d\tau = 1$$

entspringt, wobei sich im Falle Kartesischer Koordinaten die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt.

Weiter unten werden wir übrigens noch sehen, daß es Fälle gibt, in denen die Funktion ψ zwar den Standardbedingungen entspricht, aber nicht hinreichend schnell an den Grenzen des Integrationsintervalls verschwindet. In solchen Fällen greift man zu komplizierteren Normierungsverfahren, die übrigens auch durch physikalische Überlegungen durchaus zu rechtfertigen sind (siehe § 163).

§ 160. Das Prinzip der Superposition

Wenden wir uns nun wieder der Bewegung eines freien Teilchens zu und erinnern uns an den Versuch, in dem der Durchgang eines Elektronenbündels durch zwei Spalten eines Schirmes untersucht wurde. In § 138 sahen wir, daß zur Ermittlung der Wahrscheinlich-

keit, mit der ein Elektron an einer bestimmten Stelle der Photoplatte oder des Fluoreszenzschirms auftrifft, die Amplituden von zwei Kugelwellen, deren Ausgangspunkte die beiden Spalten bilden, zu addieren sind, und zwar unter Berücksichtigung der Wellenphasen an der entsprechenden Stelle. Wir können deshalb sagen, daß der Zustand des Elektrons rechts vom Schirm durch eine Funktion ψ charakterisiert ist, die sich als Resultat der Superposition zweier Funktionen ψ_1 und ψ_2 erweist, von denen jede eine Kugelwelle beschreibt, deren Ausgangspunkt der eine oder andere Spalt ist:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \tag{160,1}$$

Nur so sind die im Kapitel X beschriebenen Interferenzversuche mit Elektronen zu verstehen. Die Möglichkeit einer Superposition, die allgemeiner durch die Beziehung

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + \ldots \tag{160,2}$$

beschrieben wird, ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Wellenfelder. Beachtet man, daß die Funktionen ψ, ψ_1, ψ_2, ... den Zustand des Teilchens charakterisieren, so kann man das Prinzip der Superposition, wie es (160,2) wiedergibt, folgendermaßen formulieren: *Wenn sich das Teilchen in den Zuständen* ψ_1, ψ_2, ... *befinden kann, so kann es sich auch in dem Zustand* ψ *befinden, der sich als Resultat der Superposition der Zustände* ψ_1, ψ_2, ... *erweist.* Dieses Prinzip, das auf Versuchsergebnissen mit freien Teilchen basiert, erstreckt sich auch auf die Bewegung in Kraftfeldern.

Es fällt sofort auf, daß sich die Superposition in der Quantenmechanik von der Superposition in der klassischen Schwingungstheorie in folgender Hinsicht wesentlich unterscheidet: Wenn der Schwingungszustand durch die Funktion u beschrieben ist, so erhalten wir, wenn wir sie mit derselben Funktion addieren, die Funktion $u + u = 2u$, die einen anderen Schwingungszustand, nämlich den mit doppelter Amplitude, beschreibt. In der Quantenmechanik dagegen ergibt sich aus der Multiplikation von ψ mit irgendeiner Zahl c die Funktion $c\psi$, die den gleichen Zustand wie ψ beschreibt. Das folgt schon daraus, daß ψ und $c\psi$ nicht linear unabhängig sind. Über den physikalischen Sinn dieses Ergebnisses siehe Ende § 165.

§ 161. Die Operatoren der Quantenmechanik

In der klassischen Mechanik haben wir es mit solchen Größen wie Koordinate, Impuls, Energie usw. zu tun. Diese Größen und ihre Funktionen werden wir in Zukunft manchmal kurz dynamische Variablen nennen. Zwischen den verschiedenen dynamischen Variablen besteht in der klassischen Mechanik eine ganze Reihe von Identitätsbeziehungen. So kann z. B. die Energie durch die Impulskomponenten und Koordinaten folgendermaßen dargestellt werden:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

Analog kann man auch die Komponenten des Impulsmomentes durch andere dynamische Variablen darstellen. Z. B.:

$$L_x = yp_z - zp_y \quad \text{usw.}$$

Da das System der Quantenmechanik analog zu dem der klassischen Mechanik aufzubauen ist, benutzt man in der Quantenmechanik auch entsprechende dynamische Variablen. Die Besonderheit der Bewegungsgesetze in Mikrosystemen drückt sich in der Quanten-

mechanik darin aus, daß diese dynamischen Variablen durch *mathematische Größen anderer Wesensart* als in der klassischen Mechanik dargestellt werden. Der Quantenmechanik liegt nämlich folgendes Postulat zugrunde (Postulat I):

Jeder dynamischen Variablen der klassischen Mechanik wird in der Quantenmechanik ein bestimmter linearer Operator zugeordnet, der auf die Funktion ψ wirkt; es wird angenommen, daß zwischen diesen linearen Operatoren dieselben Identitätsbeziehungen bestehen wie zwischen den entsprechenden Größen in der klassischen Mechanik.

Zur Entwicklung dieser These wollen wir zunächst die grundlegenden Operatoren der Quantenmechanik aufstellen: die Operatoren der Koordinaten und der Impulskomponenten. Da die Operatoren der Quantenmechanik auf die Funktion ψ angewendet werden, die eine Funktion der *Koordinaten* ist, wird den letzteren als unabhängige Variable der Operator der Multiplikation zugeordnet. So führt z. B. der Operator, der der x-Koordinate entspricht, die Funktion ψ in $x\psi$ über:

$$x\psi = x\psi. \tag{161,1}$$

Jeder mechanischen Größe, die eine reine Koordinatenfunktion ist (z. B. der potentiellen Energie), wird der Operator der Multiplikation mit dieser Funktion zugeordnet. Als Operator der x-Komponente des Impulses, also p_x, wählen wir den, der die ψ-Funktion in $\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}$ überführt. Entsprechend überführen die Operatoren p_y und p_z die ψ-Funktion in $\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}$ und $\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}$. Wir erhalten somit folgende Zuordung:

Dynamische Variable der klassischen Mechanik		Operator der Quantenmechanik
p_x	$\rightarrow$	$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$,
p_y	$\rightarrow$	$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}$,
p_z	$\rightarrow$	$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$.

(161,2)

Der Grund für eine solche Wahl der Operatoren p_x, p_y, p_z wird im folgenden Paragraphen klar werden.

Wir haben nun die Möglichkeit, mit Hilfe von Identitätsbeziehungen der klassischen Mechanik Operatoren zu bilden, die anderen mechanischen Größen zuzuordnen sind. So werden z. B. die Komponenten der Impulsmomente L_x, L_y, L_z der klassischen Mechanik durch

$$L_x = yp_z - zp_y \text{ usw.}$$

ausgedrückt. Den Operator L_x erhalten wir, indem wir hier y, z, p_y, und p_z durch entsprechende Operatoren nach (161,1) und (161,2) ersetzen:

$$L_x = \frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ usw.} \tag{161,3}$$

2*

Die kinetische Energie ist in der klassischen Mechanik mit den Impulskomponenten durch die Beziehung

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

verknüpft. Dieselbe Beziehung muß zwischen den entsprechenden Operatoren der Quantenmechanik gelten:

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \tag{161,4}$$

Um den Operator T zu entwickeln, müssen wir erst die Ausdrücke für die Operatoren p_x^2, p_y^2, p_z^2 finden. Entsprechend der Definition des Produkts von Operatoren erhalten wir

$$p_x^2\,\psi = p_x(p_x\psi) = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

und analoge Ausdrücke für p_y^2 und p_z^2. Der Operator der kinetischen Energie hat daher folgende explizite Form:

$$T = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\,. \tag{161,5}$$

Der Operator der Gesamtenergie (der HAMILTON-Funktion), der in der Quantenmechanik auch HAMILTON-Operator genannt wird (nicht zu verwechseln mit dem Operator ∇ der Vektoranalysis, der auch die Bezeichnung HAMILTON-Operator trägt!), kann jetzt sofort aufgestellt werden

$$H = T + U = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta + U(x, y, z) \tag{161,6}$$

der Operator U stellt die Multiplikation der ψ-Funktion mit U dar!).

Es sei bemerkt, daß wir zur Feststellung der Form des Operators diesen immer erst in Kartesischen Koordinaten aufstellen. Nachdem der Operator aber festgelegt ist, können wir zu beliebigen anderen Koordinaten übergehen. So können wir z. B. für den HAMILTON-Operator von dem in Kartesischen Koordinaten geschriebenen LAPLACEschen Operator Δ und der potentiellen Energie zu Zylinder-, Kugel- oder beliebigen anderen Koordinaten übergehen.

So erhalten wir für ein Teilchen im Zentralkraftfeld den Energieoperator in Polarkoordinaten, wenn wir in (161,6) den LAPLACEschen Operator Δ in Polarkoordinaten ansetzen (siehe Bd. I, § 124) und die potentielle Energie U als Funktion des Abstandes r vom Kraftzentrum aufstellen. Der Energieoperator hat dann die Form:

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} + U(r). \tag{161,6'}$$

Wir haben nun die Operatoren der Quantenmechanik mit den Zahlen zu verknüpfen, die wir bei Messungen der entsprechenden mechanischen Größen erhalten. Diesem Zweck dient das folgende Postulat (Postulat II).

Wenn man bei wiederholter Messung einer gewissen mechanischen Größe jedesmal eine und nur eine Zahl λ erhält, so sind der Operator F, der diese mechanische Größe darstellt, die Funktion ψ, die den Zustand, in dem sich das System befindet, charakterisiert, und die Zahl λ durch die Beziehung

$$F\psi = \lambda\psi \tag{161,7}$$

verknüpft. Und umgekehrt, wenn die Beziehung (161,7) gültig ist, erhalten wir jedesmal (d. h. mit Gewißheit) bei der Messung der mechanischen Größe F im Zustand ψ die Zahl λ.

Es befinde sich z. B. unser Teilchen in einem durch die Funktion ψ_i beschriebenen Zustand, in dem ψ_i der Gleichung

$$H\psi_i = E_i\psi_i$$

genügt. Diese Gleichung zeigt, daß ψ_i die dem Eigenwert E zugehörige Eigenfunktion des Operators H ist. Auf der Grundlage des oben formulierten Postulats behaupten wir, das unter dieser Bedingung die Messung der Energie jedesmal den Wert E_i ergeben muß (natürlich innerhalb der Meßfehlergrenze).

Der Vorbehalt, der sich auf den Zustand bezog, in dem bei den Messungen sich nur eine Zahl ergibt, ist sehr wichtig, da, wie wir weiter unten sehen werden, Mikrosysteme sich auch in Zuständen befinden können, in denen das Resultat der Messungen nicht eine Zahl ist, sondern mehrere verschiedene Zahlen, und zwar jede mit der ihr zukommenden Wahrscheinlichkeit.

Wir sehen jetzt, daß die Funktion ψ_i, die die Gleichung (161,7) befriedigt, die *Eigenfunktion* des Operators F ist und λ_i — der ihr zugeordnete Eigenwert. Hierdurch ist die gesuchte Verknüpfung zwischen Operatoren und Zahlen, die sich aus der Messung mechanischer Größen ergeben, hergestellt. In unserem Postulat heißt es nämlich, daß das Spektrum von Eigenwerten eines Operators mit der Gesamtheit der Werte zusammenfällt, die man im Experiment bei der Messung der entsprechenden mechanischen Größen erhält.

Um sich von der Widerspruchslosigkeit des aufgestellten Postulats zu überzeugen, müssen wir vor allem feststellen, ob die λ_i reelle Zahlen sind, denn das Ergebnis einer Messung jeder beliebigen physikalischen Größe muß in reellen Zahlen ausdrückbar sein. In § 155 sahen wir, daß dieser Forderung die linearen *selbstadjungierten* Operatoren gerecht werden. Die unabhängige Variable aber und der Operator $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ (wobei x eine beliebige unabhängige Variable ist) sind selbstadjungiert (siehe § 156). Demzufolge sind es auch die Operatoren der Koordinaten und Impulskomponenten. Mit Hilfe von § 156 kann man leicht zeigen, daß der Energieoperator H und auch die Operatoren der Komponenten des Impulsmomentes selbstadjungiert sind. Somit haben die Operatoren der Quantenmechanik in der Tat reelle Eigenwerte.

Übungen:

1. Es ist zu zeigen, daß der Energieoperator H selbstadjungiert ist.
2. Es ist zu zeigen, daß die Operatoren der Komponenten des Impulsmomentes selbstadjungier sind. (Hinweis: Man benutze die allgemeinen Sätze, die in den Übungen zu § 154 bewiesen wurden).

§ 162. Quantelung

In den vorangegangenen Kapiteln dieses Buches sahen wir, daß die geschichtliche Entwicklung der Atommechanik anfangs zur Formulierung des grundlegenden Bohrschen Postulats führte, nach dem die Energie eines Atomsystems nur diskrete Werte annehmen kann.

Ferner war man bei der Lösung konkreter Probleme gezwungen, andere Postulate zu formulieren, die eine Auswahl der Quantenwerte mechanischer Größen ermöglichten (die Postulate von BOHR-SOMMERFELD, siehe Bd. I, § 106). Unsere neuen Postulate sind beträchtlich weit- und tiefgehender als diese speziellen Postulate, denn erstens weisen sie ein *einheitliches Prinzip* auf, auf dessen Grundlage die Gesamtheit aller möglichen Werte einer beliebigen mechanischen Größe aufzusuchen ist. Zweitens geht aus diesen Postulaten unmittelbar hervor, welche mechanischen Größen unter bestimmten Bedingungen eine kontinuierliche und welche eine diskrete Wertenfolge annehmen können. Die Antwort auf diese Frage ergibt sich von selbst bei der Lösung einer mathematischen Aufgabe — der Bestimmung von Eigenfunktionen dieses oder jenes Operators. Wenn sich dabei erweist, daß das Spektrum der Eigenwerte diskret ist, so ist die entsprechende mechanische Größe *gequantelt*, d. h., man erhält bei ihrer Messung eine diskrete Zahlenfolge.

Wir wollen dies mit einem Beispiel veranschaulichen und untersuchen den Energieoperator (den HAMILTON-Operator) H. Die Gleichung zur Bestimmung der Eigenfunktionen lautet in diesem Falle:

$$H\psi = E\psi\,, \tag{162,1}$$

wobei E Eigenwerte sind, die den Eigenfunktionen des Operators H entsprechen (wir schreiben in diesem Falle E an Stelle der allgemeinen Bezeichnung λ, von der wir bis jetzt Gebrauch machten). Wie bekannt, ist der Operator H

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta + U\,.$$

Danach hat die Gleichung (162,1) folgende explizite Form

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi = E\psi\,. \tag{162,2}$$

Das aber ist die uns aus dem XI. Kapitel des I. Bandes bekannte SCHRÖDINGER-Gleichung. Somit stellt sich heraus, daß die Aufgaben, die wir im vorigen Kapitel lösten, Aufgaben zur Bestimmung der Eigenwerte des *Energieoperators* sind. Diese Eigenwerte bilden, wie wir sahen, in vielen Fällen wirklich eine diskrete Zahlenfolge, d. h., es liegt eine Quantelung vor. So ist z. B. für den linearen harmonischen Oszillator, d. h. für den Fall, in dem (siehe Bd. I, § 149)

$$U = \frac{fx^2}{2}\,,\quad H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{fx^2}{2} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2} + 2\pi^2 m\nu_0^2 x^2$$

ist, die Gleichung für die Energieeigenwerte

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\pi^2 m\nu_0^2 x^2\psi = E\psi$$

oder

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - 2\pi^2 m\nu_0^2 x^2\right)\psi = 0\,.$$

Dies aber ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für den linearen harmonischen Oszillator, mit deren Lösung wir uns im § 149 des ersten Bandes beschäftigten. Wir zeigten dort, daß die

Funktion $\psi(x)$, die diese Gleichung befriedigt, den Standardbedingungen nur dann entspricht, wenn die Energie E die diskrete Wertfolge

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

annimmt. Diese *gequantelten* Energiewerte E_n sind somit die Eigenwerte des Operators H.

Jetzt können wir auch erläutern, warum für die Operatoren p_x, p_y, p_z die Darstellung (161,2) gewählt wurde. Schreiben wir die SCHRÖDINGER-Gleichung in folgende, mit (162,2) identische Form um

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + U\psi = E\psi \qquad (162,3)$$

und stellen diese der aus der klassischen Mechanik bekannten Beziehung

$$T + U = E$$

oder, in expliziter Form,

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U = E \qquad (162,4)$$

gegenüber. Die linke Seite der SCHRÖDINGER-Gleichung (162,3) ist das Resultat der Anwendung des Energieoperators

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + U \qquad (162,5)$$

auf die Funktion ψ. Ein Vergleich von (162,4) und (162,5) zeigt, daß die SCHRÖDINGER-Gleichung als quantenmechanisches Anologon zur klassischen Energiebeziehung (162,4) gedeutet werden kann, wenn man für p_x den Ausdruck $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ usw. wählt.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung wurde bereits vor der Aufstellung des Systems der Quantenmechanik entdeckt und bewies schon damals ihre wunderbare Fruchtbarkeit. Es war daher nur zu natürlich, gerade die Form der Operatoren zu wählen, die sich schon in dieser Gleichung bewährte.

§ 163. Das freie Teilchen

Ein lehrreiches Beispiel für *kontinuierliche Spektren* von Eigenwerten ist ein freies Teilchen. Da die Bewegung solch eines Teilchens eindimensional ist, können wir das Koordinatensystem derart wählen, daß die ψ-Funktion nur von einer Koordinate abhängt, z. B. nur von x. Der Energieoperator ist in diesem Falle ($U = 0$)

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2}.$$

Für die Eigenwerte von H haben wir daher folgende Gleichung:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi. \tag{163,1}$$

Die partikulären Lösungen dieser Gleichung

$$\psi_{1,2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} \tag{163,2}$$

genügen den Standardbedingungen dann und nur dann, wenn $E > 0$ ist (siehe § 155, Beispiel 2). Ist allerdings diese Bedingung erfüllt, so kann E beliebige, sich stetig ändernde Werte haben: Der Energieoperator eines freien Teilchens hat ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten. Daraus folgt, daß die Energie eines freien Teilchens beliebige, sich stetig ändernde Werte annehmen kann.

Es ist allerdings klar, daß beiden Eigenfunktionen nur ein Wert der Energie E entspricht. Das zeigt, daß wir es im gegebenen Falle mit einer Entartung zu tun haben, und zwar mit einer zweifachen Entartung. Untersuchen wir nun, ob sich nicht die Eigenfunktionen (163,2) des Energieoperators gleichzeitig als Eigenfunktionen des Operators der Impulskomponente erweisen und welchen Eigenwerten p_x sie entsprechen. Wenden wir den Operator

$$p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$$

nacheinander auf die Funktionen ψ_1 und ψ_2 an, so erhalten wir

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} e^{i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} = \sqrt{2mE}\, e^{i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} = p_x\psi_1,$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} e^{-i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} = -\sqrt{2mE}\, e^{-i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} = -p_x\psi_2.$$

Wir sehen, daß die Funktionen ψ_1 und ψ_2 Eigenfunktionen des Impulsoperators sind, daß aber, entsprechend den beiden möglichen Bewegungsrichtungen, der einen von ihnen der Eigenwert $+p_x$, der anderen aber $-p_x$ entspricht.

Da die Eigenfunktionen des *Energie*operators entartet sind, erweist sich jede beliebige Linearkombination dieser Funktionen ebenfalls als Eigenfunktion des Operators H mit demselben Eigenwert (siehe § 158). Unter diesen Linearkombinationen gibt es auch solche, die zu den reellen Funktionen Cosinus und Sinus führen:

$$\psi' = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} + e^{-i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x}\right) = \cos\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x, \tag{163,3}$$

$$\psi'' = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x} - e^{-i\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x}\right) = \sin\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,x. \tag{163,4}$$

Man kann sich jedoch durch direkte Prüfung leicht davon überzeugen, daß die Gleichung für die Eigenfunktionen des Impulsoperators *nicht* durch die reellen Funktionen (163,3) und

(163,4) *befriedigt* wird, sondern nur durch die komplexen Funktionen (163,2). Dieses Beispiel veranschaulicht auf einfachste Weise, daß die Wellenfunktion ψ im allgemeinen eine *komplexe* Funktion ist.

Es sei weiter darauf hingewiesen, daß die Impulskomponente keinen bestimmten Wert in dem Zustand hat, der durch die reelle Funktion ψ [z. B. (163,3)] beschrieben wird, da die letztere nicht eine Eigenfunktion des Operators der Impulskomponente ist.

Die Existenzmöglichkeit von Zuständen, in denen diese oder jene mechanische Größe keinen bestimmten Wert besitzt, ist eine der charakteristischsten Besonderheiten der Quantenmechanik. Wie wunderlich diese Besonderheit auch erscheinen mag, man darf nicht vergessen, daß sie sich schon aus dem Prinzip der Superposition ergibt, ohne welches die Interferenz von Teilchen nicht zu erklären ist, und daß ihr letzten Endes also die dualistische Natur der Mikroteilchen zugrunde liegt.

Betrachten wir jetzt noch eine wichtige Eigenschaft der Eigenfunktionen mit kontinuierlichem Spektrum. Die Funktionen $e^{i\frac{2\pi}{h}p_x x}$ genügen der Endlichkeitsbedingung für alle Werte x von $-\infty$ bis $+\infty$, sie genügen aber nicht der Forderung nach quadratischer Integrierbarkeit, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\psi^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{h}p_x x} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{h}p_x x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx = \infty .$$

Daraus folgt, daß man diese Funktionen nicht nach dem üblichen Verfahren normieren kann.

Es stellt sich heraus, daß diese Schwierigkeit in allen den Fällen auftritt, in denen der Operator ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten hat.

Dieser Unterschied zwischen Eigenfunktionen kontinuierlicher und diskreter Spektren ist sehr charakteristisch. Im Falle eines diskreten Spektrums haben wir eine Reihe von Funktionen, die man durchgehend numerieren kann, ψ_1, $\psi_2, \ldots$, und eine ihnen entsprechende diskrete Reihe von Eigenwerten λ_1, λ_2, ... Im Falle eines kontinuierlichen Spektrums jedoch hängt die Eigenfunktion $\psi(x, \lambda)$ von einem sich stetig ändernden Parameter λ ab [siehe z. B. Formel (163,2), in der als ein solcher sich stetig ändernder Parameter $p = \sqrt{2mE}$ auftritt]. Eine solche Funktion kann für einen *bestimmten* Wert von λ nicht den Funktionen eines diskreten Spektrums gegenübergestellt werden. Das entspricht der Tatsache, daß eine unbegrenzte Welle, die durch die Formel (163,2) beschrieben wird, eine mathematische Abstraktion ist, ähnlich der einer streng monochromatischen Welle. Eine reale quasimonochromatische Welle jedoch (siehe Bd. I, § 70) ist eine Art Wellenpaket, das durch Superposition monochromatischer Wellen, deren Frequenzen sich stetig in einem gewissen Intervall $\Delta\nu$ ändern, entsteht. Ähnlich hat man es unter realen physikalischen Bedingungen niemals mit Teilchen zu tun, deren Lage im Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ unbestimmt ist. Man kann vielmehr behaupten, daß sich das Teilchen irgendwo auf einem Abschnitt endlicher Länge aufhält. Die Wellenfunktion, die das Verhalten eines solchen Teilchens beschreibt, ist im Raum begrenzt. Eine solche Welle kann man als Resultat der Superposition einer Reihe unbegrenzter Wellen erhalten, die außerhalb der Grenzen eines bestimmten Abschnittes infolge der Interferenz einander auslöschen. Eine solche Welle ist also ein Wellenpaket. Mathematisch wird ein derartiges Paket durch ein Integral dar-

gestellt, das sich über das kleine Intervall $\Delta\lambda$ des Parameters λ erstreckt:

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \psi(x, \lambda)\, d\lambda .$$

Wie sich herausstellt, verhalten sich solche Integrale genauso wie die Eigenfunktionen eines diskreten Spektrums; sie sind zueinander orthogonal, und man kann sie nach dem üblichen Verfahren normieren.

Wegen der beträchtlichen Schwierigkeiten, die bei Fragen auftreten, die kontinuierliche Spektren der Eigenwerte betreffen, wollen wir uns auf diese Bemerkungen beschränken und uns weiterhin nur mit Fällen beschäftigen, in denen diskrete Spektren auftreten.

Übung:

Unter der Annahme, daß ψ eine Funktion aller drei Koordinaten x, y, z ist, soll das Problem des freien Teilchens gelöst werden. Es ist zu zeigen, daß die Eigenfunktionen des Energieoperators in diesem Fall folgende sind:

$$\psi = e^{\pm i \frac{2\pi}{h}(x p_x + y p_y + z p_z)} .$$

(Hinweis: Zur Separierung der Variablen in der sich ergebenden partiellen Differentialgleichung ist das in Bd. I, § 152, beschriebene Verfahren anzuwenden.)

§ 164. Die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Werte mechanischer Größen

Wir haben gesehen, daß in Fällen, in denen die den Zustand des Systems kennzeichnende Funktion ψ Eigenfunktion des Operators irgendeiner mechanischen Größe ist, diese Größe einen bestimmten Wert hat (der gleich dem Eigenwert des Operators ist). Wie wir jedoch im vorigen Paragraphen feststellten, kann es geschehen, daß ψ nicht eine Eigenfunktion des uns interessierenden Operators ist, oder es kann vorkommen, daß ψ die Eigenfunktion des Operators einer dynamischen Veränderlichen ist, nicht aber des Operators einer anderen dynamischen Veränderlichen. In denjenigen Fällen, in denen die Funktion ψ *nicht* eine Eigenfunktion des Operators ist, hat die entsprechende mechanische Größe keinen bestimmten Wert. Diese Behauptung in ihrer allgemeinen Form folgt bereits aus dem Prinzip der Superposition (§ 160). Betrachten wir eine gewisse mechanische Größe, die durch den Operator F dargestellt wird. Es seien ψ_1 und ψ_2 Eigenfunktionen dieses Operators, die den Eigenwerten λ_1 und λ_2 entsprechen, wobei $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (ohne Entartung):

$$F\psi_1 = \lambda_1 \psi_1 , \quad F\psi_2 = \lambda_2 \psi_2 .$$

In unserem Postulat II wird behauptet, daß dann im Zustand ψ_1 die mechanische Größe F mit Gewißheit den *bestimmten Wert* λ_1 und im Zustand ψ_2 den *bestimmten Wert* λ_2 hat. Wenn sich aber das System in den Zuständen ψ_1 und ψ_2 befinden kann, so kann es sich nach dem Superpositionsprinzip auch im Zustand ψ befinden, der durch die lineare Superposition der Funktionen ψ_1 und ψ_2 beschrieben ist:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 .$$

Es ist nun leicht zu erkennen, daß diese Funktion *keine* Eigenfunktion des Operators F ist, denn

$$F\psi = F(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1 F\psi_1 + c_2 F\psi_2 = c_1 \lambda_1 \psi_1 + c_2 \lambda_2 \psi_2 .$$

Wir sehen, daß die Beziehung $F\,\psi = \lambda\,\psi$ in dem vorliegenden Falle *nicht gilt*. Das bedeutet aber, daß die Funktion ψ *nicht* Eigenfunktion des Operators F ist. Indem wir das Postulat II erweitern, können wir behaupten, daß, wenn sich ein System im Zustand befindet, der durch die Wellenfunktion ψ, die eine Superposition von Eigenfunktionen des Operators F ist, beschrieben wird, die entsprechende mechanische Größe *in diesem Zustand* keinen bestimmten Wert hat. Das bedeutet: Wenn wir uns eine sehr große Anzahl identischer Systeme vorstellen, die sich alle im gleichen, durch die Funktion ψ beschriebenen Zustand befinden, und in jedem dieser Systeme die mechanische Größe F messen, so erhalten wir allgemein verschiedene Zahlen — entweder die Zahl λ_1 oder λ_2. Sind jedoch die Messungen an einer genügend großen Anzahl von Systemen unternommen worden, so kann man feststellen, daß eine bestimmte statistische Verteilung dieser Werte auftritt, d. h., daß die Zahl der Fälle, in denen das Resultat der Messung λ_1 ist, einen bestimmten Prozentsatz der Gesamtzahl der Messungen ausmacht; dasselbe gilt für die Zahl der Fälle, in denen das Meßergebnis λ_2 ist. Mit anderen Worten, im betrachteten Falle kann man der mechanischen Größe F keinen bestimmten Wert *mit Gewißheit* zuschreiben, man kann aber die *Wahrscheinlichkeit* dafür angeben, daß das Meßresultat *entweder* λ_1 *oder* λ_2 ist. Die Quantenmechanik ermöglicht es, diese Wahrscheinlichkeiten auszurechnen.

Somit seien die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators F einer gewissen dynamischen Veränderlichen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Wie schon aus den Bezeichnungen hervorgeht, nehmen wir dabei an, daß der Operator ein diskretes Spektrum von Eigenwerten hat. Befindet sich das System in einem durch die Funktion ψ, die keine Eigenfunktion des Operators F ist, gekennzeichneten Zustand, so müssen sich bei der Messung der Größe F verschiedene Zahlen ergeben, die aber zu der Reihe der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gehören, da nach dem Postulat der Quantenmechanik das Eigenwertspektrum ja gerade die Gesamtheit der Zahlen angibt, die man bei der Messung der entsprechenden mechanischen Größe erhält. Berechnen wir den Mittelwert von F im Zustand ψ. Wenn die Funktion ψ normiert ist, so ist, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, der Mittelwert von F gleich

$$\overline{F} = \int \psi^* F \psi \, d\tau. \tag{164,1}$$

Wir entwickeln nun die Funktion ψ nach den Eigenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ des Operators F (es wird angenommen, daß alle diese Funktionen ebenfalls normiert sind):

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_n\psi_n + \ldots \equiv \sum_k c_k \psi_k .$$

Setzen wir dies in (164,1) ein, so erhalten wir

$$\overline{F} = \int (c_1^*\psi_1^* + c_2^*\psi_2^* + \ldots + c_n^*\psi_n^* + \ldots)\, F\, (c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_n\psi_n + \ldots)\, d\tau .$$

Beachtet man, daß $F\,\psi_n = \lambda_n\,\psi_n$ ist, so ergibt sich nach Umformung

$$\overline{F} = c_1^* c_1 \lambda_1 \int \psi_1^* \psi_1 d\tau + c_1^* c_2 \lambda_2 \int \psi_1^* \psi_2 d\tau + \ldots + c_k^* c_l \lambda_l \int \psi_k^* \psi_l d\tau + \ldots .$$

Wegen der Orthogonalität und Normierung sind alle Integrale für $k \neq l$ gleich Null und für $k = l$ gleich 1. Folglich ist

$$\overline{F} = |c_1|^2 \lambda_1 + |c_2|^2 \lambda_2 + \ldots + |c_n|^2 \lambda_n + \ldots . \tag{164,2}$$

Wenn wir nun die Normierungsbedingung der Funktion ψ auswerten, so ergibt sich auf analoge Weise:

$$1 = \int \psi^* \psi \, d\tau = \int (c_1^* \psi_1^* + \dots + c_n^* \psi_n^* + \dots) \, (c_1 \psi_1 + \dots + c_n \psi_n + \dots) \, d\tau =$$

$$= |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 + \dots . \qquad (164,3)$$

Eine Gegenüberstellung von (164,2) und (164,3) zeigt, daß folgende Umschreibung möglich ist:

$$\overline{F} = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n + \dots ; \; (w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots = 1),$$

wobei $w_1 = |c_1|^2$, $w_2 = |c_2|^2$ usw. Hieraus ist zu ersehen, daß die Quadrate der absoluten Beträge der Entwicklungskoeffizienten, die bei der Reihenentwicklung der Funktion ψ nach den Eigenfunktionen des Operators F auftreten, die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, daß man bei der Messung der mechanischen Größe F die Werte λ_1, $\lambda_2, \dots$ erhält.

§ 165. Mittelwerte

Wir sahen, daß die in der klassischen (makroskopischen) Mechanik übliche Behauptung, „diese gewisse mechanische Größe hat einen bestimmten Wert“ in der Quantenmechanik nur dann einen Sinn hat, wenn die Funktion ψ eine der Eigenfunktionen des Operators ist, der der gegebenen mechanischen Größe entspricht. Ist ψ keine Eigenfunktion, so hat die mechanische Größe keinen bestimmten Wert; man kann aber immer die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Werte, die das Spektrum der Eigenwerte ihres Operators bilden, ausrechnen. Zur Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeiten ist die Funktion ψ in eine Reihe nach den Eigenfunktionen des gegebenen Operators $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ zu entwickeln. Die Quadrate der absoluten Beträge der Entwicklungskoeffizienten $|c_1|^2$, $|c_2|^2, \dots, |c_n|^2$ sind dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

Ist jedoch die den Zustand des Systems beschreibende Wellenfunktion bekannt, so gestattet die Quantenmechanik, auch die *Mittelwerte* aller mechanischen Größen voraus zu berechnen, ohne erst zu der Berechnung der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werte greifen zu müssen.

Bevor wir zur Betrachtung dieses Rechenverfahrens übergehen, ist es zweckmäßig festzustellen, in welchem Sinne in der Quantenmechanik vom „Mittelwert“ der einen oder anderen mechanischen Größe gesprochen werden kann. Wir erinnern daran, daß der Ausdruck „Mittelwert“ überhaupt zweierlei Bedeutung hat. Unternehmen wir z. B. eine Längenmessung, so zeigen die Ergebnisse, wie genau die Messung auch ausgeführt werden mag, eine gewisse Streuung, die durch die zufälligen Meßfehler bedingt ist. Um die Zahl zu bekommen, die von der gemessenen Länge am wenigsten abweicht, bilden wir das Mittel aus allen Messungen. In diesem Falle existiert die durch den Mittelwert gekennzeichnete Größe, sie ist uns jedoch nicht bekannt. In anderen Fällen charakterisiert der Ausdruck „Mittelwert“ ein gewisses Kennzeichen eines *statistischen Kollektivs*, wie z. B. die mittlere Größe einer bestimmten Gruppe von Menschen o. ä. In der Quantenmechanik gebraucht man den Ausdruck „Mittelwert“ gerade in dieser zweiten Bedeutung. Genauer gesagt wird der Ausdruck „Mittelwert“ in der Quantenmechanik im Sinne der „mathematischen Erwartung“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt.

Wenden wir uns nun der Mittelwertsberechnung zu.

Um das „Rezept" dieser Berechnung aufzufinden, beginnen wir mit der Bestimmung des Mittelwertes der Koordinate x (dasselbe trifft natürlich auch auf jede andere Koordinate zu). Da $\psi\psi^* dx$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, ein Teilchen mit der Koordinate zwischen x und $x + dx$ anzutreffen, ist der Mittelwert der Koordinate gegeben zu

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^* \psi \, dx, \qquad (165,1)$$

wenn die Funktion ψ normiert ist, d. h., wenn

$$\int \psi^* \psi \, dx = 1.$$

Wenn wir x als Operator ansehen, können wir die Formel (165,1) wie folgt darstellen

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \, x \, \psi \, dx. \qquad (165,2)$$

Wenden wir uns nun dem Fall zu, in dem der Operator sowohl von der Koordinate als auch vom Impuls abhängt. Der Energieoperator eines Teilchens, das eine eindimensionale Bewegung ausführt, ist

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x). \qquad (165,3)$$

Hier ist das erste Glied der Operator der kinetischen Energie, den man wie folgt darstellen kann

$$T = \frac{1}{2m}\left(-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{d^2}{dx^2}\right) = \frac{p^2}{2m}. \qquad (165,4)$$

Das zweite Glied ist der Operator der potentiellen Energie. Ist ψ_i die Eigenfunktion des Energieoperators, die dem Eigenwert E_i entspricht, so ist

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + U\psi_i = E_i\psi_i. \qquad (165,5)$$

Wir multiplizieren nun (165,5) von links her mit ψ_i^* und integrieren über alle Werte von x:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \left(-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2}\right) \psi_i \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \, U \psi_i \, dx = E_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \, \psi_i \, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich 1 (Normierungsintegral). Das zweite Glied auf der linken Seite ist der Mittelwert der potentiellen Energie, da die potentielle Energie eine Funktion von x ist. Beachten wir dies alles, so können wir unter Berücksichtigung

von (165,4) schreiben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* T \psi_i \, dx + \overline{U} = E_i .$$

Da aber in unserem Falle ψ_i die Eigenfunktion des Energieoperators ist, die dem bestimmten Energiewert E_i entspricht, so muß $\overline{T} + \overline{U} = E_i$ sein, und demzufolge ist

$$\overline{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* T \psi \, dx .$$

Wir sehen, daß sich der Mittelwert der kinetischen Energie nach genau derselben Regel errechnet wie der der Koordinate. Der Mittelwert der Gesamtenergie ist daher

$$\overline{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left[T(p) + U(x) \right] \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* H \psi \, dx .$$

Wenn, wie in dem vorliegenden Fall, ψ die Eigenfunktion des Energieoperators ist, so ist $H\psi = E\psi$ und

$$\overline{E} = \int \psi^* H \psi \, dx = E \int \psi^* \psi \, dx = E ,$$

d. h., wie zu erwarten war, ist der Mittelwert gleich dem bestimmten Wert im gegebenen Zustand. Die von uns aufgefundene Regel kann aber auch auf den Fall verallgemeinert werden, in dem ψ *nicht* eine Eigenfunktion von H ist, und darin liegt natürlich ihr eigentlicher Sinn. Demzufolge ist allgemein

$$\overline{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* H(p, x) \psi \, dx .$$

Schließlich, für den ganz allgemeinen Fall, in dem der Operator F eine Funktion mehrerer Koordinaten $q_1, q_2, \ldots$ und Impulse $p_1, p_2, \ldots$ ist, errechnet sich der Mittelwert für einen Zustand, der durch eine normierte Wellenfunktion beschrieben wird, nach der Formel

$$\overline{F} = \int \psi^* F(q, p) \psi \, dq , \tag{165,6}$$

wo mit q und p der Kürze halber die Gesamtheit aller Koordinaten und aller Impulse bezeichnet wird und $dq = dq_1, dq_2, \ldots$ ist; die Integration erstreckt sich über alle möglichen Werte der Koordinaten.

Es ist offensichtlich, daß der Mittelwert unbedingt eine reelle Zahl sein muß, da der im Experiment erhaltene Mittelwert ja das Ergebnis von Messungen an realen physikalischen Größen ist. Wir müssen uns daher überzeugen, daß das nach (165,6) errechnete $\overline{F}$ dieser Forderung gerecht wird. Zu diesem Zwecke schreiben wir nach (165,6) den Mittelwert der konjugiert komplexen Größe F^* hin:

$$\overline{F^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left[F(q, p) \psi \right]^* dq . \tag{165,7}$$

Da aber der Operator F selbstadjungiert ist, sind die rechten Seiten der Gleichungen (165,6) und (165,7) einander gleich und daher ist

$$\overline{F^*} = \overline{F},$$

$\overline{F}$ ist also eine reelle Größe.

Die Formel (165,6) darf man nur dann zur Mittelwertbestimmung benutzen, wenn die Funktion ψ zu 1 normiert ist. Ist ψ nicht normiert, so muß man die allgemeinere Formel

$$\overline{F(q, p)} = \frac{\int \psi^* F(q, p)\, \psi\, dq}{\int \psi^* \psi\, dq} \tag{165,8}$$

heranziehen. Aus dieser Formel geht unter anderem folgende bereits erwähnte (§ 160) Tatsache hervor: Beschreibt die Funktion ψ irgendeinen Zustand, so beschreibt die Funktion $c\psi$, wo c eine Konstante ist, den gleichen Zustand. Tatsächlich folgt aus der Formel (165,8), daß die Mittelwerte aller mechanischen Größen in beiden Zuständen gleich sind.

Fassen wir jetzt das in den beiden letzten Paragraphen Gesagte zusammen. In der klassischen Physik können wir die Bewegung immer allseitig beschreiben, indem wir gleichzeitig bestimmte Werte aller mechanischen Größen angeben — der Koordinaten, Impulse (Geschwindigkeiten), Impulsmomente, Energie. In der Quantenmechanik kann es vorkommen, daß mechanische Größen keine bestimmten Werte haben. Ist aber die Wellenfunktion, die den Zustand beschreibt, bekannt, so können wir mit Hilfe von Operatoren die *Mittelwerte* aller mechanischen Größen und ebenso die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Werte errechnen. Wir können also auch in der Quantenmechanik die Bewegung allseitig beschreiben, allerdings nur *statistisch*. Das entspricht vollkommen der Auffassung, daß die Quantenmechanik im Grunde genommen eine statistische Theorie ist.

§ 166. Beispiele zur Berechnung von Mittelwerten

Als Beispiel berechnen wir die Mittelwerte von x und p, x^2 und p^2 für den linearen harmonischen Oszillator im Grundzustand. Die normierte Wellenfunktion dieses Zustandes kennen wir bereits (siehe Bd. I, § 150):

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{a^{1/2}}{\pi^{1/2}}}\, e^{-\frac{ax^2}{2}},$$

wobei

$$a = \frac{4\pi^2 m \nu_0}{h}.$$

Wir erhalten

$$\overline{x} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2}\, dx = 0$$

(alle Integrale der Art $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-ax^2}\, dx$ sind gleich Null, weil die zu integrierende Funktion

ungerade ist). Ferner ist

$$\overline{p} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{ax^2}{2}}\right)dx = -\frac{h}{2\pi i}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,a\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2}\,dx = 0\,.$$

Somit sind in diesem Falle $\overline{x}$ und $\overline{p}$ gleich Null, wie auch aus Symmetriegründen zu erwarten war.

Wenden wir uns nun der Berechnung von $\overline{x^2}$ und $\overline{p^2}$ zu. Dabei werden wir, ebenso wie bei der Lösung der Übungen zu diesem Paragraphen, Integrale des Typs

$$I_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}\, e^{-ax^2}\,dx \tag{166,1}$$

antreffen. Diese Integrale können leicht berechnet werden, wenn man von dem Integral

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ausgeht (siehe Anhang VII am Ende dieses Bandes). Sie sind gleich

$$I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}}\,, \tag{166,2}$$

so daß

$$I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\,,\quad I_4 = \frac{1\cdot 3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \quad \text{usw.} \tag{166,3}$$

Wenden wir dies an, so finden wir

$$\overline{x^2} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,I_2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = \frac{1}{2a} = \frac{h}{8\pi^2 m\nu_0} = \frac{\frac{1}{2}h\nu_0}{4\pi^2 m\nu_0^2} = \frac{E_0}{f} \tag{166,4}$$

— ein Resultat, das mit dem in § 150 auf nicht exakte Weise errechneten übereinstimmt. Ferner ist

$$\overline{p^2} = -\frac{h^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}}\frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx = -\frac{h^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\left(a^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx - a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx\right) \equiv$$

$$\equiv -\frac{h^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,(a^2 I_2 - aI_0) = \frac{h^2}{8\pi^2}a = \frac{h\nu_0}{2}m = E_0 m\,,$$

also wieder ein Resultat, das wir bereits in § 150 fanden.

Berechnen wir jetzt die Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie:

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{2}f\,\overline{x^2} = \frac{1}{2}f\frac{E_0}{f} = \frac{1}{2}E_0\,,$$

$$\overline{T}_0 = \frac{\overline{p^2}}{2m} = \frac{E_0 m}{2m} = \frac{1}{2} E_0,$$

d. h., die mittlere potentielle Energie ist, wie auch in der klassischen Mechanik, gleich der mittleren kinetischen Energie. Schließlich ist auch

$$\overline{E}_0 = \overline{T}_0 + \overline{U}_0 = E_0,$$

was zu erwarten war, da der Nullzustand ein Zustand mit bestimmter Energie ist.

Übungen:

1. Unter Anwendung der normierten Eigenfunktionen des linearen harmonischen Oszillators für verschiedene Quantenzustände (Bd. I, § 150, und Anhang VI) sind $\overline{x^2}$ und $\overline{p^2}$ für $n = 1$ und $n = 2$ zu berechnen.
2. Es ist zu zeigen, daß in dem einen wie in dem anderen Falle der Übung 1

$$\overline{U} = \overline{T}$$

ist.
3. Es ist zu beweisen, daß

$$\overline{E}_1 = \overline{U}_1 + \overline{T}_1 = \frac{3}{2} h\nu_0 = E_1,$$

$$\overline{E}_2 = \overline{U}_2 + \overline{T}_2 = \frac{5}{2} h\nu_0 = E_2.$$

4. Gelten in den besprochenen Fällen die Beziehungen

$$\overline{x^2} = (\overline{x})^2, \quad \overline{x^4} = (\overline{x^2})^2 ?$$

§ 167. Gemeinsame Eigenfunktionen

Wir wollen nun die Frage untersuchen, unter welchen Bedingungen zwei oder mehrere mechanische Größen gleichzeitig bestimmte Werte haben. Zwei mechanische Größen F und G haben dann bestimmte Werte, wenn sie in Zuständen ermittelt werden, die durch Eigenfunktionen der Operatoren F und G beschrieben sind. Es ist klar, daß diese Größen *gleichzeitig* bestimmte Werte haben, wenn der Zustand durch eine Funktion ψ beschrieben wird, die sowohl eine Eigenfunktion des einen als auch des anderen Operators, also eine *gemeinsame* Eigenfunktion ist.

Als Beispiel betrachten wir die Impulskomponenten längs der Kartesischen Koordinatenachsen. Ihre Operatoren sind

$$p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Die Eigenfunktionen dieser Operatoren befriedigen die Gleichungen

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x} = p_x\psi, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial y} = p_y\psi, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial z} = p_z\psi.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktion

$$\psi = e^{i \frac{2\pi}{h}(xp_x + yp_y + zp_z)}$$

alle drei Gleichungen befriedigt, d. h., daß sie die gemeinsame Eigenfunktion der Operatoren p_x, p_y, p_z ist. Das aber zeigt, daß *die Impulsprojektionen auf die drei Koordinatenachsen gleichzeitig bestimmte Werte haben können.*

Es existiert nun ein Kriterium, das darüber zu entscheiden erlaubt, ob die gegebenen Operatoren gemeinsame Eigenfunktionen besitzen oder nicht. Haben nämlich die Operatoren gemeinsame Eigenfunktionen, so sind sie kommutativ. Das wollen wir beweisen.

Es sei ψ eine gemeinsame Eigenfunktion der Operatoren F und G, also

$$F\psi = \lambda\psi \quad \text{und} \quad G\psi = \mu\psi .$$

Wir haben dann

$$FG\psi = F(G\psi) = \mu F\psi = \mu\lambda\psi ,$$

$$GF\psi = G(F\psi) = \lambda G\psi = \lambda\mu\psi .$$

Daraus folgt, daß

$$FG\psi = GF\psi$$

oder symbolisch

$$FG = GF .$$

Auch die Umkehrung dieses Theorems gilt: Sind die Operatoren kommutativ, so haben sie gemeinsame Eigenfunktionen. Wir werden das für den Fall zeigen, in dem jedem Eigenwert eine Eigenfunktion entspricht (Entartung ausgeschlossen).[1]

Es seien ψ und λ entsprechend Eigenfunktion und Eigenwert des Operators F, so daß

$$F\psi = \lambda\psi . \tag{167,1}$$

Außerdem nehmen wir an, daß der Operator F mit dem Operator G kommutiert ist, also

$$FG = GF . \tag{167,2}$$

Nach der Bedingung (167,2) ist

$$FG\psi = GF\psi = G(F\psi) = \lambda(G\psi) .$$

Wenn wir den Anfang und das Ende dieser Reihe von Gleichungen einander gegenüberstellen, so sehen wir, daß

$$F(G\psi) = \lambda(G\psi) .$$

Das bedeutet, daß $G\psi$ Eigenfunktion des Operators F ist, die dem Eigenwert λ entspricht. Bedingungsgemäß ist aber ψ auch die demselben Eigenwert entsprechende Eigenfunktion von F, d. h., die Funktionen ψ und $G\psi$ beschreiben ein- und denselben Zustand. Das aber kann nur dann der Fall sein (siehe § 160), wenn sich $G\psi$ von ψ nur durch einen konstanten Multiplikator, z. B. μ, unterscheidet,

$$G\psi = \mu\psi .$$

[1]) Den Beweis für den allgemeinen Fall siehe W. A. Fock, Grundlagen der Quantenmechanik (В. А. Фок, Начала квантовой механики, стр. 38, Кубуч, 1932); Born, Jordan, Elementare Quantenmechanik, Berlin 1930, S. 65 ff.

Das aber zeigt, daß ψ auch eine Eigenfunktion des Operators G ist, d. h., die Operatoren F und G haben eine gemeinsame Eigenfunktion.

Wir sahen, daß die dynamischen Veränderlichen p_x, p_y, p_z eine gemeinsame Eigenfunktion haben. Nach dem oben Festgestellten müssen die ihnen entsprechenden Operatoren kommutativ sein. Es ist nun tatsächlich

$$p_x p_y \psi = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y},$$

$$p_y p_x \psi = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x},$$

woraus folgt, daß

$$p_x p_y - p_y p_x = 0 \tag{167,3}$$

und analog

$$\left.\begin{aligned} p_y p_z - p_z p_y &= 0\,, \\ p_z p_x - p_x p_z &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{167,4}$$

Man kann sich leicht auch davon überzeugen, daß eine Koordinate und die einer anderen Koordinate entsprechende p-Komponente ebenso kommutativ sind, z. B.

$$x p_y \psi = \frac{h}{2\pi i}\, x\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$p_y x \psi = \frac{h}{2\pi i}\, x\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

d. h.

$$x p_y - p_y x = 0\,, \quad \text{usw.} \tag{167,5}$$

Eine Koordinate aber und die ihr entsprechende p-Komponente sind *nicht kommutativ*, denn

$$x p_x \psi = x\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{h}{2\pi i}\, x\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$p_x x\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = \frac{h}{2\pi i}\psi + \frac{h}{2\pi i}\, x\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

d. h.

$$(p_x x - x p_x)\,\psi = \frac{h}{2\pi i}\psi$$

oder

$$p_x x - x p_x = \frac{h}{2\pi i}\,. \tag{167,6}$$

Analog erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} p_y y - y p_y &= \frac{h}{2\pi i}, \\ p_z z - z p_z &= \frac{h}{2\pi i}\,. \end{aligned}\right\} \tag{167,7}$$

Die dynamischen Veränderlichen aber, die durch nicht kommutative Operatoren dargestellt werden, können nicht gleichzeitig bestimmte Werte haben. Wir kommen so zu der Folgerung, daß die Koordinaten und die ihnen entsprechenden Impulskomponenten nicht gleichzeitig bestimmte Werte haben können: Entweder hat die eine von ihnen einen bestimmten Wert, dann ist die andere unbestimmt, oder aber beide sind innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt.

§ 168. Die Heisenbergschen Ungleichungen

Wir wollen uns nun mit der Frage befassen, wie groß die minimale Ungenauigkeit bei einer gleichzeitigen Messung, sagen wir von x und p_x, ist.

Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir erst vereinbaren, wie wir die Genauigkeit einer Messung kennzeichnen wollen. Nehmen wir an, daß wir eine hinreichend große Anzahl von Messungen irgendeiner Größe a ausgeführt haben und dabei die Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ erhielten. Der Mittelwert sei $\bar{a}$. Die Abweichungen der einzelnen Messungen vom Mittel sind dann

$$a_1 - \bar{a}, \quad a_2 - \bar{a}, \ldots, \quad a_k - \bar{a}, \ldots .$$

Wie wir aber in Bd. I, § 109, sahen, ist das Mittel dieser Abweichungen gleich Null. Deswegen benutzen wir das Mittel der Quadrate der Abweichungen $\overline{\varepsilon_k^2} = \overline{(a_k - \bar{a})^2}$. Als Maß der Streuung der Zahlenwerte dient das mittlere Abweichungsquadrat

$$\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon_k^2}}\,.$$

Es ist leicht einzusehen, daß folgende Beziehung gültig ist:

$$\overline{\varepsilon_k^2} = \overline{(a_k - \bar{a})^2} = \overline{a_k^2} - 2\overline{a_k}\bar{a} + (\bar{a})^2 = \overline{a_k^2} - 2(\bar{a})^2 + (\bar{a})^2 = \overline{a_k^2} - (\bar{a})^2. \qquad (168,1)$$

Jetzt wollen wir das Ungenauigkeitsmaß für die Messung einer Koordinate und der ihr entsprechenden Impulskomponente, z. B. x und p_x, bestimmen. Nach (168,1) ist

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \overline{(\Delta p)^2} = \overline{p_x^2} - (\overline{p_x})^2.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\overline{p_x}$ gleich Null sind. Hierzu ist nur ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. Wählt man den Koordinatenursprung im Punkt mit der Koordinate $\bar{x}$, so ist $\bar{x} = 0$. Bewegt sich nun dieses System mit der Geschwindigkeit $\frac{\overline{p_x}}{m}$, so ist $\overline{p_x} = 0$. Damit ist in dem von uns gewählten System

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2}, \qquad \overline{(\Delta p_x)^2} = \overline{p_x^2}. \qquad (168,2)$$

Nach der im § 165 aufgestellten Formel für quantentheoretische Mittelung erhalten wir

$$\overline{x^2} = \int \psi^* x^2 \psi \, dx,$$

$$\overline{p_x^2} = \int \psi^* p_x^2 \psi \, dx = -\frac{h^2}{4\pi^2} \int \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} dx. \qquad (168,3)$$

Ziehen wir nun die offensichtliche Ungleichung

$$\int \left| \alpha x\psi + \beta \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx \geqslant 0 \qquad (168,4)$$

heran, in der α und β beliebige reelle Hilfsvariablen sind. Wir berechnen den zu integrierenden Ausdruck und beachten, daß das Quadrat des *absoluten Betrages* aufzufinden ist

$$\left| \alpha x\psi + \beta \frac{d\psi}{dx} \right|^2 = \left(\alpha x\psi + \beta \frac{d\psi}{dx}\right) \left(\alpha x\psi^* + \beta \frac{d\psi^*}{dx}\right) =$$

$$= \alpha^2 x^2 \psi^* \psi + \alpha\beta x \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi^*}{dx}\right) + \beta^2 \frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx} =$$

$$= \alpha^2 x^2 \psi^* \psi + \alpha\beta x \frac{d}{dx}(\psi^*\psi) + \beta^2 \frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx}.$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$A = \int x^2 \psi^* \psi \, dx, \quad B = -\int x \frac{d}{dx}(\psi^*\psi)\, dx, \quad C = \int \frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx}\, dx. \qquad (168,5)$$

Die Ungleichung (168,4) bekommt damit die Form

$$A\alpha^2 - B\alpha\beta + C\beta^2 \geqslant 0. \qquad (168,6)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist ein dreigliedriges Polynom zweiten Grades. Damit dieses positiv ist, muß[1])

$$A > 0 \text{ und } 4AC \geqslant B^2 \qquad (168,7)$$

sein. Wir wollen nun die Bedeutung der Koeffizienten A, B und C feststellen. Die erste der Formeln (168,5) zeigt, daß

$$A = \overline{x^2}. \qquad (168,8)$$

Hieraus folgt ebenso, daß $A > 0$, d. h., die erste der Bedingungen (168,7) ist erfüllt. Beachten wir ferner, daß ψ auf 1 normiert ist und führen die partielle Integration aus, so finden wir

$$B = -\int x \frac{d}{dx}(\psi^*\psi)\, dx = -(x\psi^*\psi)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int \psi^*\psi\, dx = \int \psi^*\psi\, dx = 1.$$

---

[1]) Identisch ist folgendes gültig

$$A\alpha^2 - B\alpha\beta + C\beta^2 = A\left(\alpha^2 - \frac{B}{A}\alpha\beta + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2}\beta^2\right) + \left(C - \frac{1}{4}\frac{B^2}{A}\right)\beta^2 =$$

$$= A\left(\alpha - \frac{1}{2}\frac{B}{A}\beta\right)^2 + \left(C - \frac{1}{4}\frac{B^2}{A}\right)\beta^2.$$

Daraus ist ersichtlich, daß für $A > 0$ und $C \geqslant \frac{1}{4}\frac{B^2}{A}$ der dreigliedrige Ausdruck (168,6) positiv ist. Wenn $A > 0$, ist auch $4\,AC \geqslant B^2$, was zu beweisen war.

Der Ausdruck $(x\psi^*\psi)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ ergibt Null, denn ψ verschwindet als quadratisch integrierbare Funktion schneller, als x anwächst.

Schließlich ergibt die partielle Integration für C

$$C = \int \frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx}\,dx = \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx = -\int \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx .$$

Beachten wir aber (168,3), so erhalten wir

$$C = \frac{4\pi^2}{h^2}\overline{p_x^2}$$

und nach (168,2)

$$\overline{(\varDelta p_x)^2} = \overline{p_x^2} = \frac{h^2}{4\pi^2}C .$$

Gemäß (168,2) und (168,8) ist

$$\overline{(\varDelta x)^2} = \overline{x^2} = A .$$

Durch Multiplikation erhalten wir dann aus den letzten zwei Gleichungen

$$\overline{(\varDelta x)^2}\;\overline{(\varDelta p_x)^2} = \frac{h^2}{4\pi^2}AC \equiv \frac{h^2}{16\pi^2}4AC .$$

Nach (168,7) ist aber $4\,AC \geqq B^2$ und daher

$$\overline{(\varDelta x)^2}\;\overline{(\varDelta p_x)^2} \geqq \frac{h^2}{16\pi^2}B^2$$

oder, da $B = 1$ ist,

$$\overline{(\varDelta x)^2}\;\overline{(\varDelta p_x)^2} \geqq \frac{h^2}{16\pi^2} .$$

Da wir die Ungenauigkeit durch die positive Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat der Abweichung darstellen wollten, erhalten wir nun

$$\sqrt{\overline{(\varDelta x)^2}}\cdot\sqrt{\overline{(\varDelta p_x)^2}} \geqq \frac{h}{4\pi} . \tag{168,9}$$

Für die beiden anderen Koordinatenachsen ergibt sich analog

$$\sqrt{\overline{(\varDelta y)^2}}\cdot\sqrt{\overline{(\varDelta p_y)^2}} \geqq \frac{h}{4\pi}, \tag{168,10}$$

$$\sqrt{\overline{(\varDelta z)^2}}\cdot\sqrt{\overline{(\varDelta p_z)^2}} \geqq \frac{h}{4\pi} . \tag{168,11}$$

Die Ungleichungen (168,9) bis (168,11) wurden von Heisenberg entdeckt. Sie weisen auf die obere Grenze der Genauigkeit hin, die bei gleichzeitiger Messung von Koordinate und

Impuls zu erreichen ist: Das Produkt der Ungenauigkeiten kann nicht kleiner als $\frac{h}{4\pi}$ sein. Es ist evident, daß der physikalische Inhalt der HEISENBERGschen Ungleichungen mit den im Bd. I, §§ 139—140, betrachteten Ungenauigkeitsrelationen zusammenfällt.

§ 169. Die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung

In den vorangegangenen Paragraphen begegneten wir Operatoren verschiedener mechanischer Größen, die nur von den Koordinaten abhängig waren oder Differentiationen nach Koordinaten enthielten. Diesem entsprechend kümmerten wir uns nicht um die Abhängigkeit der Funktion ψ von der Zeit. Die wichtigste unter den von uns betrachteten Beziehungen ist die SCHRÖDINGER-Gleichung, d. h. die Gleichung für die Eigenfunktionen des Energieoperators:

$$H\psi = E\psi. \tag{162,1}$$

Da der Operator H nur auf eine Koordinatenfunktion wirkt, gibt uns auch diese Gleichung keinen Hinweis auf die Abhängigkeit der Funktion ψ von der Zeit. Wir wollen uns noch daran erinnern, daß man mit dieser Gleichung Funktionen auffinden kann, die Zustände beschreiben, in denen die Energie *bestimmte* Werte hat.

Doch schon im Bd. I, § 143, fanden wir für ein freies Teilchen, d. h. für ein sich ohne Einwirkung äußerer Felder bewegendes Teilchen, die Gleichung

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{143,6}$$

Der Operator, der auf der linken Seite dieser Gleichung auf die Funktion ψ wirkt, ist der Energieoperator eines freien Teilchens (in Abwesenheit eines äußeren Feldes ist die potentielle Energie gleich Null), so daß man die Gleichung in der Form

$$H\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{169,1}$$

schreiben kann. Wir wollen nun ohne Beweis annehmen, daß die Gleichung (169,1) auch dann gilt, wenn die Bewegung in einem äußeren Kraftfeld stattfindet. Der HAMILTON-Operator H besteht in diesem Falle aus den Operatoren der kinetischen und der potentiellen Energie. Die Gleichung (169,1) hat dann folgende explizite Form

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{169,2}$$

Wie alle Grundgleichungen der Physik kann auch die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung nicht bewiesen werden. Ihre Richtigkeit wird aber durch die Übereinstimmung der aus ihr abgeleiteten Folgerungen mit den Ergebnissen der Experimente bestätigt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Gleichung eine Verallgemeinerung der SCHRÖDINGER-Gleichung für die Eigenfunktionen des Energieoperators ist. In dem durch die Eigenfunktion des Operators H beschriebenen Zustand hat die Energie einen bestimmten Wert, und man kann die Zeitabhängigkeit der ψ-Funktion mit Hilfe des

„monochromatischen“ Multiplikators $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ darstellen, so daß

$$\psi(x, y, z, t) = \psi^0(x, y, z) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}.$$

Die rechte Seite von (169,2) ergibt

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi,$$

und die Gleichung (169,2) geht in die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung über:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi = E\psi. \tag{169,1'}$$

Allerdings hat die Gleichung (169,2) eine allgemeinere Bedeutung als (162,1). Jede Lösung von (162,1) ist auch eine Lösung von (169,2), während umgekehrt nicht jede Lösung von (169,2) auch eine Lösung von (162,1) ist. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir einen Zustand, der eine Superposition zweier Zustände mit bestimmten Energiewerten E_1 und E_2 darstellt:

$$\psi' = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = c_1\psi_1^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_1 t} + c_2\psi_2^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_2 t}. \tag{169,3}$$

Jede der Funktionen ψ_1 und ψ_2 ist eine Eigenfunktion des Operators H, und es gelten für sie die Beziehungen $H\psi_1 = E_1\psi_1$ und $H\psi_2 = E_2\psi_2$. Wenden wir aber den Operator H auf die Funktion (169,3) an, so erhalten wir offensichtlich

$$H\psi' = c_1E_1\psi_1 + c_2E_2\psi_2. \tag{169,4}$$

Wir sehen, daß in diesem Falle die Beziehung $H\psi = E\psi$ keine Gültigkeit hat. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß die Funktion (169,3) die Gleichung (169,2) befriedigt, da die unmittelbare Differentiation

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi'}{\partial t} = c_1E_1\psi_1 + c_2E_2\psi_2$$

ergibt. Stellen wir dieses Ergebnis der Gleichung (169,4) gegenüber, so sehen wir, daß $H\psi' = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi'}{\partial t}$, d. h., daß die Funktion ψ' die Gleichung (169,2) befriedigt.

Da in der Gleichung (169,2) ein zeitabhängiger Operator auftritt, stellt diese Gleichung das dynamische Gesetz der Quantenmechanik dar, das die Änderung des Zustandes mit der Zeit bestimmt. Sie wird als *allgemeine* SCHRÖDINGER-*Gleichung* bezeichnet. Diese Verallgemeinerung ist durch gute Übereinstimmung aller aus der Gleichung (169,2) abgeleiteten Folgerungen mit dem Experiment gerechtfertigt. Sie kann für den Fall eines explizit von der Zeit abhängenden Potentials noch weiter verallgemeinert werden. Diese weitergehende Verallgemeinerung wird uns erlauben, in den Komplex der Quantenmechanik auch die Prozesse der Lichtemission einzubeziehen (siehe Kap. XIV).

Da wir neben der Funktion ψ auch immer die Funktion ψ^* betrachten, müssen wir auch für diese konjugierte Funktion eine Gleichung aufstellen. Diese ist

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H^*\psi^*$$

oder, da der Operator H die imaginäre Einheit nicht enthält, d. h. $H^* = H$ ist,

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi^* + U\psi^*. \qquad (169,5)$$

Die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung ist eine *partielle Differentialgleichung*. Ihre Lösungen unterwerfen wir den der vorliegenden Aufgabe entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen. Da die SCHRÖDINGER-Gleichung hinsichtlich der Zeit eine Gleichung erster Ordnung ist, genügt eine Anfangsbedingung; kennen wir z. B. $\psi\ (q, 0)$, so können wir $\psi\ (q, t)$ vollkommen bestimmen[1]). Da ψ den Zustand eines Mikrosystems beschreibt, bedeutet dies, daß es ausreichend ist, den Anfangszustand des Systems anzugeben, um alle folgenden Zustände bestimmen zu können. Diese Schlußfolgerung ist der quantitative Ausdruck für das allgemeine Kausalitätsprinzip in seiner Anwendung auf Mikrosysteme.

Wir haben jetzt zu untersuchen, ob die Lösungen der allgemeinen SCHRÖDINGER-Gleichung die Eigenschaften besitzen, die notwendig sind, um die frühere statistische Deutung der ψ-Funktion beibehalten zu können, nämlich, daß $\psi^*\psi\, d\tau$ die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen im Raumelement $d\tau$ vorzufinden. Diese Prüfung wird folgendermaßen vorgenommen: Ist $\psi^*\psi\, d\tau$ die Wahrscheinlichkeit, so kann man sie normieren, d. h., man kann fordern, daß die Bedingung

$$\int \psi^*\psi\, d\tau = 1 \qquad (169,6)$$

erfüllt ist, wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Der Sinn der Bedingung (169,6) liegt darin, daß die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen *irgendwo* im Raum zu finden, der Bestimmtheit gleichkommt. In diesem Falle aber muß die Normierungsbedingung, die einmal zu der Zeit $t = 0$ aufgestellt wurde, auch zu jedem folgenden Zeitpunkt gelten, d. h., das Integral in (169,6) muß zeitunabhängig sein.

Überzeugen wir uns davon, daß ganz allgemein das Integral $\int \psi^*\psi\, d\tau$ nicht von der Zeit abhängt, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \psi^*\psi\, d\tau = 0.$$

Wir führen die Differentiation unter dem Integral aus:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \psi^*\psi\, d\tau = \int\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)d\tau. \qquad (169,7)$$

[1]) Wir können hier nicht darauf eingehen, *wie* die Funktion ψ für $t = 0$ aufzufinden ist. Siehe hierzu D. I. BLOCHINZEW, Grundlagen der Quantenmechanik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

Da ψ und ψ^* die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung befriedigen müssen, haben wir

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H\psi^*.$$

Bestimmen wir hieraus die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ und $\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$ und setzen sie in (169,7) rechts ein, so finden wir

$$\int\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)d\tau = \frac{2\pi i}{h}\int\left\{\psi\,(H\psi)^* - \psi^*\,(H\psi)\right\}d\tau.$$

Da der Operator H selbstadjungiert ist, folgt

$$\int\psi\,(H\psi)^*\,d\tau = \int\psi^*\,(H\psi)\,d\tau,$$

daher ist die rechte Seite von (169,7) gleich Null und

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\psi^*\psi\,d\tau = 0. \tag{169,8}$$

Wir sehen, daß das Normierungsintegral tatsächlich nicht von der Zeit abhängt und daher die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt.

§ 170. Dichte und Strom der Wahrscheinlichkeit

Entsprechend der statistischen Deutung der Funktion ψ ermöglicht die Kenntnis dieser Funktion zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der das Teilchen zu *diesem Zeitpunkt* t im Raumelement anzutreffen ist. Dies kann mit Hilfe des „Verteilungsbildes" veranschaulicht werden. Stellen wir uns eine große Anzahl N von Teilchen vor, die sich alle in ein- und demselben Zustand befinden und miteinander nicht in Wechselwirkung stehen. Da $\psi^*\psi\,d\tau$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, das Teilchen im Raumelement $d\tau$ vorzufinden, so ist $N\psi^*\psi\,d\tau$ die mittlere Anzahl der Teilchen im Raumelement $d\tau$ an einem bestimmten Punkte des Raumes und $N\psi^*\psi$ die mittlere Dichte der Teilchen in diesem Punkte. Wenn wir diese mittlere Dichte für eine hinreichend große Anzahl von Punkten berechnen, so können wir mit Hilfe irgendeiner geometrischen Gestalt — z. B. einer Wolke von größerer oder geringerer Dichte — die Dichteverteilung für einen gegebenen Zeitpunkt t bildlich darstellen. Tragen dabei die Teilchen eine elektrische Ladung e, so ist das Produkt $Ne\,\psi^*\psi$ die mittlere Ladungsdichte am gegebenen Ort, und wir können somit auch die mittlere Verteilung der Elektrizitätsdichte bildlich darstellen.

Von diesem Gesichtspunkt aus besteht die Bedeutung der allgemeinen SCHRÖDINGER-Gleichung darin, daß sie die Zeitabhängigkeit von ψ aufzufinden gestattet; kennen wir aber diese Abhängigkeit, so können wir das Verteilungsbild für die Zukunft voraussagen und somit die Veränderungen verfolgen, die im System stattfinden.

Dieses Verfahren entspricht allerdings kaum in vollem Maße unserem Wunsch nach einer vollständigen Darstellung der Bewegung. Wir kommen diesem Ziel näher, wenn wir neben

der Teilchenverteilung oder der Verteilung der Ladungsdichte auch die mittlere Anzahl der Teilchen angeben können, die in 1 sec durch eine Fläche von 1 cm² in Richtung der positiven Flächennormale hindurchgehen. Zu diesem Zweck eignet sich das Produkt $\psi^*\psi$ nicht, wir müßten vielmehr eine andere Kombination dieser Funktionen suchen, die zu solch einer Bestimmung geeignet ist.

Wir finden diese Kombination, wenn wir in Betracht ziehen, daß $\psi^*\psi$ als die Dichte einer fiktiven Flüssigkeit angesehen werden kann, die über den ganzen Raum verteilt ist, denn ψ ist eine stetige Funktion der Koordinaten. Diese „Flüssigkeit" unterliegt dem Erhaltungssatz, denn das über den ganzen Raum erstreckte Integral $\int \psi^* \psi \, d\tau$ hängt nicht von der Zeit ab. Wächst darum in einem bestimmten Augenblick die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^*\psi$ irgendwo an, so nimmt sie an einer anderen Stelle entsprechend ab: Man kann sich dies so vorstellen, als ob die Wahrscheinlichkeit „strömt".

Beachten wir dies, so können wir für die Ableitung des uns interessierenden Ausdrucks der „Wahrscheinlichkeitsstromdichte" die Analogie zur Kontinuitätsgleichung der klassischen Hydrodynamik ausnutzen. Erinnern wir uns an diese Gleichung und stellen uns ein Raumelement vor, das die Form eines Parallelepipeds hat, dessen Flächen zu den Flächen des Koordinatensystems parallel sind. Von links ströme die Flüssigkeit in das Volumen ein; die Richtung des Stromes sei parallel zur positiven x-Achse und die Stromdichte $s(x)$ hänge von x ab. Die Flüssigkeitsmenge, die während der Zeiteinheit durch die linke Fläche in das Volumen *einströmt*, ist daher $s(x)\,dy\,dz$. Die Flüssigkeitsmenge, die während derselben Zeit durch die rechte Fläche *ausströmt*, ist gleich $-s(x+dx)\,dy\,dz$ oder unter Vernachlässigung verschwindender Größen von höherer Größenordnung als der zweiten:

$$-s(x+dx)\,dy\,dz = -s(x)\,dy\,dz - \frac{\partial s}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Die Änderung der Flüssigkeitsmenge im Volumen ist gleich der algebraischen Summe

$$s(x)\,dy\,dz - s(x)\,dy\,dz - \frac{\partial s}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\frac{\partial s}{\partial x}\,dx\,dy\,dz. \qquad (170{,}1)$$

Da die Gesamtmenge der Flüssigkeit erhalten bleibt (es wird angenommen, daß im Volumen weder Quellen noch Senken vorhanden sind), muß eine solche Änderung der Flüssigkeitsmenge durch eine Änderung ihrer Dichte ϱ ausgeglichen werden. Wir können daher die Änderung der Flüssigkeitsmenge im Volumen auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz. \qquad (170{,}2)$$

Setzen wir (170,1) und (170,2) gleich, so erhalten wir nach Kürzung und Umstellung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \qquad (170{,}3)$$

Das aber ist die uns interessierende Kontinuitätsgleichung.

Wir wollen nun den Ausdruck finden, der es gestattet, die mittlere Stromdichte in der Quantenmechanik zu berechnen.

Zu diesem Zweck schreiben wir die eindimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U\psi$$

und die entsprechende Gleichung für ψ^*

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+U\psi^*$$

auf. Die erste multiplizieren wir mit $-\psi^*$, die zweite mit ψ, und die so erhaltenen Gleichungen addieren wir:

$$\frac{h}{2\pi i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)=\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right).$$

Dies kann in anderer Form folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{h}{4\pi m i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\right\}=0. \tag{170,4}$$

Vergleichen wir die Beziehung (170,4) mit der hydrodynamischen Gleichung (170,3), so sehen wir, daß beide dieselbe Form haben, nur spielt die Rolle der Flüssigkeitsdichte ϱ in (170,4) das Produkt $\psi^*\psi$ und die Rolle der Stromdichte — der Ausdruck

$$s=\frac{h}{4\pi m i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right). \tag{170,5}$$

Da $\psi^*\psi$ als die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür angesehen wird, daß das Teilchen am gegebenen Ort aufzufinden ist, können wir s als Dichte des „Wahrscheinlichkeitsstroms" deuten. Der Sinn dieses Ausdrucks ist eindeutig: s ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in 1 sec das Teilchen durch die Fläche von 1 cm² in Richtung der positiven Flächennormale hindurchtritt.

Wir wollen nun den Ausdruck (170,5) an Hand eines einfachen Beispieles prüfen. Die Bewegung des Teilchens möge durch eine ebene Welle

$$\psi=e^{i\frac{2\pi}{h}(px-Et)}, \quad E=\frac{p^2}{2m}$$

dargestellt werden. Das bedeutet, daß das Teilchen einen Impuls von bestimmter Größe und bestimmter Richtung hat (im vorliegenden Falle fällt p mit der positiven Richtung der x-Achse zusammen); seine Koordinate bleibt selbstverständlich ganz unbestimmt. Stellen wir die konjugiert komplexe Funktion auf

$$\psi^*=e^{-i\frac{2\pi}{h}(px-Et)},$$

so finden wir

$$\psi^*\psi=1, \quad \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{2\pi i}{h}p\psi^*\psi=\frac{2\pi i}{h}p,$$

$$\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}=-\frac{2\pi i}{h}p\psi^*\psi=-\frac{2\pi i}{h}p$$

und für den Wahrscheinlichkeitsstrom

$$s = \frac{h}{4\pi i m}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = \frac{p}{m}\psi^*\psi = \frac{mv}{m} = v.$$

Dieses Ergebnis ist vollkommen einleuchtend, denn wenn die Stromdichte der Wahrscheinlichkeit gleich v ist, so muß die mittlere Dichte des Teilchenstroms gleich Nv sein. Stellen wir uns jetzt einen Teilchenschwarm der Dichte N vor, der sich mit der Geschwindigkeit v in einer bestimmten Richtung bewegt und in einem Zylinder von 1 cm² Grundfläche und der Höhe v eingeschlossen ist. Die Anzahl der Teilchen in diesem Zylinder ist dann Nv, und sie alle gehen in 1 sec durch die Grundfläche hindurch, d. h., sie bilden in Übereinstimmung mit dem nach der Formel (170,5) berechneten Ergebnis einen Strom der Dichte Nv.

§ 171. „Reine Zustände“ und Mischungen

Wir wollen jetzt noch ein Beispiel zur Berechnung der Stromdichte betrachten, das uns gestatten wird, eine wichtige Besonderheit der Zustände von Mikrosystemen zu klären. Der Zustand des Teilchens sei durch die Funktion

$$\psi = a e^{i\frac{2\pi}{h}(xp - Et)} + b e^{i\frac{2\pi}{h}(-xp - Et)} \tag{171,1}$$

beschrieben.

Der von dieser Funktion beschriebene Zustand ist durch die Superposition von zwei Zuständen

$$\psi_1 = e^{i\frac{2\pi}{h}(xp - Et)}, \quad \psi_2 = e^{i\frac{2\pi}{h}(-xp - Et)} \tag{171,2}$$

gebildet. Die in (171,1) auftretenden Koeffizienten a und b haben, wie wir schon wissen, folgenden Sinn: $|a|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir bei einer Messung des Teilchenimpuls den Wert $+p$ erhalten; $|b|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Messung des Impuls $-p$ ergibt.

Wir wollen jetzt den expliziten Ausdruck für den Wahrscheinlichkeitsstrom im Zustand, der durch die Funktion ψ (171,1) beschrieben wird, aufsuchen. Die kleine Rechnung, die vom Leser selbst ausgeführt werden kann (siehe Übung 1 am Schluß dieses Paragraphen), führt zu folgendem Ergebnis

$$s = \frac{h}{4\pi i m}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = |a|^2 \frac{p}{m} - |b|^2 \frac{p}{m} = |a|^2 v + |b|^2(-v). \tag{171,3}$$

Rechnen wir nun die mittlere Dichte des Stromes von N Teilchen aus, so erhalten wir

$$j = sN = |a|^2 Nv - |b|^2 Nv. \tag{171,4}$$

Dieser Ausdruck für die gesamte Stromdichte j ist derart, als ob zwei Teilchenströme existieren, die sich mit der Geschwindigkeit v aufeinander bewegen, wobei die mittlere Dichte der Teilchen im ersten Strom gleich $|a|^2 N$, die im zweiten gleich $|b|^2 N$ ist. Da aber die Wellenfunktion den Zustand eines einzigen Teilchens beschreibt, ist der Zustand, der mittels der Funktion (171,1) beschrieben wird und eine Superposition der Funktionen ψ_1 und ψ_2 darstellt, durch eine sehr merkwürdige Eigenschaft ausgezeichnet:

Das Teilchen, das sich in diesem Zustand befindet, hat sich teilweise nach rechts (mit der Geschwindigkeit $+ v$), teilweise nach links (mit der Geschwindigkeit $- v$) zu bewegen. Das heißt einfach, daß wir dem Teilchen, das sich im Zustand ψ befindet, überhaupt keine bestimmte Geschwindigkeit zuschreiben können. Es ist selbstverständlich, daß wir uns einen solchen Zustand nicht bildlich vorstellen können.

Benutzen wir die statistische Deutung und wenden unser Resultat auf eine Ansammlung vieler Teilchen an, so erhalten wir ein anschauliches Bild. Man soll aber nicht meinen, daß die Ansammlung von N Teilchen, von denen sich jedes in dem durch die Funktion (171,1) beschriebenen Zustand befindet, eine Mischung zweier Arten von Teilchen ist, von denen sich die einen im Zustand ψ_1, die anderen im Zustand ψ_2 befinden. Eine solche Mischung kann selbstverständlich existieren, sie ist aber nicht mit einer Ansammlung von Teilchen im Zustand (171,1) identisch. Um uns davon zu überzeugen, berechnen wir die Dichte der Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Zustand ψ vorzufinden:

$$\psi^*\psi = \left(ae^{i\frac{2\pi}{h}xp} + be^{-i\frac{2\pi}{h}xp}\right)e^{-i\frac{2\pi}{h}Et} \times \left(a^*e^{-i\frac{2\pi}{h}xp} + b^*e^{i\frac{2\pi}{h}xp}\right)e^{i\frac{2\pi}{h}Et} =$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + ab^*e^{i\frac{4\pi}{h}xp} + a^*be^{-i\frac{4\pi}{h}xp}.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die beiden letzten Glieder der Summe ein reelles, sich periodisch änderndes Glied darstellen. Setzen wir für $a = |a|e^{i\delta_1}$ und $b = |b|e^{i\delta_2}$ und bezeichnen die Phasendifferenz $\delta_1 - \delta_2 = \delta$, so finden wir

$$ab^*e^{i\frac{4\pi}{h}xp} + a^*be^{-i\frac{4\pi}{h}xp} = 2|a|\cdot|b|\cos\left(\frac{4\pi}{h}xp + \delta\right),$$

und daher

$$\psi^*\psi = |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\cdot|b|\cos\left(\frac{4\pi}{h}xp + \delta\right). \tag{171,5}$$

Das in diesem Ausdruck vorkommende Cosinusglied ändert sich periodisch mit der Änderung von x. Sein Auftreten bedingt die *Interferenz*, und es erscheint, weil wir die *Amplituden* der Wahrscheinlichkeiten ψ_1 und ψ_2 addierten, um den Zustand ψ zu bekommen. Haben wir es jedoch mit einer Mischung von Teilchen zu tun, in der sich die einen im Zustand ψ_1, die anderen im Zustand ψ_2 befinden, wobei der Anteil der ersten $|a|^2$, der der zweiten $|b|^2$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen mit der Koordinate zwischen x und $x + dx$ zu finden, einfach gegeben zu

$$(|a|^2\psi_1^*\psi_1 + |b|^2\psi_2^*\psi_2)\,dx = (|a|^2 + |b|^2)\,dx. \tag{171,6}$$

Tatsächlich, die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Zustand ψ_1 zu finden, ist gleich $|a|^2$, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen in diesem Zustand die Koordinate x hat, beträgt $\psi_1^*\psi_1$. Genauso ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Zustand ψ_2 zu finden, gleich $|b|^2$, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen in diesem Zustand die Koordinate x hat, beträgt $\psi_2^*\psi_2$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am gegebenen Ort entweder im Zustand ψ_1 oder ψ_2 anzutreffen, nach den Theoremen der Multiplikation und Addition von Wahrscheinlichkeiten gleich

$$|a|^2\psi_1^*\psi_1 + |b|^2\psi_2^*\psi_2 = |a|^2 + |b|^2 \tag{171,7}$$

(da $\psi_1^*\psi_1 = 1$ und $\psi_2^*\psi_2 = 1$ ist), was zu beweisen war.

Vergleichen wir die Formeln (171,5) und (171,6), so sehen wir, daß in der Formel (171,6) das Interferenzglied, welches in (171,5) auftritt, fehlt. Daraus ist zu erkennen, daß sich der durch (171,5) beschriebene Zustand wesentlich von einer Mischung der Zustände unterscheidet, für die sich die Wahrscheinlichkeit nach der Formel (171,6) errechnet. Der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen ist genau derselbe wie in der Optik der Unterschied zwischen kohärenter und nicht kohärenter Superposition. Im ersten Fall werden die Amplituden addiert, im zweiten — die Intensitäten.

Den durch die Funktion (171,1) beschriebenen Zustand nennt man, im Unterschied zu einer Zustandsmischung, reinen Zustand. Vom statistischen Standpunkt aus besteht zwischen diesen beiden Fällen folgender wesentlicher Unterschied. Stellen wir uns eine sehr große Anzahl von Teilchen vor, die sich alle in ein und demselben Zustand befinden. Aus dieser Menge greifen wir eine Teilmenge heraus, die eine noch immer genügend große Anzahl von Teilchen umfaßt, und messen z. B. ihren Impuls. Dabei können wir für die einen Teilchen den Impuls $+p$ und für die anderen den Impuls $-p$ finden. Die jeweilige Anzahl dieser Werte zeigt uns die Statistik dieser Teilmenge an, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen den Impuls $+p$ oder $-p$ hat. Aus der Restmenge sondern wir eine neue Teilmenge aus, messen wieder die Impulse der Teilchen und stellen so ihre Statistik fest. Wenn wir auf diese Weise immer neue Teilmengen aussondern und dabei jedesmal die gleiche Statistik vorfinden, d. h. die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Impulse $+p$ und $-p$, so haben wir einen reinen Fall. Wenn wir jedoch beim Herausgreifen aufs Geratewohl immer neuer Teilmengen verschiedene statistische Verteilungen auffinden, so haben wir es mit einer Zustandsmischung zu tun. Im letzten Falle können wir im Grunde genommen mitunter eine solche Teilmenge herausgreifen, für die entweder $|a|^2 = 1$ und $|b|^2 = 0$ oder $|a|^2 = 0$ und $|b|^2 = 1$ ist, d. h. für die alle Teilchen bei der Impulsmessung immer ein und denselben Wert haben, während für andere Teilmengen sowohl $|a|^2$ als auch $|b|^2$ von Null verschiedene Werte haben.

Übungen:

1. Im Falle $a = b$ hat die Formel (171,1) die Form

$$\psi = 2a \cos \frac{2\pi}{h} px e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}.$$

Es ist zu zeigen, daß in diesem Falle der Wahrscheinlichkeitsstrom s gleich Null ist.

2. Es ist für den allgemeinen Fall zu zeigen, daß der Wahrscheinlichkeitsstrom gleich Null ist, wenn der von den Koordinaten abhängige Teil der Funktion ψ reell ist.

3. Der Mittelwert des Impulses bei einer eindimensionalen Bewegung entlang der x-Achse errechnet sich bekanntlich nach der Formel

$$\overline{p_x} = \frac{h}{2\pi i} \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx. \qquad (171,8)$$

Es ist zu zeigen, daß er auch durch die „symmetrisierte“ Formel

$$\overline{p_x} = \frac{h}{4\pi i} \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dx$$

dargestellt werden kann.

[Hinweis: Man benutze die Beziehung

$$0 = \frac{h}{4\pi i}\int \frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\psi)\,dx = \frac{h}{4\pi i}\int\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx,$$

die wegen der Grenzbedingungen für ψ Gültigkeit hat, und kombiniere sie mit (171,8)].

§ 172. Stationäre Zustände

Unter den verschiedenen Zuständen, in denen sich ein System befinden kann, sind die *stationären Zustände* von besonderem Interesse. Dem Sinne dieses Wortes entsprechend müssen diese Zustände zeitunabhängig sein. Wir werden sie als Zustände definieren, für die die Ortswahrscheinlichkeit, d. h. das Produkt $\psi^*\psi$, und der Wahrscheinlichkeitsstrom s, von der Zeit unabhängig sind. Ist die Bewegung eindimensional, so haben wir für einen stationären Zustand folgende Merkmale:

$$w = \psi^*\psi = \text{const}, \tag{172,1}$$

$$s = \frac{h}{4\pi i m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) = \text{const}. \tag{172,2}$$

Die Bedingung (172,1) ist erfüllt, wenn die Funktion ψ die Form

$$\psi(x, t) = \psi^0(x)\,e^{-if(x,t)} \tag{172,3}$$

hat. Dann ist

$$\psi^*(x, t) = \psi^{0*}e^{if(x,t)}, \tag{172,4}$$

und als Produkt von $\psi^*(x,t)$ und $\psi(x,t)$ erhalten wir die zeitunabhängige Größe $|\psi^0(x)|^2$.

Damit auch der Strom s konstant ist, muß

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = \text{const}$$

sein. Setzt man in diese Formel ψ und ψ^* aus (172,3) und (172,4) ein, so findet man

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = \psi^{0*}\frac{\partial\psi^0}{\partial x} - \psi^0\frac{\partial\psi^{0*}}{\partial x} - 2i\psi^{0*}\psi^0\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist zeitunabhängig, wenn die Ableitung $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ nicht von der Zeit abhängt. Das ist aber nur dann der Fall, wenn

$$f(x, t) = \varphi(x) + \chi(t).$$

Damit ist

$$\psi(x, t) = \psi^0(x)\,e^{-i\varphi(x)}e^{-i\chi(t)}$$

oder, wenn wir $e^{-i\varphi(x)}$ in die Funktion $\psi^0(x)$ mit einbeziehen,

$$\psi(x, t) = \psi^0(x)\,e^{-i\chi(t)}. \tag{172,5}$$

Wir setzen jetzt den Ausdruck (172,5) für die Funktion $\psi(x, t)$ in die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung, der diese Funktion genügen muß, ein. Nach Kürzung durch $e^{-i\chi(t)}$ erhalten wir

$$H\psi^0(x) = -\frac{h}{2\pi}\psi^0(x)\frac{d\chi(t)}{dt}$$

oder

$$\frac{1}{\psi^0(x)}H\psi^0(x) = -\frac{h}{2\pi}\frac{d\chi(t)}{dt}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von x allein, die rechte Seite — eine Funktion nur von t. Sie können einander nur dann gleich sein, wenn beide weder von x noch von t abhängen, d. h. einer gewissen Konstante α gleich sind. Das ergibt

$$-\frac{h}{2\pi}\frac{d\chi(t)}{dt} = \alpha,$$

und damit

$$\chi(t) = -\frac{2\pi}{h}\alpha t.$$

Die Konstante α muß die Energiedimensionen haben, denn h hat die Dimension [Energie · Zeit], und $\frac{\alpha t}{h}$ muß eine dimensionslose Größe sein, da sie in den Exponenten von (172,5) eingeht. Setzen wir $\alpha = E$, so erhalten wir nach (172,5)

$$\psi(x, t) = \psi^0(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}. \tag{172,6}$$

Wir setzen jetzt die aufgefundene Funktion ψ, die einen stationären Zustand beschreibt, in die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung ein

$$H\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Rechts erhalten wir

$$-\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}Et},$$

links aber wird nur nach den Ortskoordinaten differenziert, so daß

$$H\psi = e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}\, H\psi^0.$$

Setzen wir beide Ausdrücke einander gleich und kürzen durch den Exponentialfaktor, so erhalten wir

$$H\psi^0 = E\psi^0. \tag{172,7}$$

Die Wellenfunktion ψ, die den stationären Zustand beschreibt, zerfällt also in zwei Faktoren: den zeitabhängigen Faktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ und den Faktor $\psi^0(x)$, der nur von der Koordinate abhängt. Letztere Funktion ist, wie aus (172,7) ersichtlich, eine Eigenfunktion des Energieoperators.

Wenn speziell der Operator H ein diskretes Spektrum von Eigenwerten $E_1, E_2, \ldots$ hat, so werden die stationären Zustände in einem solchen Feld durch die Funktion $\psi_n^0 \, e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t}$ beschrieben. Entsprechend den Grundpostulaten der Quantenmechanik muß die Energie in solchen Zuständen bestimmte Werte haben, die im vorliegenden Falle eine diskrete Folge bilden.

Diese Folgerung fällt offensichtlich mit dem BOHRschen Grundpostulat zusammen. Im System der Quantenmechanik erweist sie sich jedoch nicht als Postulat, sondern als Folgerung aus den Grundlagen der Quantenmechanik.

Wie auch in allen anderen Fällen ist der Inhalt unserer Folgerung umfassender als die BOHRschen Postulate, denn aus der Beziehung (172,7) geht nicht hervor, daß die Energie unbedingt gequantelte Werte haben muß: Wenn der Operator H ein kontinuierliches Eigenwertspektrum hat, so kann E beliebige Werte haben.

Übung:

Es sind die Eigenschaften des Zustandes festzustellen, der durch die Superposition zweier stationärer Zustände

$$\psi = c_1 \psi_1^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_1 t} + c_2 \psi_2^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_2 t}$$

entstanden ist.

Es ist $\psi^* \psi$ zu berechnen und zu zeigen, daß der Zustand, der durch die Funktion ψ beschrieben wird, nicht stationär ist. Es ist festzustellen, wie $\psi^* \psi$ von der Zeit abhängt.

§ 173. Das Theorem von EHRENFEST

In den vorangegangenen Darlegungen haben wir Schritt für Schritt das System der Quantenmechanik aufgebaut. Wir sahen, daß es dank der Eigenschaften der Operatoren möglich war, identische Beziehungen zwischen mechanischen Größen der klassischen Mechanik zu benutzen, um entsprechende Operatoren der Quantenmechanik zu bilden. Allerdings ist die Frage einer Verknüpfung der klassischen Mechanik mit der Quantenmechanik hierdurch nicht erschöpft. Bei der Betrachtung einer Reihe von Problemen, z. B. der Bewegung eines Elektrons in elektrischen und magnetischen Feldern (siehe Bd. I, § 4), wandten wir die Gleichungen der NEWTONschen Mechanik an, und die Resultate zeigten eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment. Es ist daher angebracht, nach einem Kriterium zu suchen, welches die Grenzen angibt, in denen die Bewegung von Mikroobjekten als „quasiklassisch" behandelt werden kann.

Für die Lösung dieses Problems hat das Theorem von EHRENFEST große Bedeutung. Dieses Theorem sagt aus, daß in Mikrosystemen die *Mittelwerte der mechanischen Größen den Gesetzen der klassischen Mechanik genügen.*

Um uns davon zu überzeugen, beginnen wir mit der Suche nach der zeitlichen Ableitung des Mittelwertes der Koordinate x. Nach der Formel (165,1) ist der Mittelwert von x (wenn ψ

normiert ist) gleich

$$\bar{x} = \int x \psi^* \psi \, dx. \tag{165,1}$$

Bei der Bestimmung der zeitlichen Ableitung von x müssen wir beachten, daß *nur* ψ, *nicht aber* x *eine Funktion der Zeit ist*, da die Koordinaten in der Quantenmechanik *unabhängige Veränderliche* sind.

Deshalb ist

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) \, dx = \int x \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) dx. \tag{173,1}$$

Zur Elimination der zeitlichen Ableitungen benutzen wir die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung für ψ und ψ^*, die wir in der Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h}{4\pi i m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2\pi i}{h} U \psi,$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{h}{4\pi i m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{2\pi i}{h} U \psi^*$$

schreiben. Setzen wir dies in (173,1) ein, so finden wir

$$\dot{\bar{x}} = \frac{h}{4\pi i m} \int x \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx. \tag{173,2}$$

Das Integral auf der rechten Seite formen wir durch partielle Integration um:

$$\int x \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx = \int x \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx =$$

$$= x \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx. \tag{173,3}$$

Die Einführung der Integrationsgrenzen im ersten Glied ergibt wegen der Grenzbedingungen Null. Das noch verbleibende Integral schreiben wir als Summe zweier Integrale auf und integrieren das eine von ihnen partiell. Nach Einführung der Integrationsgrenzen erhalten wir

$$\int \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx = -\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx. \tag{173,3'}$$

[Folgendes ist zu beachten: Das Integral auf der rechten Seite von (173,3') verschwindet nicht, da der Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ nicht selbstadjungiert ist. Ein analoges Integral, wo an Stelle von $\frac{\partial}{\partial x}$ der Operator $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ steht, ist gleich Null (siehe S. 10).]

Somit ist

$$\int x \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx = 2 \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

und daher

$$\dot{\bar{x}} = \frac{h}{2\pi i m}\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = \frac{1}{m}\int \psi^* \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx = \frac{\bar{p}}{m},$$

d. h., für *die Mittelwerte* gilt die klassische Beziehung

$$\bar{p} = m\dot{\bar{x}}. \qquad (173,4)$$

Wir wollen nun zeigen, daß für die Mittelwerte auch die Beziehung

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\overline{\frac{\partial U}{\partial x}}$$

d. h. das zweite NEWTONsche Gesetz gilt. Zu diesem Zweck bilden wir den Mittelwert von p,

$$\bar{p} = \frac{h}{2\pi i}\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx,$$

und suchen dessen zeitliche Ableitung

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = \frac{h}{2\pi i}\int \left\{\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right\} dx =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\int \left\{\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right\} dx.$$

Eliminieren wir wie früher die zeitlichen Ableitungen mit Hilfe der SCHRÖDINGER-Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{h}{2\pi i}\int \left\{\left(\frac{h}{4\pi i m}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{2\pi i}{h}U\psi^*\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{h}{4\pi i m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2\pi i}{h}U\psi\right)\right\} dx =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{h}{4\pi i m}\int \left\{\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\right\} dx - \int \psi^* \frac{\partial U}{\partial x}\psi\,dx.$$

Wie die Rechnung zeigt, ist das erste Integral gleich Null (dieses Integral ist als Differenz zweier Integrale darzustellen; das erste von ihnen ist unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen zweimal partiell zu integrieren; das übrigbleibende Integral wird durch das zweite aufgehoben). Somit ist

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\int \psi^* \frac{\partial U}{\partial x}\psi\,dx \qquad (173,5)$$

oder, unter Beachtung von (173,4),

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\int \psi^* \frac{\partial U}{\partial x}\psi\,dx. \qquad (173,6)$$

Das Integral rechts ist offensichtlich gleich dem Mittelwert von $\frac{\partial U}{\partial x}$:

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\overline{\frac{\partial U}{\partial x}}, \qquad (173,7)$$

Wir sehen, daß für die Mittelwerte, die nach den Gesetzen der Quantenmechanik berechnet wurden, tatsächlich das NEWTONsche Bewegungsgesetz gültig ist.

Die Deutung der Beziehung (173,7) ist allerdings nicht so einfach, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Um den Mittelwert $\overline{\frac{\partial U}{\partial x}}$ berechnen zu können, braucht man den Ausdruck für ψ, d. h., die SCHRÖDINGER-Gleichung muß bereits gelöst sein. Es wäre daher falsch, anzunehmen, daß die Quantenmechanik auf die Integration der NEWTONschen Gleichungen für Mittelwerte zurückzuführen ist.

EHRENFEST hat jedoch gezeigt, daß die Beziehung (173,6) [oder, was dasselbe ist, (173,7)] zur Aufklärung des Zusammenhanges zwischen der klassischen und der Quantenmechanik folgendermaßen benutzt werden kann: Nehmen wir an, daß die ψ-Funktion nur in einem sehr kleinen Bereich, in dem $\frac{\partial U}{\partial x}$ als konstant angesehen werden kann, von Null verschieden ist. Dann erhalten wir aus (173,6)

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x}\int \psi^*\psi\, dx = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (173,8)$$

(wir setzen voraus, daß ψ normiert ist und daher $\int \psi^*\psi\, dx = 1$).

Wir sehen, daß für ein hinreichend schmales Paket

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

ist. Andererseits ist der Mittelwert der Koordinate

$$\bar{x} = \int x\psi^*\psi\, dx$$

nichts anderes als die Koordinate des „Schwerpunkts" des Pakets $\psi^*\psi$, und (173,8) ist einfach die NEWTONsche Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt des Pakets. Wenn sich die Form des Pakets nicht mit der Zeit ändern würde, hätte (173,8) für jeden beliebigen Zeitpunkt Gültigkeit, und man könnte von einer Bewegung des Pakets nach den Gesetzen der klassischen Mechanik sprechen. Wir wissen aber, daß die Pakete im allgemeinen zerfließen. Die Gleichung (173,8) ist daher nur für eine solche Zeitspanne gültig, während der im Bereich des Pakets $\frac{\partial U}{\partial x}$ als konstant angesehen werden kann. Darum kann z. B. die Zeit T, in deren Verlauf sich die Breite des Pakets verdoppelt, als Kennzeichen für die Anwendbarkeit der klassischen Mechanik auf die Bewegung im gegebenen Feld dienen.

EHRENFEST führt folgende Beispiele an, die mit großer Anschaulichkeit den Übergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik deuten.

1. Die Masse des Teilchens sei 1 g, die Breite des Pakets 10^{-3} cm. Diese Breite verdoppelt sich im Verlauf von $T = 10^{21}$ sec. Während dieser Zeit hat die Beziehung (173,8) Gültigkeit, d. h., während dieser Zeit bewegt sich der Schwerpunkt des Pakets auf einer klassischen Bahn. Mit anderen Worten — für große Massen gilt die klassische Mechanik.

2. Es sei $m = 1{,}7\cdot 10^{-24}$ g, die Breite des Pakets $= 10^{-8}$ cm — ein Teilchen atomarer Abmessungen. Hier ist $T = 10^{-13}$ sec, d. h., daß die klassische Mechanik in diesem Falle überhaupt nicht anwendbar ist.

3. Ein Übergangsfall: $m = 10^{-12}$ g, Breite des Pakets $= 10^{-4}$ cm. Hier ist $T = 10^{-7}$ sec, d. h., daß man noch in gewisser Näherung von einer Anwendbarkeit der klassischen Mechanik sprechen kann.

Diese Frage können wir auch von einer anderen Seite betrachten. Die Beziehung

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\overline{\frac{\partial U}{dx}} \tag{173,7}$$

ist zweifellos richtig. Wenn in allen Fällen die Gleichung

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}$$

gelten würde, so könnte man statt (173,7) auch

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \tag{173,9}$$

schreiben. Diese Gleichung beschreibt die Bewegung des Paket-Schwerpunktes auf klassischer Bahn. Aber (173,9) hat nur in einigen speziellen Fällen Gültigkeit. Daher folgt aus (173,7) im allgemeinen nicht (173,9). Man kann zeigen, daß allgemein folgender Ausdruck gültig ist[1]):

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3}\overline{(\Delta x)^2} + \ldots,$$

wobei $\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\bar{x})^2}$ das Mittel des Quadrates der Paketbreite ist. Setzen wir dies in (173,7) ein, so erhalten wir

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3}\overline{(\Delta x)^2}. \tag{173,10}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man für ein schmales Paket $(\overline{(\Delta x)^2} \ll 1)$, in dessen Bereich sich das Feld nur wenig ändert, rechts alle Glieder vom zweiten an vernachlässigen kann, um (173,10) zu bekommen. Da aber das Paket zerfließt, wächst $\overline{(\Delta x)^2}$ mit der Zeit an. Daher hat (173,10) nur für eine Zeitspanne Gültigkeit, während der die absoluten Beträge des zweiten und der folgenden Glieder wesentlich kleiner sind als der des ersten (siehe obige Beispiele für das Zerfließen der Pakete).

Wir können jetzt allgemein die physikalischen Bedingungen formulieren, unter denen die Bewegung von Mikroteilchen „quasiklassisch" betrachtet werden kann: 1. Die Veränderung des Feldes, in dem sich das Teilchen bewegt, muß hinreichend langsam vor sich gehen [so daß man die höheren Ableitungen in (173,10) vernachlässigen kann]; 2. das Paket muß hinreichend schmal sein, der Impuls des Teilchens daher — und entsprechend auch seine kinetische Energie — hinreichend groß.

Oben wurde gezeigt, daß in einigen Fällen die Beziehung

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}$$

[1]) Siehe D. I. Blochinzew, Grundlagen der Quantenmechanik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

genau gilt. Als Beispiel betrachten wir den linearen, harmonischen Oszillator. Seine potentielle Energie ist bekanntlich

$$U = \frac{fx^2}{2},$$

daher ist $\frac{\partial U}{\partial x} = fx$ und

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = f \int \psi^* x \psi \, dx = f\bar{x} = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}.$$

In diesem Falle folgt aus (173,7)

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -f\bar{x},$$

die klassische Bewegungsgleichung eines linearen harmonischen Oszillators, die für einen beliebigen Zeitpunkt gültig ist.

Die Gleichung (173,10) gestattet, sofort zu sagen, in welchen Fällen ein analoges Resultat zu erwarten ist, d. h. in welchen Fällen eine Bewegung des Paket-Schwerpunktes auf klassischen Bahnen stattfindet. Da bereits im zweiten Glied rechts die dritte Ableitung von $U(x)$ enthalten ist, ergeben dieses und die folgenden Glieder Null, wenn $U(x)$ die Form

$$U(x) = a + bx + cx^2$$

hat. Die klassische Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt des Pakets ist also z. B. für den Fall einer freien Bewegung ($U = a$), eines homogenen Feldes ($U = a + bx$) und eines linearen Oszillators gültig.

§ 174. Die Bewegungsgleichungen

Im vorigen Paragraphen fanden wir die zeitlichen Ableitungen der *Mittelwerte* mechanischer Größen (x und p). Wir wollen jetzt untersuchen, was man über die zeitlichen Ableitungen der mechanischen Größen selbst sagen kann. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß es in der Quantenmechanik nicht so einfach wie in der klassischen Mechanik ist, auf diese Frage eine Antwort zu geben. Es kann nämlich irgendeine mechanische Größe F zu dem bestimmten Zeitpunkt t_0 den bestimmten Wert λ haben, jedoch im folgenden Augenblick $t_0 + \Delta t_0$ schon kann dieser Wert *unbestimmt werden*. Daher hat die übliche Definition der zeitlichen Ableitung für eine mechanische Größe

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

in der Quantenmechanik im allgemeinen keinen Sinn.

In der Quantenmechanik werden die dynamischen Veränderlichen durch Operatoren dargestellt. Daher müssen wir zur Beantwortung der Frage nach der zeitlichen Ableitung einer mechanischen Größe erst einmal definieren, was wir unter der zeitlichen Ableitung eines Operators verstehen. Im Einklang mit dem allgemeinen Charakter der Quantenmechanik kann dieser Definition folgende Behauptung zugrunde gelegt werden: Die zeitliche Ableitung des Mittelwertes der mechanischen Größe F ist gleich dem Mittelwert der Ableitung

dieser Größe, also

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{\overline{dF}}{dt}.$$

Somit ist für

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \int \psi^* K \psi \, d\tau \tag{174,1}$$

definitionsgemäß

$$\frac{dF}{dt} = K. \tag{174,1'}$$

Wir schreiben jetzt den Mittelwert

$$\bar{F} = \int \psi^* F \psi \, d\tau$$

hin und setzen voraus, daß der Operator F nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann ist

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} F \psi \, d\tau + \int \psi^* F \frac{\partial \psi}{\partial t} d\tau.$$

Wir ersetzen die Ableitungen $\dot{\psi}^*$ und $\dot{\psi}$ durch den HAMILTONschen Operator H, indem wir die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung ausnutzen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} H\psi,$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} H\psi^* = \frac{2\pi i}{h} (H\psi)^*.$$

(Wir erinnern daran, daß der Operator H die imaginäre Einheit nicht enthält, so daß $H = H^*$ ist.) Nach Einsetzen der beiden Ausdrücke erhalten wir

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \int (H\psi)^* F \psi \, d\tau - \frac{2\pi i}{h} \int \psi^* F (H\psi) \, d\tau.$$

Berücksichtigen wir, daß der Operator H selbstadjungiert ist, so können wir das erste Integral wie folgt umschreiben

$$\int (H\psi)^* F \psi \, d\tau = \int \psi^* H F \psi \, d\tau.$$

Daher ist

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \int \psi^* (HF - FH) \psi \, d\tau. \tag{174,2}$$

In § 59 (Bd. I) sahen wir, daß in der klassischen Mechanik die zeitliche Ableitung einer mechanischen Größe $F(q_k, p_k)$ durch die POISSONsche Klammer (H, F) dargestellt werden kann:

$$\frac{dF}{dt} = (H, F), \tag{59,3}$$

wobei H die HAMILTON-Funktion ist. Analog dazu führen wir den Operator

$$\frac{2\pi i}{h}(HF - FH) = [H, F] \tag{174,3}$$

ein und werden ihn *quantenmechanische* POISSON-*Klammer* nennen. Die Formel (174,2) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\frac{d\overline{F}}{dt} = \int \psi^* [H, F] \psi \, d\tau . \tag{174,4}$$

Auf Grund der in (174,1′) enthaltenen Definition der zeitlichen Ableitung einer mechanischen Größe können wir jetzt schreiben

$$\frac{dF}{dt} = [H, F], \tag{174,5}$$

und die Formel (174,4) bekommt die Form

$$\frac{d\overline{F}}{dt} = \overline{[H, F]} . \tag{174,6}$$

Gleichungen vom Typ (174,5) nennt man *Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik.*

Es sei z. B. $F = q$, wobei q der Operator einer beliebigen Koordinate ist. Dann haben wir nach (174,5)

$$\frac{dq}{dt} = [H, q] . \tag{174,7}$$

Mit $F = p$ bekommen wir

$$\frac{dp}{dt} = [H, p] . \tag{174,8}$$

Die Gleichungen (174,7) und (174,8) sind ein genaues Analogon zu den HAMILTONschen kanonischen Gleichungen, die mit Hilfe der POISSONschen Klammern aufgeschrieben sind [siehe Bd. I, (59,4)]:

$$\frac{dq}{dt} = (H, q), \quad \frac{dp}{dt} = [H, p] .$$

Es sei jetzt speziell $q = x$, dann ist

$$\frac{dx}{dt} = [H, x] . \tag{174,9}$$

Auf Grund der Definition der quantenmechanischen POISSON-Klammern (174,3) ist

$$\begin{aligned}[H, x] &= \frac{2\pi i}{h}(Hx - xH) = \\ &= \frac{2\pi i}{h}\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x + U(x)\,x + \frac{h^2}{8\pi^2 m}x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\,U(x)\right] = \\ &= \frac{ih}{4\pi m}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}x\right).\end{aligned}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen (siehe § 154, S. 5), daß

$$\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}x\right)\psi = -2\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

so daß

$$[H, x] = -\frac{ih}{2\pi m}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{h}{2\pi i m}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{p}{m}.$$

Wir erhalten also

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \tag{174,10}$$

— die bekannte Beziehung der klassischen Mechanik.

Nehmen wir jetzt an, daß $p = p_x$ ist. Dann haben wir

$$\frac{dp_x}{dt} = [H, p_x] = \frac{2\pi i}{h}(Hp_x - p_x H).$$

Berücksichtigen wir, daß $\frac{\partial}{\partial x}$ mit $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ kommutativ ist, nicht aber mit $U(x)$, so erhalten wir

$$\frac{2\pi i}{h}(Hp_x - p_x H)\psi = \left(U\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}U\right)\psi = -\frac{\partial U}{\partial x}\psi$$

und

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{174,11}$$

die NEWTONsche Bewegungsgleichung in Operatorenschreibweise.

Beachten wir die in (174,6) festgelegte Bedeutung einer zeitlichen Ableitung des Mittelwertes, so sehen wir, daß die Formeln (174,10) und (174,11) mit den Beziehungen

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\bar{p}}{m}, \quad \frac{d\bar{p}_x}{dt} = -\overline{\frac{\partial U}{\partial x}},$$

d. h. mit den Aussagen des EHRENFESTschen Theorems, gleichbedeutend sind.

Wir sehen, daß die am Anfang dieses Kapitels gestellte Aufgabe, das System der Quantenmechanik in möglichst enger Anlehnung an das der klassischen Mechanik aufzubauen, vollkommen gelöst ist. Das Ergebnis dieses Paragraphen speziell kann man folgendermaßen formulieren: Die dynamischen Veränderlichen sind in der Quantenmechanik und in der klassischen Mechanik ein und denselben Gleichungen unterworfen; der Unterschied besteht lediglich darin, daß in der Quantenmechanik diese Gleichungen für Operatoren (d. h. für Größen einer anderen mathematischen Gattung) und Mittelwerte gelten.

Um die vollkommene Analogie zwischen den dynamischen Veränderlichen der klassischen Mechanik und den Operatoren der Quantenmechanik noch mehr herauszuheben, wollen wir zeigen, daß die klassischen und quantenmechanischen POISSON-Klammern für kanonisch konjugierte Veränderliche ein und denselben Zahlenwert haben. In § 59 definierten wir die POISSONschen Klammern für ein beliebiges Paar von Funktionen der Koordinaten

und Impulse $f(q_k, p_k)$, $g(q_k, p_k)$, wobei q_k und p_k die Gesamtheit aller Koordinaten und Impulse ist, von denen f und g abhängen, folgendermaßen:

$$(f, g) = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \qquad (59,7)$$

Wir zeigten speziell, daß

$$(q_k, p_l) = 0, \quad (p_k, p_l) = 0, \quad (q_k, p_k) = 1.$$

In Analogie zu den quantenmechanischen POISSON-Klammern $[H, F]$ wollen wir jetzt die quantenmechanischen POISSON-Klammern für ein beliebiges Paar kanonisch konjugierter Operatoren definieren:

$$\frac{2\pi i}{h}(GF - FG) = [G, F]. \qquad (174,12)$$

In solchem Fall erhalten wir speziell

$$[p_x, x] = \frac{2\pi i}{h}(p_x x - x p_x),$$

$$[p_y, x] = \frac{2\pi i}{h}(p_y x - x p_y),$$

$$[p_x, p_y] = \frac{2\pi i}{h}(p_x p_y - p_y p_x).$$

Da jedoch nach § 167

$$p_x x - x p_x = \frac{h}{2\pi i}, \qquad (167,6)$$

$$p_y x - x p_y = 0, \qquad (167,5)$$

$$p_x p_y - p_y p_x = 0, \qquad (167,3)$$

so ist in genauer Übereinstimmung mit den Zahlenwerten der POISSONschen Klammern in der klassischen Mechanik

$$[p_x, x] = 1; \quad [p_y, x] = 0; \quad [p_x, p_y] = 0.$$

§ 175. Die Erhaltungssätze

In der klassischen Mechanik gibt es eine Reihe von wichtigen Erhaltungssätzen — den Energieerhaltungssatz, die Erhaltungssätze des Impulses und des Impulsmoments. Auch in der Quantenmechanik gibt es entsprechende Erhaltungssätze.

Der Operator F irgendeiner mechanischen Größe hänge nicht explizit von der Zeit ab,

$$F = F(q, p) = F\left(q, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\right),$$

wobei q und p die Gesamtheit aller Koordinaten und Impulse ist. Die zeitliche Ableitung des Mittelwerts $\overline{F}$ ist entsprechend dem vorigen Paragraphen gleich

$$\frac{d\overline{F}}{dt} = \overline{[H, F]} \tag{174,6}$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{d\overline{F}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \int \psi^* (HF - FH) \psi \, dx. \tag{174,2}$$

Wir sehen, daß die zeitliche Ableitung des Mittelwerts $\overline{F}$ dann und nur dann gleich Null ist und dementsprechend der Mittelwert $\overline{F}$ selbst einer Konstante gleicht, wenn

$$HF - FH = 0. \tag{175,1}$$

Somit ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konstanz des Mittelwertes $\overline{F}$ die Kommutativität der Operatoren F und H.

Um den Sinn der Bedingung (175,1) klarzustellen, wenden wir sie zunächst auf den Fall an, in dem sich das System in einem durch die *Eigenfunktion* des Operators F beschriebenen Zustand befindet. Es sei also für beliebige Werte der Koordinaten

$$F\psi = \lambda\psi.$$

Durch Differentiation nach der Zeit unter Berücksichtigung, daß F nicht explizit von der Zeit abhängt, $\left(\frac{\partial F}{\partial t} = 0\right)$, erhalten wir

$$F\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\lambda}{dt}\psi + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

oder, da

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} H\psi,$$

auch

$$\frac{d\lambda}{dt}\psi = -\frac{2\pi i}{h}(FH\psi - \lambda H\psi).$$

Wenn aber F und H kommutieren, so ist

$$FH\psi = HF\psi = \lambda H\psi$$

und wir bekommen

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \lambda = \text{const}.$$

Befindet sich also das System in einem durch die Eigenfunktion des Operators F beschriebenen Zustand, d. h., hat die dynamische Veränderliche einen bestimmten Wert λ und sind die Operatoren F und H kommutativ, so ist dieser bestimmte Wert λ von der Zeit unabhängig.

Hierfür zwei Beispiele:

1. Für ein freies Teilchen hat der Operator H die Form

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2}.$$

Wir wissen, daß die Eigenfunktionen des Operators p_x, der Komponente des Impulses,

$$p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$$

wie folgt lauten: $\psi = e^{i\frac{2\pi}{h}x\cdot p_x}$. Wir erhalten also

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = p_x\psi.$$

Es ist offensichtlich, daß die Operatoren H und p_x im vorliegenden Falle kommutativ sind,

$$Hp_x = p_x H,$$

und demzufolge nach dem Vorausgegangenen

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad p_x = \text{const},$$

d. h., die Projektion des Impulses eines freien Teilchens ist eine Konstante. Der Impulserhaltungssatz für ein Teilchen, auf das keine Kräfte wirken, hat also auch in der Quantenmechanik Gültigkeit.

2. Da der Energieoperator natürlich mit sich selbst kommutativ ist, muß in allen Fällen, in denen der Zustand des Systems durch eine *Eigen*funktion des Energieoperators beschrieben wird, d. h., in denen

$$H\psi = E\psi,$$

auch

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad E = \text{const}$$

gelten. Das aber ist der Energieerhaltungssatz.

Ist ψ nicht die Eigenfunktion des Operators F, so hat die dynamische Veränderliche keinen bestimmten Wert. Daher müssen in diesem Falle auch die Erhaltungssätze anders formuliert werden. Aus der Bedingung der Kommutativität der Operatoren F und H folgt vor allem die Konstanz des *Mittelwertes von F*. In diesem Falle aber sind nicht nur die Mittelwerte, sondern auch *die Wahrscheinlichkeiten der bestimmten Werte für F* zeitunabhängig,

Aus der Bedingung

$$HF = FH, \tag{175,2}$$

folgt nämlich nach § 167, daß die Operatoren H und F gemeinsame Eigenfunktionen haben:

$$H\psi_n = E_n\psi_n\,,$$
$$F\psi_n = \lambda_n\psi_n$$

Wir wissen aber, daß die Eigenfunktionen des Energieoperators *stationäre Zustände* beschreiben (§ 172). In stationären Zuständen aber kommt die zeitliche Abhängigkeit durch den Faktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t}$ zum Ausdruck. Es sei nun, daß wir irgendeinen beliebigen Zustand haben, der durch die Funktion $\psi(x,t)$ beschrieben ist. Er kann als Superposition stationärer Zustände dargestellt werden:

$$\psi(x,t) = c_1\psi_1^0(x)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{h}E_1 t} + c_2\psi_2^0(x)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{h}E_2 t} + \ldots + c_n\psi_n^0(x)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t} + \ldots. \qquad (175,3)$$

Für $t = 0$ nimmt diese Reihe die Form

$$\psi(x,0) = c_1\psi_1^0(x) + c_2\psi_2^0(x) + \ldots + c_n\psi_n^0(x) + \ldots$$

an, wobei die rechte Seite eine Entwicklung der Funktion $\psi(x,0)$ nach den orthogonalen Funktionen $\psi_1^0(x), \ldots, \psi_n^0(x), \ldots$ darstellt (siehe § 158). Die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ der Reihe haben folgende Bedeutung: Die Quadrate ihrer absoluten Beträge $|c_n|^2$ geben die Wahrscheinlichkeiten der bestimmten Werte E_n und demzufolge auch λ_n zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Führen wir die Bezeichnung

$$c_n e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t} \equiv c_n(t)$$

ein, so können wir die Reihe (175,3) folgendermaßen umschreiben:

$$\psi(x,t) = c_1(t)\,\psi_1^0(x) + c_2(t)\,\psi_2^0(x) + \ldots + c_n(t)\,\psi_n^0(x) + \ldots,$$

wobei die Quadrate der absoluten Beträge $|c_1(t)|^2, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten der bestimmten Werte für die mechanische Größe zum Zeitpunkt t darstellen. Es ist aber offensichtlich, daß

$$|c_n(t)|^2 = \overset{*}{c}_n(0)\cdot e^{i\frac{2\pi}{h}E_n t}\cdot c_n(0)\,e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t} = |c_n(0)|^2.$$

Die Quadrate der absoluten Beträge der Koeffizienten $c_n(t)$ hängen also nicht von der Zeit ab,

$$|c_n(t)|^2 = \text{const}.$$

Das aber bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeiten der bestimmten Werte für F zeitunabhängig sind.

XIII. DIE BEWEGUNG IM ZENTRALFELD

§ 176. Das Impulsmoment

In diesem Abschnitt wollen wir ein wichtiges Problem der Quantenphysik – die Bewegung im Zentralfeld – behandeln.

Beim Studium der Zentralbewegung eines Massenpunktes in der NEWTONschen Mechanik spielt eine mechanische Größe – das Moment der Bewegungsgröße in bezug auf ein unbewegliches Zentrum (wir werden es der Kürze halber Drehimpuls oder einfach Impulsmoment nennen) eine wichtige Rolle. Eine ebenso wichtige Rolle spielt in der Quantenmechanik der Operator des Impulsmomentes. Die Operatoren der Komponenten des Impulsmomentes sind in Kartesischen Koordinaten (§ 161):

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ L_y &= \frac{h}{2\pi i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ L_z &= \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (176,1)$$

In diesem Abschnitt werden wir häufig räumliche Polarkoordinaten benutzen. Wir beginnen daher mit der Herleitung der notwendigen Formeln in diesen Koordinaten. Die Transformationsformeln für den Übergang von Kartesischen zu räumlichen Polarkoordinaten und umgekehrt sind gegeben zu

$$\left.\begin{aligned} &x = r\sin\vartheta\cos\varphi, & &y = r\sin\vartheta\sin\varphi, & &z = r\cos\vartheta, \\ &r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & &\vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; & &\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (176,2)$$

Man könnte nun natürlich die Variablen in (176,1) nach den üblichen Regeln der Differentialrechnung ersetzen. Wir erreichen unser Ziel jedoch auf folgende Weise wesentlich schneller. Das totale Differential von ψ, das als Funktion von x, y und z anzusehen ist, lautet:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz.$$

Unter Benutzung der Transformationsformeln (176,2) und der Annahme, daß r und ϑ konstant seien und nur φ sich ändert, vollziehen wir jetzt den Übergang zu Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}r\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial y}r\sin\vartheta\cos\varphi = x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Nach (176,1) ist aber

$$L_z\psi = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

und damit

$$L_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{176,3}$$

Nehmen wir nun an, daß r und φ konstant sind und nur ϑ variabel, dann ergibt die analoge Rechnung

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \operatorname{ctg}\vartheta\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \operatorname{tg}\vartheta\, z\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{176,4}$$

Wir multiplizieren jetzt die zweite der Formeln (176,1) mit i und addieren sie zur ersten. Nach einer kleinen Rechnung ergibt sich, wenn wir den erhaltenen Operator auf eine beliebige Funktion ψ anwenden:

$$(L_x + iL_y)\,\psi = \frac{h}{2\pi}\left[iz\frac{\partial\psi}{\partial y} + z\frac{\partial\psi}{\partial x} - (x+iy)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]. \tag{176,5}$$

Beachten wir, daß

$$x + iy = r\sin\vartheta\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}\sin\vartheta\,,$$

$$z = r\cos\vartheta\,,$$

so erhalten wir

$$(L_x + iL_y)\,\psi = \frac{h}{2\pi}e^{i\varphi}\left(ire^{-i\varphi}\cos\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial y} + re^{-i\varphi}\cos\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial x} - r\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{h}{2\pi}e^{i\varphi}\left[i(x-iy)\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial y} + (x-iy)\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial x} - r\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] =$$

$$= \frac{h}{2\pi}e^{i\varphi}\left[\operatorname{ctg}\vartheta\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \operatorname{tg}\vartheta z\,\underline{\partial\psi} + i\operatorname{ctg}\vartheta\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]$$

und schließlich unter Berücksichtigung von (176,4) nach Weglassen der Funktion ψ

$$L_x + iL_y = \frac{h}{2\pi}e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{176,6}$$

Ganz analog finden wir

$$L_x - iL_y = -\frac{h}{2\pi}e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{176,7}$$

Die Formeln (176,6) und (176,7) ermöglichen das schnelle Auffinden des Operators für das Quadrat des Impulsmoments. Man kann sich leicht davon überzeugen (siehe Übung 5 zu § 154), daß

$$\mathfrak{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(L_x + i\quad)(L_x - iL_y) + \frac{1}{2}(L_x - iL_y)(L_x + iL_y) + L_z^2. \tag{176,8}$$

Zur Berechnung dieses Operators hat man die Formeln (176,6), (176,7) und (176,3) anzuwenden und unter genauer Einhaltung der vorgeschriebenen Reihenfolge für die Multiplikation der Operatoren sorgfältig zu differenzieren. Zum Beispiel:

$$(L_x + iL_y)(L_x - iL_y)\psi = -\frac{h^2}{4\pi^2} e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left\{e^{-i\varphi}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - i\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\varphi}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}^2\vartheta\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right).$$

Haben wir auf die gleiche Weise die beiden anderen Operatoren berechnet (siehe Übung 3 am Schluß dieses Paragraphen) und in (176,8) eingesetzt, so erhalten wir nach einigen Kürzungen

$$\mathfrak{L}^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

oder zusammenfassender

$$\mathfrak{L}^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{176,9}$$

Der Operator

$$\Lambda = -\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{176,10}$$

wird LEGENDREscher Operator genannt. Er spielt in der Theorie der Kugelfunktionen und in allen Problemen der mathematischen Physik, in denen Kugelfunktionen auftreten, eine große Rolle. Mit Hilfe von (176,10) schreiben wir kurz

$$\mathfrak{L}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\Lambda. \tag{176,11}$$

Übungen:

1. Unter Benutzung der Formeln (176,2) ist zu zeigen, daß

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{176,12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{176,13}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}. \tag{176,14}$$

2. Durch direkte Koordinatentransformation ist zu zeigen, daß die Operatoren L_x, L_y, L_z in Polarkoordinaten folgende Gestalt haben:

$$L_x = -\frac{h}{2\pi i}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{176,15}$$

$$L_y = \frac{h}{2\pi i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{176,16}$$

$$L_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{176,17}$$

[Hinweis: Es sind die Formeln (176,12) bis (176,14) zu benutzen.]

3. Es ist zu beweisen, daß

$$(L_x - iL_y)(L_x + iL_y)\psi = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}^2\vartheta\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right).$$

4. Es ist zu zeigen, daß jeder der Operatoren der Übung 2 mit $\mathfrak{L}^2$ kommutativ ist. Kann man dies ohne Rechnung erkennen?

§ 177. Die Eigenschaften des Impulsmomentes

Das Impulsmoment der Quantenmechanik besitzt einige eigentümliche Eigenschaften, deren Untersuchung wir uns jetzt zuwenden wollen. Es zeigt sich vor allem, daß die drei Projektionen L_x, L_y und L_z nicht gleichzeitig bestimmte Werte haben können, d. h., wenn eine von ihnen einen bestimmten Wert hat, dann sind die beiden anderen unbestimmt. Das folgt daraus, daß — wie wir gleich sehen werden — die Operatoren L_x, L_y und L_z nicht kommutativ sind. Zum Beweis berechnen wir z. B. die Produkte L_xL_y und L_yL_x und bilden den Operator $L_xL_y - L_yL_x$.

Bei der Rechnung müssen wir stets daran denken, daß wir es mit Operatoren zu tun haben und die Vertauschungsregeln für Koordinaten und Impulse (§ 167) berücksichtigen. Wir errechnen also:

$$L_xL_y = (yp_z - zp_y)(zp_x - xp_z) = yp_zzp_x - yp_zxp_z - zp_yzp_x + zp_yxp_z,$$
$$L_yL_x = (zp_x - xp_z)(yp_z - zp_y) = zp_xyp_z - zp_xzp_y - xp_zyp_z + xp_zzp_y,$$
$$L_xL_y - L_yL_x = y(p_zzp_x - zp_xp_z) + x(zp_yp_z - p_zzp_y).$$

Weiter erhalten wir unter Benutzung der Vertauschungsregel

$$p_zz - zp_z = \frac{h}{2\pi i}$$

und nach Vereinfachung:

$$L_xL_y - L_yL_x = \frac{h}{2\pi i}(yp_x - xp_y) = -\frac{h}{2\pi i}L_z. \tag{177,1}$$

Analog ergibt sich für die beiden anderen Beziehungen:

$$L_yL_z - L_zL_y = -\frac{h}{2\pi i}L_x, \tag{177,2}$$

$$L_zL_x - L_xL_z = -\frac{h}{2\pi i}L_y. \tag{177,3}$$

Somit ist bewiesen, daß die Operatoren L_x, L_y und L_z nicht kommutativ sind und daher nicht gleichzeitig bestimmte Werte (§ 167) haben können.

Hingegen ist jeder dieser Operatoren mit $\mathfrak{L}^2$ kommutativ. Das beweisen wir wie folgt: Wir multiplizieren (177,1) von rechts mit L_y:

$$L_x L_y^2 = -\frac{h}{2\pi i} L_z L_y + L_y L_x L_y . \qquad (177,4)$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite formen wir wieder mit Hilfe von (177,1) um:

$$L_y L_x L_y = -\frac{h}{2\pi i} L_y L_z + L_y^2 L_x ,$$

so daß sich

$$L_x L_y^2 - L_y^2 L_x = -\frac{h}{2\pi i} (L_z L_y + L_y L_z) \qquad (177,5)$$

ergibt. Multiplizieren wir nun (177,3) von rechts mit L_z, so erhalten wir analog nach wiederholter Anwendung derselben Formel (177,3)

$$L_x L_z^2 = \frac{h}{2\pi i} L_y L_z + L_z L_x L_z = \frac{h}{2\pi i} (L_y L_z + L_z L_y) + L_z^2 L_x ,$$

wonach

$$L_x L_z^2 - L_z^2 L_x = \frac{h}{2\pi i} (L_z L_y + L_y L_z) \qquad (177,6)$$

ist. Durch Addition von (177,5) und (177,6) finden wir

$$L_x (L_y^2 + L_z^2) - (L_y^2 + L_z^2) L_x = 0$$

oder auch

$$L_x (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) - (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) L_x = 0 ,$$

woraus sich schließlich

$$L_x \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2 L_x = 0 \qquad (177,7)$$

ergibt. Infolge der Symmetrieeigenschaft gelten auch die Beziehungen

$$L_y \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2 L_y = 0 , \qquad (177,8)$$

$$L_z \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2 L_z = 0 . \qquad (177,9)$$

Somit hat der Operator des Impulsmomentquadrats gemeinsame Eigenfunktionen mit den Operatoren jeder seiner Projektionen. Das aber bedeutet, daß das Impulsmoment und eine seiner Projektionen gleichzeitig bestimmte Werte haben können.

Wir beweisen jetzt, daß für die Operatoren $\mathfrak{L}^2$, L_x, L_y und L_z im zentralsymmetrischen Feld $[U = U(r)]$ der Erhaltungssatz gilt. Zu diesem Zweck ist es günstiger, zu Polar-

koordinaten überzugehen. Der Energieoperator hat in Polarkoordinaten die Form

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta + U = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\Lambda\right] + U(r) =$$

$$= -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda\right) + U(r). \qquad (177{,}10)$$

Es ist zweckmäßig, in Analogie zu dem gewöhnlich benutzten Operator für den linearen Impuls

$$p_q = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$$

einen Operator p_r für das radiale Moment einzuführen. Diesen definieren wir folgendermaßen:

$$p_r\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right).$$

Dann ist

$$p_r^2\psi = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\psi = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right). \qquad (177{,}11)$$

Wenn wir noch berücksichtigen, daß $\frac{h^2}{4\pi^2}\Lambda = \mathfrak{L}^2$ ist, dann können wir den Ausdruck (177,10) umschreiben in

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\mathfrak{L}^2\right) + U(r). \qquad (177{,}12)$$

Das aber ist dieselbe Form, welche die Hamilton-Funktion für die Bewegung im Zentralfeld besitzt. Wir zeigen jetzt, daß der Operator einer beliebigen Komponente des Impulsmoments, z. B. L_z, mit H kommutativ ist. Wenden wir die Operatoren auf eine beliebige Funktion $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ an, so erhalten wir

$$HL_z\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\mathfrak{L}^2\right) + U(r)\right]L_z\psi.$$

Da aber der Operator $L_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ ist, so wirkt er nur auf eine Funktion von φ, während p_r^2 und $U(r)$ nur auf eine Funktion von r wirken. Es ist also leicht zu sehen, daß

$$p_r^2 L_z\psi = L_z p_r^2\psi, \quad U(r)L_z\psi = L_z U(r)\psi$$

ist. Außerdem sind nach (177,9) L_z und $\mathfrak{L}^2$ kommutativ. Folglich ist

$$HL_z = L_z H.$$

Beachten wir, daß auch die Operatoren L_x und L_y nur auf Winkelfunktionen wirken und mit $\mathfrak{L}^2$ kommutativ sind, so erkennen wir, daß alle diese Operatoren mit dem Energieoperator kommutieren. Dies aber bedeutet nach § 175, daß sowohl der Betrag des Impulsmoments als auch jede beliebige seiner Projektionen zeitlich konstant sind.

Wir sahen nun schon oben, daß nur eine der Projektionen von $\mathfrak{L}$ (z. B. L_z) einen bestimmten Wert haben kann, während die beiden anderen dabei unbestimmt bleiben. Da anderseits sowohl $\mathfrak{L}^2$ als auch L_z mit H kommutativ sind, so können wir behaupten (siehe § 167), daß alle drei Operatoren $\mathfrak{L}^2$, L_z und H gemeinsame Eigenfunktionen haben und daher der Betrag des Impulsmoments, eine seiner Projektionen und die Energie gleichzeitig bestimmte Werte haben können.

§ 178. Eigenfunktionen und Eigenwerte des Quadrats des Impulsmoments

Wir wollen jetzt die Eigenfunktionen und die Eigenwerte der Operatoren $\mathfrak{L}^2$ und L_z aufsuchen. Wie wir in § 176 sahen, lautet der Operator $\mathfrak{L}^2$:

$$\mathfrak{L}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\Lambda. \tag{178,1}$$

Das Problem läßt sich also auf die Bestimmung der Eigenfunktionen des Legendreschen Operators Λ zurückführen, d. h. auf die Ermittlung der Lösungen der Differentialgleichung

$$\Lambda Y = \lambda Y. \tag{178,2}$$

Setzt man Λ nach (176,10) ein, so hat diese Differentialgleichung die Form

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{178,3}$$

Das aber ist die aus der mathematischen Physik bekannte Gleichung für Kugelfunktionen[1]). Als Kugelfunktionen bezeichnet man im allgemeinen die homogenen Polynome, die die Laplacesche Gleichung $\Delta u = 0$ oder, in Kartesischen Koordinaten geschrieben,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{178,4}$$

befriedigen.

Wir wollen in dieser Gleichung nun von Kartesischen zu Polarkoordinaten übergehen. Dabei erhalten wir [siehe Teil I, Formel (124,6)]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{178,5}$$

Das homogene Polynom l-ten Grades, das diese Gleichung erfüllt, nimmt beim Übergang von Kartesischen zu Polarkoordinaten, also bei Ersatz von x, y, z durch $r\cos\varphi\sin\vartheta$,

[1]) Siehe: W. I. Smirnow, „Lehrgang der höheren Mathematik", Bd. 3,2, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955, Kap. VI. Die Theorie der Kugelfunktionen, wie sie in der Quantenmechanik verwendet werden, siehe bei W. A. Fock: „Elemente der Quantenmechanik" (В. А. Фок: „Начала квантовой механики", стр. 117—126, Кибуч, 1932). Siehe auch: J. Lense, „Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik", W. de Gruyter, Berlin 1947, oder auch A. Sommerfeld, „Partielle Differentialgleichungen der Physik", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1947.

$r \sin\varphi \sin\vartheta$, $r\cos\vartheta$ folgende Form an:

$$u = r^l Y(\vartheta, \varphi), \tag{178,6}$$

wobei $Y(\vartheta, \varphi)$ ein Polynom aus $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ bedeutet. Wir setzen (178,6) in (178,5) ein. So erhalten wir vor allem

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = l r^{l+1} Y(\vartheta, \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = l(l+1) r^l Y(\vartheta, \varphi).$$

Die Gleichung (178,5) ergibt nach Kürzung durch r^l

$$l(l+1)\, Y + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (178,3), so sehen wir, daß

$$\lambda = l(l+1)$$

ist. Da nun

$$\Lambda u = l(l+1)\, u$$

ist, erscheinen also nach (178,1) als Eigenwerte des Impulsmomentquadrats die Zahlen

$$L^2 = l(l+1)\frac{h^2}{4\pi^2} \quad (l \text{ ist eine ganze Zahl}).$$

Daraus folgt, daß das Impulsmoment seinem *Betrage* nach die Werte

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi} \tag{178,7}$$

annehmen kann. Die ganze Zahl l ist die Quantenzahl des Impulsmoments. Da jedoch unmittelbar die Eigenwerte $\mathfrak{L}^2$ auftreten, können wir noch nichts über den Vektor $\mathfrak{L}$ aussagen.

Die Eigenfunktionen des Legendreschen Operators sind die Funktionen $Y(\vartheta, \varphi)$. In der Theorie der Kugelfunktionen werden allgemeine Formeln angegeben, mit deren Hilfe man die homogenen Polynome beliebiger Ordnung, die als Lösungen der Laplaceschen Gleichung (178,5) erscheinen, ausrechnen kann. Wir brauchen jedoch nur eine sehr beschränkte Anzahl dieser Polynome. Daher werden wir uns nicht mit der Herleitung der allgemeinen Formeln befassen, sondern bestimmen unmittelbar einige für uns wichtige Lösungen. Dazu kehren wir zur Laplaceschen Gleichung (178,4) in Kartesischen Koordinaten zurück und gehen von den Veränderlichen x, y und z zu neuen Variablen über:

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy, \quad z.$$

Wir haben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

und finden analog

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Die Gleichung (178,4) lautet jetzt

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{178,8}$$

Wir werden die Lösungen dieser Gleichung unter den homogenen Polynomen verschiedenen Grades in ξ, η und z suchen. Das homogene Polynom nullten Grades ist offensichtlich die Konstante $u_0 = \text{const}$, die natürlich der Gleichung (178,8) genügt. Das homogene Polynom ersten Grades ist

$$u_1 = a\xi + b\eta + cz. \tag{178,9}$$

Wir setzen es in (178,8) ein. Da

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0$$

ist, kann man leicht sehen, daß das Polynom (178,9) die Gleichung (178,8) mit beliebigen konstanten Koeffizienten a, b, c befriedigt. Mit anderen Worten, wir erhalten *drei* linear unabhängige Lösungen ersten Grades: ξ, η und z.

Das homogene Polynom zweiten Grades ist

$$u_2 = a\xi^2 + b\eta^2 + cz^2 + d\xi\eta + e\xi z + f\eta z. \tag{178,10}$$

Setzen wir es in (178,8) ein, so erhalten wir eine Beziehung für die Koeffizienten, nämlich

$$2d + c = 0,$$

so daß $d = -\frac{1}{2}c$ und

$$u_2 = a\xi^2 + b\eta^2 + c\left(z^2 - \frac{1}{2}\xi\eta\right) + e\xi z + f\eta z$$

ist. Diese Lösung ist die lineare Kombination folgender linear unabhängiger Polynome zweiten Grades:

$$\xi^2,\ \eta^2,\ z^2 - \frac{1}{2}\xi\eta,\ \xi z,\ \eta z. \tag{178,11}$$

Wir haben nun ein Polynom nullten Grades, drei Polynome ersten und fünf Polynome zweiten Grades. In der Übung zu diesem Paragraphen möge sich der Leser davon überzeugen, daß es sieben homogene Polynome dritten Grades gibt, die die Gleichung (177,8) erfüllen. In der allgemeinen Theorie der Kugelfunktionen wird bewiesen, daß allgemein $2l + 1$ linear unabhängige homogene Polynome vom Grade l existieren, welche die Gleichung (178,8) befriedigen. Wir werden jedoch keine Polynome von höherem als drittem Grade brauchen.

Übung:

Es ist zu zeigen, daß der Gleichung (178,8) die folgenden sieben linear unabhängigen homogenen Polynome dritten Grades genügen:

$$\xi^3,\ \eta^3,\ \xi^2 z,\ \eta^2 z,\ z^2\xi - \frac{1}{4}\xi^2\eta,\ z^2\eta - \frac{1}{4}\eta^2\xi,\ z^3 - \frac{3}{2}\xi\eta z.$$

§ 179. Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators der Projektion des Impulsmoments

Wir wenden uns jetzt dem Operator

$$L_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

zu. Zur Ermittlung seiner Eigenfunktionen hat man eine die Standardbedingungen erfüllende Lösung der Gleichung

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \lambda\psi \tag{179,1}$$

zu suchen. Die gesuchte Lösung lautet bis auf einen beliebigen Phasenfaktor $e^{i\delta}$

$$\psi = e^{i\frac{2\pi}{h}\lambda\varphi}. \tag{179,2}$$

Diese Lösung entspricht offensichtlich im ganzen Variabilitätsbereich der Veränderlichen φ (d. h. von 0 bis 2π) der Endlichkeitsbedingung. Da aber φ eine zyklische Veränderliche ist, müssen die Bedingungen aufgesucht werden, unter denen die Lösung eindeutig ist. Sie wird eindeutig, wenn

$$e^{i\frac{2\pi}{h}\lambda\varphi} = e^{i\frac{2\pi}{h}(\varphi+2\pi)\lambda}$$

oder

$$1 = e^{i\frac{2\pi}{h}\lambda 2\pi}$$

ist. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn

$$\frac{2\pi}{h}\lambda = \pm m$$

ist, wobei m eine ganze Zahl (Null eingeschlossen) ist.

Folglich gilt

$$\lambda = \pm m\frac{h}{2\pi} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{179,3}$$

Daraus folgt, daß man bei der Messung der z-Komponente des Impulsmoments Zahlen erhält, die ganzzahlige Vielfache von $\frac{h}{2\pi}$ sind. Aus Gründen, die aus dem Folgenden ersichtlich werden, wird die ganze Zahl m magnetische Quantenzahl genannt.

§ 180. Beschreibung der verschiedenen Zustände im Zentralfeld

In § 178 fanden wir eine Reihe homogener Polynome, welche die LAPLACEsche Gleichung, d. h. die Gleichung

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{178,8}$$

befriedigen.

Um die Eigenfunktionen des Operators $\mathfrak{L}^2$ in einer für unsere Zwecke bequemen Form darzustellen, müssen wir nur noch in diesen Polynomen zu Polarkoordinaten übergehen. Das homogene Polynom l-ten Grades nimmt dann die Form

$$u = r^l\, Y(\vartheta, \varphi) \tag{178,6}$$

an. Eine derartige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ wird räumliche Kugelfunktion genannt. Bei $r = 1$ erhalten wir die Kugelflächenfunktion $Y(\vartheta, \varphi)$. Da die Beträge des Impulsmoments gleich $\sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}$ sind, bemerken wir vor allem, daß verschiedenen l auch Zustände mit verschiedenen Impulsmomenten entsprechen. In der Atomphysik ist es gebräuchlich, diese Zustände mit den Buchstaben $s, p, d, f, \ldots$ nach folgendem Schema zu bezeichnen¹):

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$\text{Zustand } s, p, d, f, \ldots .$$

Wir wollen diese Zustände einzeln betrachten.

Zustand s: Hier ist $l = 0$. Das Polynom u_0 ist eine Konstante $u_0 = \text{const}$. Das Impulsmoment ist offensichtlich gleich Null.

Zustand p: $l = 1$; die Polynome sind ξ, η, z. Wir gehen zu Polarkoordinaten über, indem wir die Formeln (176,2) benutzen:

$$\begin{aligned}
\xi &= x + iy = \sin\vartheta\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sin\vartheta\, e^{i\varphi},\\
\eta &= x - iy = \sin\vartheta\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \sin\vartheta\, e^{-i\varphi},\\
z &= \cos\vartheta .
\end{aligned}$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß die von uns gefundenen Eigenfunktionen des Quadrats des Impulsmoments gleichzeitig Eigenfunktionen der z-Komponente des Impulsmoments sind. Wir erhalten tatsächlich durch Anwendung des Operators $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ auf die drei gefundenen Funktionen

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\vartheta\, e^{i\varphi}) = \frac{h}{2\pi}(\sin\vartheta\, e^{i\varphi}),$$

¹) Diese Symbole haben historischen Ursprung. Sie sind verknüpft mit der schon vor der Aufstellung der Quantenmechanik bekannt gewordenen Existenz einiger Termtypen, welche die Entstehung der Spektralserien der Alkalimetalle bedingen (siehe § 186).

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}) = -\frac{h}{2\pi}(\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}),$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\vartheta) = 0.$$

Somit kann im Zustand p die Projektion des Impulsmoments auf die z-Achse drei Werte annehmen, nämlich

$$+\frac{h}{2\pi},\quad 0,\quad -\frac{h}{2\pi}.$$

Der Betrag des Impulsmoments hingegen ist in jedem Fall gleich $\sqrt{2}\,\frac{h}{2\pi}$.

Zustand d: $l = 2$; die Polynome (siehe S. 71) sind

$$\xi^2 = (x + iy)^2 = \sin^2\vartheta\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 =$$

$$= (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta = e^{i2\varphi}\sin^2\vartheta,$$

$$\eta^2 = (x - iy)^2 = \sin^2\vartheta\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)^2 =$$

$$= \sin^2\vartheta\,(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) = e^{-i2\varphi}\sin^2\vartheta,$$

$$z^2 - \frac{1}{2}\xi\eta = z^2 - \frac{1}{2}(x + iy)(x - iy) = z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) =$$

$$= \cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}(2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1),$$

$$\xi z = (x + iy)\,z = e^{i\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\eta z = (x - iy)\,z = e^{-i\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Der Betrag von L_z im Zustand p ist gleich $\sqrt{6}\,\frac{h}{2\pi}$. Die möglichen Werte der Komponente L_z finden wir ebenso wie im vorhergehenden Falle; es sind dies

$$+2\frac{h}{2\pi},\quad +\frac{h}{2\pi},\quad 0,\quad -\frac{h}{2\pi},\quad -2\frac{h}{2\pi};$$

insgesamt fünf mögliche Werte.

Zustand f: $l = 3$; alle Rechnungen müssen vom Leser selbständig ausgeführt werden (siehe Übung zu § 178).

Die Polynome sind

$$\xi^3 = e^{i3\varphi}\sin^3\vartheta,$$

$$\eta^3 = e^{-i3\varphi}\sin^3\vartheta,$$

$$\xi^2 z = e^{i2\varphi}\sin^2\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\eta^2 z = e^{-i2\varphi}\sin^2\vartheta\cos\vartheta,$$

$$z^2\xi - \frac{1}{4}\xi^2\eta = \frac{1}{4}e^{i\varphi}\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta - 1),$$

$$z^2\eta - \frac{1}{4}\eta^2\xi = \frac{1}{4}e^{-i\varphi}\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta - 1),$$

$$z^3 - \frac{3}{2}\xi\eta z = \cos^3\vartheta - \frac{3}{2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta = \frac{1}{2}(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta).$$

Das Impulsmoment hat den Wert $\sqrt{12}\,\frac{h}{2\pi}$. Die sieben möglichen Werte der Projektion L_z sind:

$$0,\quad \pm\frac{h}{2\pi},\quad \pm 2\frac{h}{2\pi},\quad \pm 3\frac{h}{2\pi}.$$

Eine Gegenüberstellung der erhaltenen Resultate zeigt die Tabelle XXIII (S. 76). Die ψ-Funktionen sind normiert angegeben. Bezüglich der Normierung müssen wir auf die Theorie der Kugelfunktionen verweisen.

Übung:

Ein Teilchen, das immer in ein und demselben Abstand von einem unbeweglichen Zentrum bleibt, bildet ein Modell, das Rotator genannt wird. Als Beispiel kann das sich drehende zweiatomige Molekül dienen, dessen Atome miteinander starr im Abstand r verbunden sind. Wenn beide Atome durch ein Teilchen ersetzt werden, dessen Masse gleich der reduzierten Masse beider Atome ist, und das sich ständig im Abstand r vom unbeweglichen Schwerezentrum entfernt bewegt, so erhält man ein Modell des starren Rotators. Es ist zu beweisen, daß die SCHRÖDINGER-Gleichung (die Gleichung für die Eigenwerte der Energie) für den Rotator auf die Form

$$-\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\right\} = \frac{8\pi^2 I}{h^2}E\psi$$

gebracht werden kann, wobei $I = mr^2$ das Trägheitsmoment des Rotators ist. Benutzen wir dies, um zu beweisen, daß die Energieeigenwerte des Rotators durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$E_l = l\,(l+1)\frac{h^2}{8\pi^2 I},\quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Tabelle XXIII

Zustand	l	m	ψ-Funktion	L	L_z	L_x L_y
s	0	0		0	0	0 0
		1	$\sqrt{3/8\pi}\,\sin\vartheta\, e^{i\varphi}$	$\sqrt{2}\, h/2\pi$	$h/2\pi$	unbestimmt
p	1	0	$\sqrt{3/4\pi}\,\cos\vartheta$	„	0	„
		-1	$\sqrt{3/8\pi}\,\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}$	„	$-h/2\pi$	„
		2	$\sqrt{15/32\pi}\,\sin^2\vartheta\, e^{i2\varphi}$	$\sqrt{6}\, h/2\pi$	$2h/2\pi$	unbestimmt
		1	$\sqrt{15/8\pi}\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{i\varphi}$	„	$h/2\pi$	„
d	2	0	$\sqrt{5/16\pi}\,(3\cos^2\vartheta - 1)$	„	0	„
		-1	$\sqrt{15/8\pi}\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{-i\varphi}$	„	$-h/2\pi$	„
		-2	$\sqrt{15/32\pi}\,\sin^2\vartheta\, e^{-i2\varphi}$	„	$-2h/2\pi$	„
		3	$\sqrt{35/64\pi}\,\sin^3\vartheta\, e^{i3\varphi}$	$\sqrt{12}\, h/2\pi$	$3h/2\pi$	unbestimmt
		2	$\sqrt{105/32\pi}\,\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{i2\varphi}$	„	$2h/2\pi$	„
		1	$\sqrt{21/64\pi}\,\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta - 1)\, e^{i\varphi}$	„	$h/2\pi$	„
f	3	0	$\sqrt{7/16\pi}\,(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta)$	„	0	„
		-1	$\sqrt{21/64\pi}\,\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta - 1)\, e^{-i\varphi}$	„	$-h/2\pi$	„
		-2	$\sqrt{105/32\pi}\,\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{-i2\varphi}$	„	$-2h/2\pi$	„
		-3	$\sqrt{35/64\pi}\,\sin^3\vartheta\, e^{-i3\varphi}$	„	$-3h/2\pi$	„

§ 181. Räumliche Quantelung

Bis jetzt trug unsere Arbeit in diesem Abschnitt hauptsächlich rechnerischen Charakter. Wir wenden uns nun der physikalischen Auslegung der erhaltenen Resultate zu. Diese Resultate sind in der Tabelle am Schluß des vorigen Paragraphen aufgeführt. Wir sehen, daß das Impulsmoment L bestimmte Werte hat, die durch die Quantenzahl $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ charakterisiert werden und gleich $\sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}$ sind. Für jede Zahl l gibt es außerdem $2l + 1$ Werte für die Projektionen des Impulsmoments auf die z-Achse, die ganzzahlige Vielfache von $\frac{h}{2\pi}$ sind. Die restlichen zwei Projektionen L_x und L_y bleiben unbestimmt. Die Ganzzahligkeit $\left(\text{in Einheiten von } \frac{h}{2\pi}\right)$ der Komponenten des Impulsmoments kann man als *Richtungsquantelung des Vektors* $\mathfrak{L}$ auffassen [analog zu der Richtungsquantelung, der wir in der halbklassischen Bohrschen Theorie begegneten (Teil I, § 106)]. Es existiert allerdings ein

wesentlicher Unterschied, da in der Bohrschen Theorie alle drei Projektionen des Vektors $\mathfrak{L}$ (wie in der klassischen Mechanik) ganz bestimmte Werte haben, und man deshalb von einer Orientierung dieses Vektors im Raum sprechen kann. In der Quantenmechanik hingegen hat nur die eine Projektion L_z einen bestimmten Wert, so daß man nur von einer Orientierung des $\mathfrak{L}$ *in bezug auf die z-Achse* reden darf, während seine räumliche Lage unbestimmt bleibt. Unter diesem Vorbehalt sind die Abb. 227 und 228, die die räumliche Quantelung in den Zuständen p und d veranschaulichen sollen, zu betrachten.

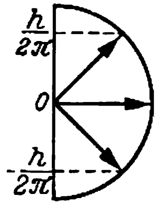


Abb. 227
Räumliche Quantelung
Zustand p

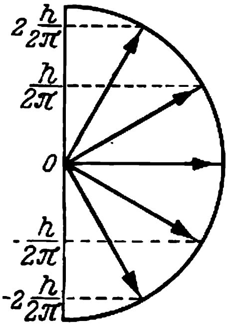


Abb. 228
Räumliche Quantelung
Zustand d

Der Ausdruck „räumliche Quantelung" hat in Wirklichkeit in der Quantenmechanik eine recht bedingte Bedeutung, was gerade durch die Unbestimmtheit der Projektionen L_x und L_y zum Ausdruck kommt. Um den physikalischen Gehalt dieser Erscheinung klarer zu machen, wollen wir irgendeinen bestimmten Zustand, z. B. den Zustand p ($l = 1$), betrachten. Der Operator $\mathfrak{L}^2$ hat in diesem Zustand drei Eigenfunktionen:

$$\psi_+ = \sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \quad \psi_0 = \cos\vartheta, \quad \psi_- = \sin\vartheta\, e^{-i\varphi},$$

aber allen dreien entspricht nur ein Eigenwert für $\mathfrak{L}^2$, der gleich $3\,\frac{h}{2\pi}$ ist. Daher hat man es im Zustand p mit einer dreifachen Entartung zu tun. Infolge der Entartung ist der Zustand durch eine Linearkombination dreier Funktionen ψ_+, ψ_- und ψ_0 zu beschreiben:

$$\psi = c_1\psi_+ + c_2\psi_0 + c_3\psi_-.$$

Wegen der Isotropie des Raumes ist keine Richtung in ihm vor einer anderen ausgezeichnet, solange sie nicht in irgendeiner Weise physikalisch gekennzeichnet ist. Wollen wir daher die Projektion des Impulsmoments auf die z-Achse kennen, so müssen wir diese Richtung irgendwie kennzeichnen, z. B. durch Einschalten eines ihr parallelen Magnetfeldes, und dann die Messung der Projektion vollziehen. Das Resultat einer derartigen Messung kann zeigen, daß die Projektion L_z gleich, sagen wir, $+\frac{h}{2\pi}$ ist. So wird der Zustand nach der Messung durch die Funktion ψ_+ beschrieben. Damit haben wir schon

$$\psi = \psi_+, \quad d.\,h. \quad |c_1|^2 = 1,$$
$$|c_2|^2 = |c_3|^2 = 0.$$

Die Projektion L_z nimmt also einen bestimmten Wert an, während wir über L_x und L_y nichts aussagen können (das entspricht der Tatsache, daß ψ_+ nicht eine Eigenfunktion der Operatoren L_x und L_y ist). Wollen wir jetzt die Projektionen auf irgendeine andere Achsenrichtung kennen lernen, so müssen wir das dieser Richtung parallele Feld einschalten. Dadurch wird der der Messung vorangehende Zustand zerstört, und es entsteht ein neuer Zustand, in dem wieder nur eine Projektion einen bestimmten Wert hat.

Auf den ersten Blick ist es nicht verständlich, worauf die Auszeichnung der z-Achse vor den beiden anderen Richtungen beruht. In Wirklichkeit ist diese Auszeichnung nur eine scheinbare: Keine der Achsen ist vor irgendeiner anderen ausgezeichnet. Die besondere Bedeutung der z-Achse in unseren Rechnungen und Überlegungen rührt nur von der Wahl der Veränderlichen $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$ und z her, wodurch die Gleichung $\Delta u = 0$ folgende Form annahm:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (178,8)$$

Hätten wir die Variablen anders gewählt, etwa so: x, $\eta' = y + iz$, $\zeta' = y - iz$, so hätte die LAPLACEsche Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta'\,\partial\zeta'} = 0, \qquad (181,1)$$

und die Eigenfunktionen des p-Zustands wären

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \eta' = \sin\vartheta\sin\varphi + i\cos\vartheta,$$

$$\xi' = \sin\vartheta\sin\varphi - i\cos\vartheta. \qquad (181,2)$$

Diese Eigenfunktionen des Operators $\mathfrak{L}^2$ wären gleichzeitig Eigenfunktionen des Operators L_x (aber nicht L_y und L_z), und die bestimmten Werte 0, $\pm\frac{h}{2\pi}$ hätte die Projektion L_x (siehe Übung 1 am Schluß dieses Paragraphen). Die beiden anderen blieben aber unbestimmt. Bei der Wahl der Variablen zu $\xi'' = x + iz$, y und $\zeta'' = x - iz$ schließlich würde nur die Projektion L_y einen bestimmten Wert haben. Wir empfehlen dem Leser sehr, die Übungen zu diesem Paragraphen auszuführen, um sich selbst von der Richtigkeit der letzten Behauptungen zu überzeugen.

Übungen:

1. Die Operatoren L_x, L_y, L_z seien in Polarkoordinaten gegeben [Formeln (176,15) bis (176,17)]. Es ist zu zeigen, daß die Eigenfunktionen des Operators $\mathfrak{L}^2$ (181,2) gleichzeitig Eigenfunktionen von L_x mit den Eigenwerten 0, $\pm\frac{h}{2\pi}$, nicht jedoch der Operatoren L_y und L_z sind.
2. Es ist zu zeigen, daß bei einer Wahl der Variablen zu $\xi'' = x + iz$, y, $\zeta'' = x - iz$ die Operatoren $\mathfrak{L}^2$ und L_y im p-Zustand gemeinsame Eigenfunktionen haben.
3. Es sind die Eigenfunktionen des Operators $\mathfrak{L}^2$ für den d-Zustand bei Wahl der Veränderlichen wie in Übung 1 und 2 und die Eigenwerte für L_x (und entsprechend L_y) in diesem Zustand aufzusuchen.

§ 182. Graphische Darstellungen

Zur Veranschaulichung der Besonderheiten der Zentralbewegung in der Quantenmechanik sind graphische Darstellungen oft von großem Nutzen. Wir wollen uns in diesem Paragraphen mit ihnen beschäftigen. Dazu betrachten wir ein Mikroteilchen, das sich unter der Einwirkung einer Zentralkraft in konstanter Entfernung um ein festes Zentrum bewegt (ein Rotator). Ein makroskopisches Teilchen, das durch die *klassische* Mechanik beschrieben wird, bleibt während einer solchen Bewegung *in einer Ebene*, d. h., es läuft auf Kreisbahnen um, und der Vektor des Impulsmoments bleibt immer senkrecht zur Bahnebene.

In der Quantenmechanik hingegen ist, wie wir wissen, die räumliche Orientierung des Impulsmomentvektors in gewissen Grenzen unbestimmt. Es gibt also immer eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen an Punkten zu finden, die nicht in einer Ebene liegen. Für den Zustand s ist sogar, wie wir uns überzeugen werden, bei gegebenem Abstand vom Zentrum die *gleiche* Wahrscheinlichkeit dafür gegeben, das Teilchen an irgendeinem beliebigen Ort der *Kugeloberfläche* anzutreffen.

In Anbetracht dessen werden durch die nachfolgenden graphischen Darstellungen die Wahrscheinlichkeiten angegeben, das Teilchen auf einer Kugelfläche und nicht in einer Ebene aufzufinden. Da der Kugelradius konstant bleibt, können wir ihn gleich 1 annehmen. Die uns interessierende Wahrscheinlichkeit ist danach

$$w\,d\sigma = \psi^*\psi\,d\sigma = \psi^*\psi \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,, \tag{182,1}$$

worin $d\sigma$ ein Oberflächenelement der Einheitskugel ist. Die expliziten Ausdrücke für die ψ-Funktion bei verschiedenen l und m sind in Tabelle XXIII zusammengestellt. Man kann sie in der Form

$$\psi = \Phi_m\,\Theta_{l,m} = N_\varphi e^{\pm im\varphi}\,\Theta_{l,m}$$

schreiben, wobei N_φ ein Normierungsfaktor der Funktion Φ_m ist und $\Theta_{l,m}$ der Teil der Eigenfunktion (einschließlich Normierungsfaktor), der nur von ϑ abhängt. Man sieht sofort, daß $|N_\varphi| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ sein muß, da die Normierungsbedingung für die Funktion Φ_m gegeben ist durch

$$1 = \int_0^{2\pi} \Phi_m^*\Phi_m\,d\varphi = |N_\varphi|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,|N_\varphi|^2\,,$$

woraus $|N_\varphi| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ folgt. Beachten wir dies, so erhalten wir

$$w\,d\sigma = \psi^*\psi\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\,[\Theta_{l,m}]^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,. \tag{182,2}$$

Wir sehen, daß in diesem Ausdruck der von φ abhängige Faktor verschwindet. Das weist darauf hin, daß das Teilchen in ein und demselben Längenintervall $d\varphi$ auf einem beliebigen Breitenkreis mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\left(\text{die gleich } \frac{1}{2\pi} \text{ ist}\right)$ aufzufinden ist. Daher ist zweckmäßigerweise die Gleichung (182,2) für φ von 0 bis 2π zu integrieren. Die Formel

$$\frac{1}{2\pi}\,[\Theta_{l,m}]^2 \cdot 2\pi \sin\vartheta\,d\vartheta$$

gibt dann die Wahrscheinlichkeit dafür an, das Teilchen an einem beliebigen Ort der Kugeloberfläche zwischen den Breitenkreisen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ anzutreffen. Da schließlich die Fläche der Kugelzone zwischen diesen Kreisen gleich $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ ist, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, die sich auf die Flächeneinheit der Kugel bezieht,

$$\frac{1}{2\pi}[\Theta_{l,m}]^2,$$

worin die Funktion $[\Theta_{l,m}]^2$ offensichtlich auch die Breitenverteilung der Teilchen auf der Kugeloberfläche darstellt. Um diese Funktion für verschiedene Werte von l und m zu ermitteln, muß man die Produkte $\psi^*\psi$, wie sie in Tabelle XXIII zusammengestellt sind, mit 2π multiplizieren. Wir erhalten auf diese Weise die Tabelle XXIV.

Tabelle XXIV

l	m	$[\Theta_{l,m}]^2$	$\sum_{m=-l}^{m=+l}[\Theta_{l,m}]^2$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	± 1	$\frac{3}{4}\sin^2\vartheta$	$\frac{3}{2}$
	0	$\frac{3}{2}\cos^2\vartheta$	
2	± 2	$\frac{15}{16}\sin^4\vartheta$	$\frac{5}{2}$
	± 1	$\frac{15}{4}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta$	
	0	$\frac{5}{8}(3\cos^2\vartheta - 1)^2$	
3	± 3	$\frac{35}{32}\sin^6\vartheta$	$\frac{7}{2}$
	± 2	$\frac{105}{16}\sin^4\vartheta\cos^2\vartheta$	
	± 1	$\frac{21}{32}\sin^2\vartheta(5\cos^2\vartheta - 1)^2$	
	0	$\frac{7}{8}(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta)^2$	

In der letzten Spalte der Tabelle sind die Summen der Wahrscheinlichkeitsdichten $[\Theta_{l,\,m}]^2$ für alle möglichen Werte von m bei gegebenem l aufgeführt. Wie man sieht, ist die Forderung

$$\sum_{m=-l}^{m=+l} [\Theta_{l,\,m}]^2 = \text{const}$$

immer erfüllt.

Die Abb. 229 zeigt das Polardiagramm der Funktion $[\Theta_{3,\,3}]^2$. Diese Funktion gehört also zu dem f-Zustand ($l = 3$), speziell zu denjenigen der sieben für den f-Zustand möglichen

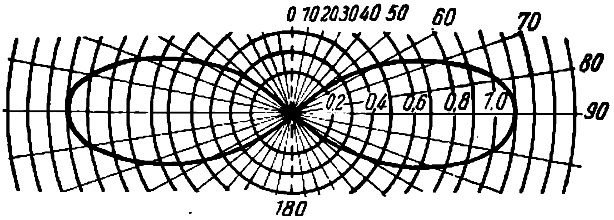


Abb. 229. Polardiagramm der Wahrscheinlichkeitsdichten $[\Theta_{l,\,m}]^2$ für $m = \pm l$; $l = 3$

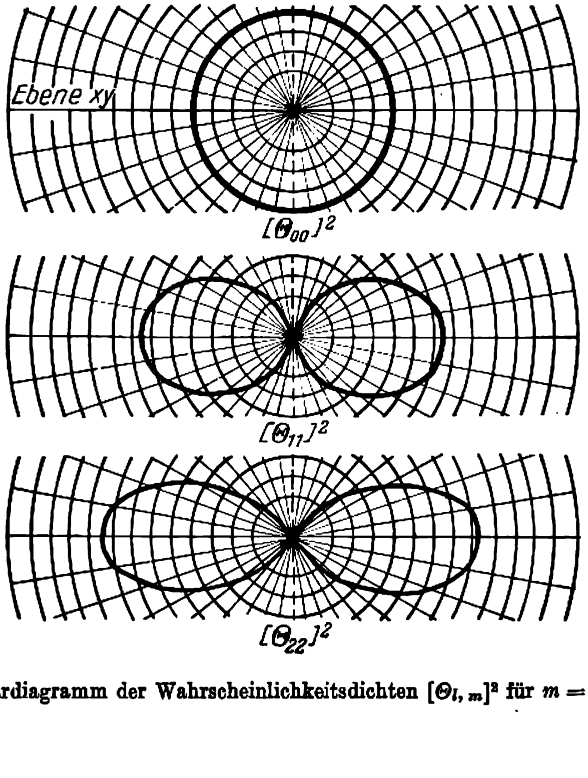


Abb. 230. Polardiagramm der Wahrscheinlichkeitsdichten $[\Theta_{l,\,m}]^2$ für $m = \pm l$; $l = 0, 1, 2$

Fällen, in denen die z-Komponente des Impulsmoments gleich $\pm 3\frac{h}{2\pi}$ $(m = 3)$ ist. Die beiden ebenen Bahnen der BOHRschen Theorie würden in diesem Falle so orientiert sein, daß der Impulsmomentvektor parallel (+ Zeichen) oder antiparallel (— Zeichen) zur z-Achse (Vertikallinie 180°—0°) liegt. Wenn man im Polardiagramm der Abb. 229 den Radiusvektor vom Mittelpunkt zu einem beliebigen Punkt der Kurve einzeichnet, so gibt die Länge des Abschnitts bis zum Schnittpunkt mit der Kurve die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür an, das Teilchen auf der Kugel an einem beliebigen Ort des Breitenkreises, der dem Winkel ϑ zwischen Radiusvektor und vertikaler z-Achse entspricht, anzutreffen. Wir sehen, daß für $\vartheta = 90°$, was der Orientierung der BOHRschen Bahnen entspricht, die Wahrscheinlichkeit tatsächlich ihren *Maximal*wert besitzt. Sie ist jedoch auch für andere Winkel von Null verschieden. Daher ist es unzutreffend, hier von ebenen Bahnen zu sprechen, obwohl eine „verschwommene" Übereinstimmung mit der Orientierung BOHRscher Bahnen vorhanden ist. In Abb. 230 ist eine Reihe von Polardiagrammen $[\Theta_{l,\,m}]^2$ für Zustände angegeben, die dem obigen ähnlich sind, d. h. für $m = \pm\, l$. Diese Skizze ist darum interessant, weil sie zeigt, daß die Übereinstimmung mit der BOHRschen Theorie um so besser wird, je größer l ist: Bei $l = 0$ (s-Zustand) ist keine Übereinstimmung vorhanden, das Diagramm zeigt einen Kreis. Mit wachsendem l wird das Diagramm immer abgeplatteter, und die Verteilung der Teilchen konzentriert sich demzufolge in immer stärkerem Maße nahe der BOHRschen Bahnebene.

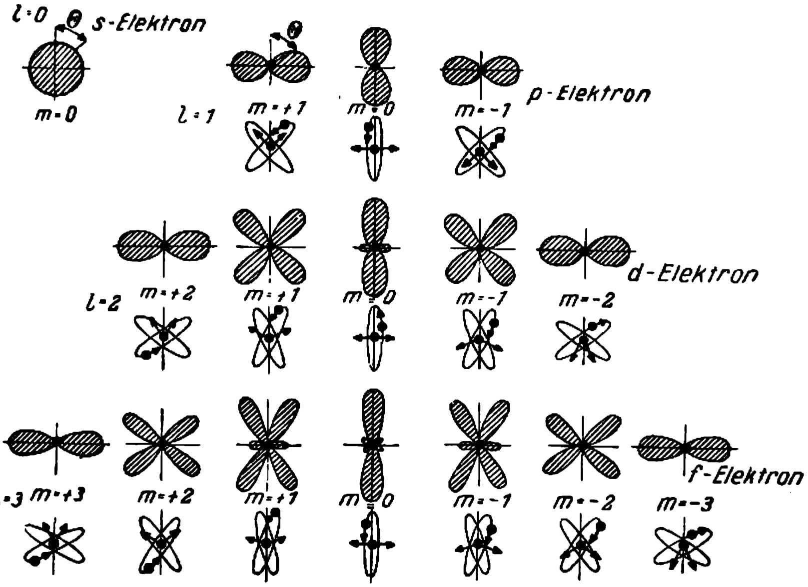


Abb. 231. Polardiagramme der Wahrscheinlichkeitsdichten und räumliche Quantelung

Abb. 231 illustriert dasselbe für alle vorkommenden Fälle der räumlichen Quantelung in den Zuständen s, p, d und f. Unter jedem Diagramm ist die Orientierung der BOHRschen

Bahnen dargestellt, für die die Projektion des Impulsmoments die entsprechenden Werte hat $\left(\text{z. B. } \pm 2\frac{h}{2\pi} \text{ für } l = 2,\ m = 2, \text{ usw.}\right)$. Auch hier ist wieder ersichtlich, daß mit Ausnahme des Zustands s in allen übrigen Fällen eine Übereinstimmung zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Orientierung der Bahnen vorhanden ist: Die größte Wahrscheinlichkeit entspricht immer der Orientierung der ebenen Bahn. In allen Fällen jedoch beobachtet man eine bereits oben erwähnte Verschwommenheit. Es sei noch daran erinnert, daß man sich zur Erlangung eines räumlichen Bildes einen Rotationskörper vorstellen muß, der aus der Drehung der entsprechenden Figuren um die Vertikale hervorgeht.

§ 183. Normalzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms

Wir wenden uns jetzt dem Problem der Bewegung eines Elektrons im Feld eines positiv geladenen Kerns mit der Ladung $+Ze$ zu. Die Kraft, die das Elektron am Kern in Abständen atomarer Größenordnung ($\sim 10^{-8}$ cm) hält, ist die COULOMBsche Anziehungskraft. Die ihr entsprechende potentielle Energie beträgt

$$U = -\frac{Ze^2}{r}. \tag{183,1}$$

Unsere Aufgabe besteht nun in der Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung. Da es sich im gegebenen Falle um ein Zentralfeld handelt, benutzt man natürlich Polarkoordinaten. Der LAPLACEsche Operator hat in Polarkoordinaten folgende Form:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

In diesem Paragraphen werden wir die Lösung des Problems für den energetisch niedrigsten Zustand, also den Grundzustand, suchen. Dieser Zustand wird offensichtlich durch die kleinsten Werte der Quantenzahlen charakterisiert, insbesondere der Quantenzahl l des Impulsmoments. Da dieser kleinste Wert $l = 0$ ist, haben wir es mit dem s-Zustand zu tun. Dieser Zustand ist, wie wir schon wissen, durch vollständige Kugelsymmetrie ausgezeichnet, so daß die ψ-Funktion nur vom Radiusvektor r, nicht aber von den Winkeln ϑ und φ abhängt. Daher sind die Glieder des LAPLACEschen Operators, die Ableitungen nach ϑ und φ enthalten, gleich 0, und die SCHRÖDINGER-Gleichung erhält die Form

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{183,2}$$

Wir benutzen nun folgende Abkürzungen:

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}E = \lambda; \quad \frac{4\pi^2 m}{h^2}Ze^2 = \alpha, \tag{183,3}$$

setzen diese in die Schrödinger-Gleichung (183,2) ein und differenzieren im ersten Glied. Wir erhalten

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left(\lambda + \frac{2a}{r}\right)\psi = 0. \tag{183,4}$$

Die einfachste Lösung dieser Gleichung, die einen endlichen Wert für $r = 0$ hat und für $r \to \infty$ gleich Null wird, ist

$$\psi = e^{-\varepsilon r}. \tag{183,5}$$

Tatsächlich, wir erhalten vor allem

$$\frac{d\psi}{dr} = -\varepsilon e^{-\varepsilon r}, \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} = \varepsilon^2 e^{-\varepsilon r}.$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in (183,4) und Kürzung durch $e^{-\varepsilon r}$ ergibt sich

$$\varepsilon^2 - \frac{2}{r}\varepsilon + \left(\lambda + \frac{2a}{r}\right) = 0$$

oder

$$(\varepsilon^2 + \lambda) + (-2\varepsilon + 2a)\frac{1}{r} = 0.$$

Diese Beziehung muß für beliebiges r gelten, d. h., die beiden Klammerausdrücke müssen einzeln Null werden, woraus sich

$$\varepsilon^2 = -\lambda, \quad \varepsilon = a$$

ergibt. Berücksichtigen wir die Werte von λ und a nach (183,3), so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$E_1 = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2}.$$

Vergleichen wir jetzt diesen Ausdruck mit der Bohrschen Formel für die Energieniveaus der Balmer-Linien (Bd. I, § 100)

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}, \tag{100,5}$$

so sehen wir, daß der von uns erhaltene Ausdruck E_1 das erste Balmer-Niveau mit der Hauptquantenzahl $n = 1$ darstellt. Unser s-Zustand wird also durch die Quantenzahlen $n = 1$ und $l = 0$ charakterisiert; man gibt ihm das Symbol 1s.

Setzen wir in der Formel für E_1 $Z = 1$, so erhalten wir die Energie für das Wasserstoffatom im Grundzustand. Mit umgekehrtem Vorzeichen gibt uns dieser Ausdruck die Ionisationsenergie für das Wasserstoffatom an:

$$I = -E_1 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}.$$

Setzen wir jetzt die Zahlenwerte der Konstanten ein und dividieren noch durch $1{,}6 \cdot 10^{-12}$, um von *erg* zu *eV* überzugehen, so erhalten wir

$$I = \frac{2 \cdot 9{,}86 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 5308 \cdot 10^{-39}}{43{,}82 \cdot 10^{-54} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 13{,}6 \text{ eV}.$$

Dieser Wert stimmt gut mit dem Experiment überein.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, das Elektron im Volumenelement $d\tau$ zu finden. Bezeichnen wir mit N einen für uns vorläufig unwesentlichen Normierungsfaktor, so haben wir

$$w(r)\,d\tau = |N|^2 \psi^2\,d\tau = |N|^2 e^{-2\varepsilon r} r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr. \tag{183,6}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Abstand zwischen r und $r + dr$ vom Kern in einer beliebigen Richtung aufzufinden, erhält man durch Integration von (183,6) nach den Winkeln

$$w(r)\,dr = |N|^2 r^2 e^{-2\varepsilon r}\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta = |N|^2\, 4\pi r^2 e^{-2\varepsilon r}\,dr. \tag{183,7}$$

Man sieht sofort, daß die Konstante ε die Dimension cm^{-1} haben muß.

Wir führen eine neue Konstante a_1 ein, die mit ε durch die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{1}{a_1} \tag{183,8}$$

verbunden ist. Dann ergibt sich

$$w(r)\,dr = 4\pi |N|^2 r^2 e^{-\frac{2r}{a_1}}\,dr. \tag{183,9}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ wird Null für $r = 0$ und geht asymptotisch gegen Null für $r \to \infty$. Es gibt also allgemein eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, das Elektron in beliebigem Kernabstand zwischen 0 und ∞ anzutreffen. Wir wollen jetzt den Abstand finden, in dem diese Wahrscheinlichkeit ihr Maximum besitzt. Differenzieren wir (183,9) nach r und setzen das Resultat gleich Null, so erhalten wir (nach Kürzung durch $e^{-2\frac{r}{a_1}}$)

$$2r - 2r^2 \frac{1}{a_1} = 0,$$

woraus sich

$$r_{max} = a_1$$

ergibt. Beachten wir, daß $a_1 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha}$ und $\alpha = \frac{4\pi^2 me^2}{h^2}$ ist, so finden wir

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2}. \tag{183,10}$$

Wie man sieht, wird a_1 durch die universellen Konstanten e, m und h ausgedrückt. Einem derartigen Ausdruck begegneten wir bereits in der BOHRschen Theorie [siehe Bd. I, § 100, Formel (100,4)], wo der Radius der ersten Wasserstoffbahn gerade zu a_1 gefunden wurde (Abb. 232).

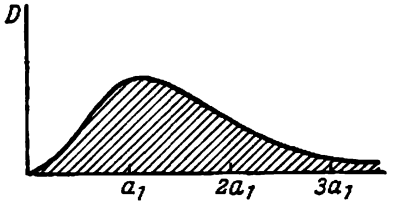


Abb. 232. Graphische Darstellung der Funktion $D = 4\pi r^2 [R(r)]^2$ für den Zustand 1*s*

Für die azimutale Quantenzahl n_φ der BOHRschen Theorie besteht die Beziehung $n_\varphi = l + 1$, so daß für $l = 0$ $n_\varphi = 1$ ist. Eine Übereinstimmung mit der BOHRschen Theorie ist also auch hier zu verzeichnen. Man darf jedoch nicht vergessen, daß der Zustand 1*s* durch Kugelsymmetrie ausgezeichnet ist, so daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung gewissermaßen eine „Kugelwolke" darstellt, keineswegs aber ein ebenes Gebilde, wie es einer „Bahn" entsprechen würde. Weiterhin muß man im Auge behalten, daß im Zustand 1*s* das Impulsmoment gleich Null ist. In diesem Fall haben wir es also mit einer reinen Radialbewegung zu tun.

Berechnen wir noch die Mittelwerte einiger Größen für den 1*s*-Zustand. Zu diesem Zweck müssen wir vor allem unsere Eigenfunktion zu 1 normieren, d. h. den Wert des Normierungsfaktors N so ausrechnen, daß das über den gesamten Raum berechnete Integral der normierten Funktion den Wert 1 ergibt. Im vorliegenden Falle haben wir die Bedingung

$$1 = |N|^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{r}{a_1}} r^2\, dr \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = |N|^2\, 4\pi \int_0^\infty r^2 e^{-2\frac{r}{a_1}}\, dr. \qquad (183{,}11)$$

Es verbleibt ein nicht berechnetes Integral der Form

$$I_n = \int_0^\infty r^n e^{-\alpha r}\, dr$$

mit

$$\alpha = \frac{2}{a_1}.$$

Die Berechnung solcher Integrale ist im Anhang VII durchgeführt. Sie führt auf die allgemeine Formel

$$I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}, \qquad (183{,}12)$$

so daß das Integral in (183,11) für diesen Fall

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2\frac{r}{a_1}}\,dr = I_2 = \frac{2}{a^3} = \frac{2a_1^3}{2^3} = \frac{a_1^3}{4}$$

ergibt. (183,11) nimmt darum die Form

$$1 = |N|^2 \pi a_1^3$$

an, woraus bis auf einen unbestimmten Phasenfaktor $e^{i\delta}$

$$N = \frac{1}{\pi^{1/2} a_1^{3/2}}$$

folgt. Die normierte Eigenfunktion ist dann

$$\psi = \frac{1}{\pi^{1/2} a_1^{3/2}}\, e^{-\frac{r}{a_1}}. \tag{183,13}$$

Diese Funktion benutzen wir zur Berechnung der Mittelwerte. Vor allem wollen wir den Mittelwert von r bestimmen:

$$\bar{r} = \frac{1}{\pi a_1^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^\infty r e^{-2\frac{r}{a_1}} r^2\,dr = \frac{4}{a_1^3}\int_0^\infty r^3 e^{-2\frac{r}{a_1}}\,dr = \frac{4}{a_1^3} I_3 .$$

Unter Benutzung von (183,12) erhalten wir nach einigen einfachen Rechnungen

$$\bar{r} = \frac{3}{2} a_1 . \tag{183,14}$$

Interessant wäre nun noch, die Mittelwerte der potentiellen und kinetischen Energie zu berechnen. Für die potentielle Energie im Falle $Z = 1$ erhalten wir

$$\bar{U} = -e^2 \overline{\left(\frac{1}{r}\right)} .$$

Da der Mittelwert der reziproken Entfernung

$$\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{\pi a_1^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-2\frac{r}{a_1}} r^2\,dr = \frac{4}{a_1^3}\int_0^\infty r e^{-2\frac{r}{a_1}}\,dr = \frac{4}{a_1^3}\cdot\frac{a_1^2}{2^2} = \frac{1}{a_1} \tag{183,15}$$

ist, ergibt sich

$$\bar{U}_{1s} = -\frac{e^2}{a_1} ,$$

d. h., $\bar{U}$ ist gerade gleich der potentiellen Energie des Elektrons im Abstand a_1. Berück-

sichtigen wir den Wert von a_1 [Formel (183,10)], so finden wir

$$\overline{U}_{1s} = -\frac{4\pi^2 m e^4}{h^2} = 2E_1. \tag{183,16}$$

Da aber

$$\overline{T} + \overline{U} = E$$

ist, erhalten wir für den Mittelwert der kinetischen Energie

$$\overline{T}_{1s} = -E_1 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}, \tag{183,17}$$

d. h. den Wert der Gesamtenergie mit umgekehrtem Vorzeichen.

Diese Resultate erlauben uns eine Antwort auf die Frage: Wie erklärt sich quantenmechanisch die Beständigkeit des Wasserstoffatoms im Zustand s, d. h. bei Abwesenheit eines Impulsmoments. Nehmen wir an, das Elektron befinde sich in mittlerer Entfernung a_1 vom Kern mit einer Ortsungenauigkeit $\Delta r = \frac{1}{2} a_1$. Nach der Ungenauigkeitsrelation ist

$$\frac{1}{2} a_1 \Delta p_r \geqslant \frac{h}{4\pi},$$

woraus

$$\Delta p_r \geqslant \frac{h}{2\pi a_1} \tag{183,18}$$

folgt. Da $\Delta T = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$ ist, muß $\frac{(\Delta p_r)^2}{2m}$ mindestens von derselben Größenordnung wie auch $\overline{T}$ sein. Aus (183,18) finden wir

$$\frac{(\Delta p_r)^2}{2m} \geqslant \frac{h^2}{8\pi^2 m a_1^2},$$

woraus nach (183,10)

$$\frac{(\Delta p_r)^2}{2m} \geqslant \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}$$

oder unter Berücksichtigung von (184,17)

$$\frac{(\Delta p_r)^2}{2m} \geqslant \overline{T}_{1s}$$

folgt, wie zu erwarten war.

Nun ist aber $\overline{T}_{1s} = -E_1$, und E_1 ist die für das Wasserstoffatom bestimmte Energie des ersten Balmer-Niveaus. Daher lautet die Antwort auf die gestellte Frage: Die Unbestimmtheit der Lage, d. h. des Radius jener Sphäre, innerhalb deren wir uns das Elektron eingeschlossen denken, kann nicht kleiner sein als $\frac{1}{2} a_1$, da sonst der Energieerhaltungssatz um-

gestoßen würde (es empfiehlt sich, die analoge Überlegung für den Fall des Nullzustands eines linearen harmonischen Oszillators, wie wir ihn in Bd. I, § 150, behandelten, mit diesen Betrachtungen zu vergleichen).

Im Zusammenhang damit ist es nützlich, auch noch das folgende, scheinbare Paradoxon zu betrachten. Da die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in beliebiger Richtung zwischen r und $r + dr$ zu finden, die gleich $4\pi r^2 e^{-2\frac{r}{a_1}} dr$ ist, mit zunehmender Entfernung asymptotisch gegen Null geht, gibt es immer eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, das Elektron in großer Entfernung vom Kern anzutreffen. Obwohl die potentielle Energie $-\frac{e^2}{r}$ für große r auch negativ ist, ist sie doch wenig von Null verschieden. Die kinetische Energie hingegen ist immer positiv. Darum ist $T + U > 0$ (für große r), während die Gesamtenergie des Wasserstoffatoms (die speziell für den $1s$-Zustand den Wert E_1 hat) immer negativ ist. Es sieht so aus, als ob der Energieerhaltungssatz verletzt sei. Es ist jedoch nur ein scheinbarer Verstoß. Um eine einigermaßen genaue Bestimmung der Koordinaten des Elektrons zu erzielen, muß die Wellenlänge des Lichtes, mit dem wir es beleuchten, derart klein sein, daß die zusätzliche Energie, die das Elektron beim Zusammenstoß mit dem Photon erhält (COMPTON-Rückstoß), das Energiedefizit überreichlich deckt.

Es kann aber die Frage gestellt werden: Ist es nicht doch möglich, wenigstens ungefähr die Lage des Elektrons, irgendwo hinreichend weit vom Kern entfernt, zu bestimmen, wenn man sichtbares, z. B. rotes Licht benutzt, für das der Impuls des Photons sehr klein ist. Das Paradoxon würde dann in Kraft bleiben. Es zeigt sich, daß man die Lage des Elektrons mit rotem Licht aus folgendem einfachem Grunde nicht ermitteln kann: Es reagiert zwar ein ganzes Atom nach den üblichen Gesetzen der Dispersionstheorie auf rotes Licht, nicht jedoch ein einzelnes Elektron.

§ 184. Das KEPLER-Problem. Allgemeiner Fall

Im vorigen Paragraphen haben wir eingehend das Problem eines Elektrons im COULOMB-Feld des Kerns speziell für den Fall des Grundzustandes behandelt. Wir wollen jetzt die Lösung dieses Problems für den allgemeinen Fall angeben[1]). Die ψ-Funktion wird von allen drei Koordinaten abhängen,

$$\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi), \tag{184,1}$$

und die SCHRÖDINGER-Gleichung hat mit den im vorigen Paragraphen eingeführten Kürzungen (183,3) die Form

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \left(\lambda + \frac{2\alpha}{r}\right)\psi = 0. \tag{184,2}$$

---

[1]) Im Folgenden wollen wir nur den Fall eines unbeweglichen Kerns behandeln (Kernmasse unendlich groß im Vergleich zur Elektronenmasse). Bei Berücksichtigung der Kernbewegung (Zweikörperproblem) bleiben alle Formeln erhalten, nur die Elektronenmasse ist durch die reduzierte Masse $m' = \frac{Mm}{M+m}$ zu ersetzen, wobei M die Kernmasse ist (siehe Teil I, § 51).

Wir werden ihre Lösung als Produkt zweier Funktionen suchen, von denen eine nur von r, die andere nur von den Winkeln ϑ und φ abhängt,

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi). \tag{184,3}$$

Setzen wir diese Lösung in (184,2) ein, so finden wir nach Division durch RY und Ordnung der Glieder

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + r^2\left(\lambda + \frac{2\alpha}{r}\right) = -\left\{\frac{1}{Y \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{Y \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{184,4}$$

Die linke Seite hängt nicht von den Winkeln ϑ und φ ab, die rechte nicht vom Radiusvektor r; sie können also einander nur dann gleich sein, wenn beide weder von r noch von ϑ und φ abhängen, d. h. einer Konstanten β gleich sind. Wir erhalten deshalb

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + r^2\left(\lambda + \frac{2\alpha}{r}\right) R = \beta R, \tag{184,5}$$

$$-\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right\} = \beta Y. \tag{184,6}$$

Die Gleichung (184,6) ist die Legendresche Gleichung (siehe § 178)

$$\Lambda Y = \beta Y.$$

Die Eigenwerte β sind, wie wir wissen,

$$\beta = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

während die Eigenfunktionen durch

$$Y_{l,m} = e^{\pm i m \varphi} \Theta_{l,m}$$

dargestellt sind.

Setzt man in (184,5) $l(l+1)$ für β ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda + \frac{2\alpha}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R = 0. \tag{184,7}$$

Dies ist die Gleichung für den Teil der Eigenfunktion, der nur vom Radiusvektor abhängt. Wir nennen sie Radialgleichung und untersuchen zuerst, welche Folgerungen man qualitativ aus ihr ziehen kann. Zu diesem Zweck schreiben wir die Gleichung (184,7) derart um, daß wir für λ und α vorübergehend ihre Werte aus (183,3) einsetzen:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right) R = 0. \tag{184,8}$$

Es ist sofort zu erkennen, daß diese Gleichung eine eindimensionale Bewegung mit einem fiktiven Potential

$$U' = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{184,9}$$

darstellt. Die entsprechende Potentialkurve ist in Abb. 233 wiedergegeben. Bei hinreichend großen r überwiegt in (184,9) das erste Glied, daher ist $U' < 0$; für $r \to \infty$ geht U' gegen Null. Bei kleinen r hingegen überwiegt das zweite Glied, und darum ist $U' > 0$. Daraus geht hervor, daß für $E < 0$ die Kurve eine „Potentialmulde“ darstellt. Es ist zu erwarten, daß die Bewegung in diesem Fall periodisch und die Energiewerte gequantelt sein werden. Für $E > 0$ hingegen schneidet die parallel zur Abszisse im Abstand des gegebenen Energiewertes eingezeichnete Gerade die Potentialkurve nur in einem Punkt. Das bedeutet, daß die Bewegung nur einseitig von einer Potentialschwelle begrenzt ist: Das Teilchen, das sich, aus dem Unendlichen kommend, in Richtung auf diese Potentialschwelle von rechts nach links bewegt, wird an dieser reflektiert und geht ins Unendliche zurück. In diesem Falle erhalten wir keine diskreten Energieniveaus. Der Energieoperator hat für $E > 0$ ein kontinuierliches Eigenwertspektrum.

Im Folgenden wollen wir nur den Fall $E < 0$ behandeln. Der Fall positiver Gesamtenergie entspricht einem Stoßproblem, z. B. der Elektronenstreuung. Er ist sowohl vom theoretischen

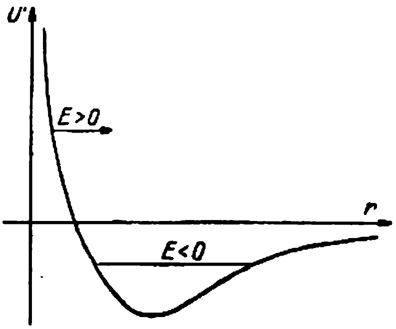


Abb. 233. Potentialkurve für die Radialkomponente der KEPLER-Bewegung

als auch praktischen Standpunkt aus von großem Interesse. Die Lösung eines Eigenwertproblems mit kontinuierlichem Spektrum von Eigenwerten ist mathematisch viel schwieriger, und wir verweisen die Leser, die sich für diese Probleme besonders interessieren, an eingehendere Darstellungen der Quantenmechanik.

Wenden wir uns nun erneut der Radialgleichung (184,7) zu. Es sei vor allem darauf hingewiesen, daß der Parameter λ die Dimension eines reziproken Längenquadrats besitzt, wovon man sich leicht mittels der Beziehung (183,3) für λ überzeugen kann. Bezeichnen wir diese Länge mit r_0, so können wir die Gleichung (184,7) umschreiben in

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(-\frac{1}{r_0^2} + \frac{2a}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0, \quad \left(\lambda = -\frac{1}{r_0^2}\right). \tag{184,10}$$

Wir behandeln nun den asymptotischen Fall mit sehr großem r. Dann geht Gleichung (184,10) über in

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{R}{r_0^2} = 0. \tag{184,11}$$

Die entsprechenden Lösungen sind $R = e^{\pm \frac{r}{r_0}}$. Man kann jedoch nur die Lösung mit negativem Exponenten benutzen, da bei positivem Exponenten R für $r \to \infty$ unendlich wird. Wir führen jetzt als unabhängige Veränderliche die dimensionslose Größe ϱ ein:

$$\varrho = 2\frac{r}{r_0} = 2r\sqrt{-\lambda}. \tag{184,12}$$

In Gleichung (184,10) ersetzen wir r durch ϱ. Wir erhalten vor allem

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{d\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dr} = \frac{2}{r_0}\frac{d}{d\varrho},$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{2}{r_0}\frac{d}{d\varrho}\right)\frac{d\varrho}{dr} = \frac{4}{r_0^2}\frac{d^2}{d\varrho^2}$$

und setzen diese Ausdrücke in (184,10) ein. Nach Multiplikation mit $\frac{r_0^2}{4}$ und einfachen Umformungen ergibt sich nun

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{a}{\sqrt{-\lambda}}\frac{1}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right)R = 0. \tag{184,13}$$

Für den asymptotischen Fall ($\varrho \to \infty$) ist, wie wir schon sagten, die Lösung $e^{-\frac{r}{r_0}} = e^{-\frac{\varrho}{2}}$. Diesem entsprechend suchen wir die Lösung für den allgemeinen Fall in der Form

$$R = e^{-\frac{\varrho}{2}} f(\varrho). \tag{184,14}$$

Diese Lösung setzen wir in (184,13) ein, wozu wir erst die Ableitungen bilden:

$$R' = \left(f' - \frac{1}{2}f\right)e^{-\frac{\varrho}{2}}; \quad R'' = \left(f'' - f' + \frac{1}{4}f\right)e^{-\frac{\varrho}{2}}.$$

Wird dies in (184,13) eingesetzt, so ergibt sich folgende Gleichung für f

$$\frac{d^2f}{d\varrho^2} + \left(\frac{2}{\varrho} - 1\right)\frac{df}{d\varrho} + \left[\left(\frac{a}{\sqrt{-\lambda}} - 1\right)\frac{1}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right]f = 0. \tag{184,15}$$

Diese Gleichung integrieren wir durch einen Potenzreihensatz. Wir suchen also die Lösung in der Form

$$f(\varrho) = \varrho^\gamma (a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \ldots) \equiv \varrho^\gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = \sum_\nu a_\nu \varrho^{\nu+\gamma}. \tag{184,16}$$

Setzen wir diese Lösung in (184,15) ein, so finden wir nach einigen zweckmäßigen Vereinfachungen

$$\sum_\nu [(\gamma+\nu)(\gamma+\nu+1) - l(l+1)]\,a_\nu \varrho^{\gamma+\nu-2} =$$

$$= \sum_\nu \left(\gamma + \nu + 1 - \frac{a}{\sqrt{-\lambda}}\right) a_\nu \varrho^{\gamma+\nu-1}. \tag{184,17}$$

Damit diese Gleichung identisch erfüllt ist, müssen alle Koeffizienten gleicher Potenzen von ϱ gleich sein. Das niedrigste Glied auf der linken Seite erhält man für $\nu = 0$; es enthält $\varrho^{\gamma-2}$:

$$[\gamma(\gamma+1) - l(l+1)]\, a_0\, \varrho^{\gamma-2}. \tag{184,18}$$

Das niedrigste Glied auf der rechten Seite enthält $\varrho^{\gamma-1}$, d. h., in (184,17) steht auf der rechten Seite kein Glied gleichen Grades von ϱ wie in (184,18); der Koeffizient vor $\varrho^{\gamma-2}$ muß also gleich Null sein. Das aber ergibt

$$\gamma(\gamma+1) - l(l+1) = 0,$$

woraus

$$\gamma = l \quad \text{oder} \quad \gamma = -(l+1)$$

folgt.

Die zweite Lösung ist unbrauchbar, da für $\gamma = -(l+1)$ die Reihe (184,16) mit dem Glied $\frac{a_0}{\varrho^{l+1}}$ beginnt; dieses Glied wird aber für $\varrho = 0$ unendlich groß. Setzen wir $\gamma = l$ in (184,17) ein, so erhalten wir

$$\sum_\nu [(l+\nu)(l+\nu+1) - l(l+1)]\, a_\nu\, \varrho^{l+\nu-2} =$$

$$= \sum_\nu \left(l + \nu + 1 - \frac{a}{\sqrt{-\lambda}}\right) a_\nu\, \varrho^{l+\nu-1}. \tag{184,19}$$

Durch Koeffizientenvergleich für gleiche Potenzen von ϱ finden wir folgende Rekursionsformel:

$$a_{i+1} = \frac{(l+i+1) - \frac{a}{\sqrt{-\lambda}}}{(l+i+1)(l+i+2) - l(l+1)}\, a_i. \tag{184,20}$$

Auf gleiche Weise wie bei der Lösung des Problems des linearen harmonischen Oszillators (siehe Teil I, § 149) kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Reihe mit der Rekursionsformel (184,20) asymptotisch wie e^ϱ verläuft und daher die Funktion $R = e^{-\frac{\varrho}{2}} f(\varrho)$ für hinreichend große ϱ wie $e^{-\frac{\varrho}{2}} e^\varrho = e^{+\frac{\varrho}{2}}$ wächst, d. h., sie wird für $\varrho \to \infty$ unendlich. Die Lösung bleibt endlich für beliebige ϱ, wenn die Reihe ein Polynom wird. Hat das letzte Glied der Reihe, das nicht gleich Null ist, den Index $i = n_r$, dann ist

$$a_{n_r+1} = \frac{(l+n_r+1) - \frac{a}{\sqrt{-\lambda}}}{(l+n_r+1)(l+n_r+2) - l(l+1)}\, a_{n_r}.$$

Ist $a_{n_r} \neq 0$, aber $a_{n_r+1} = 0$, so ist

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{a}{l+n_r+1}.$$

Setzen wir für λ und α deren Ausdrücke (183,3) ein, so erhalten wir nach *Quadrieren* und Kürzung

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + l + 1)^2 h^2}.$$

Die hier eingeführte ganze Zahl n_r ist eine neue (dritte) Quantenzahl. Wir sehen jedoch, daß die Eigenwerte der Energie nur von der Summe $n_r + l + 1$ abhängen. Bezeichnen wir

$$n_r + l + 1 = n,$$

so ist

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}. \qquad (184,21)$$

Das aber ist die Formel für die BALMER-Energieniveaus, die wir hier, ohne irgendwelche neue Hypothesen einzuführen, einfach bei der Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung fanden.

Wie wir sehen, hängt die Energie E_n nur von einer Hauptquantenzahl n ab, die aus der Summe zweier Quantenzahlen, der radialen und azimutalen, plus 1 besteht:

$$n = n_r + l + 1. \qquad (184,22)$$

Der niedrigste Wert von l ist Null, der höchste (bei vorgegebenem n) entspricht offensichtlich dem Fall $n_r = 0$ und ist folglich $n - 1$. Für die möglichen Werte von l bei gegebenem n folgt also

$$l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Die verschiedenen Zustände eines wasserstoffähnlichen Atoms können mit Hilfe der drei Quantenzahlen n_r, l, m beschrieben werden. Da *die Vorgabe* von n und l nach (184,22) auch n_r festlegt, kann man — und das ist sehr bequem — die Zustände durch die Quantenzahlen n, l, m beschreiben. Mit Ausnahme des niedrigsten Zustands mit $n = 1$ und $l = m = 0$ sind alle übrigen Zustände entartet. Den Grad dieser Entartung kann man auf Grund folgender Überlegungen bestimmen: Bei vorgegebenem n, das die Energie des Atoms bestimmt, kann l im Ganzen n Werte $(0, 1, \ldots, n-1)$ annehmen, wobei jedem l noch $2l + 1$ verschiedene Werte von m entsprechen. Daraus folgt, daß es für einen definierten Wert n, d. h. für jeden durch die Formel (184,21) bestimmten Energiewert, ebenso viele verschiedene Eigenfunktionen gibt, wie die Summe

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

angibt. So ist jedes Energieniveau n^2-fach entartet.

Die verschiedenen Zustände werden durch Symbole gekennzeichnet, von denen jedes einen Zahlenkoeffizienten, der gleich der Hauptquantenzahl ist, und den Buchstaben der Quantenzahl nach dem Schema des § 180 enthält. So bezeichnet man z. B. den Zustand, für den $n = 1$ und $l = 0$ ist, wie wir schon (§ 183) sahen, durch das Symbol $1s$. Für $n = 2$ haben wir die Zustände $2s$ und $2p$; für $n = 3$ die Zustände $3s$, $3p$, $3d$ usw.

Die Energieniveaus mit gleichem n und verschiedenen Werten l fallen also zusammen. Daher kann man sie graphisch so darstellen, wie dies auf Abb. 147 (Teil I, S. 263) getan wurde, d. h. in Abhängigkeit von einer Quantenzahl n. Es ist jedoch günstig, den Satz von

Energieniveaus mit ein und derselben azimutalen Quantenzahl l und verschiedenen Hauptquantenzahlen untereinander (wie in Abb. 234) anzuordnen. Dabei werden natürlich beim Wasserstoffatom alle Niveaus mit gleichem n in gleicher Höhe liegen.

Graphische Darstellungen. Die Lösung der Radialgleichung erhält man mit Hilfe von Polynomen, die aus Potenzreihen [mit der Rekursionsformel (184,20)] bestehen.

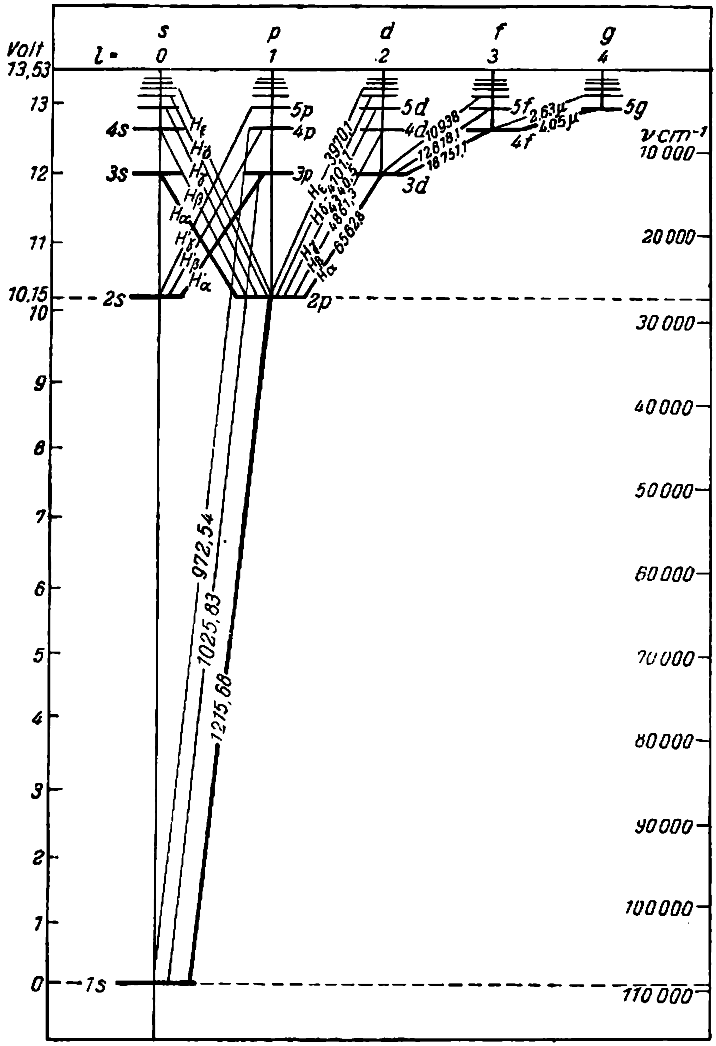


Abb. 234. Energieniveaus des Wasserstoffatoms
(Die Stärke der Linien entspricht der Übergangswahrscheinlichkeit)

Wir verweisen den Leser, der sich für das Rechenverfahren interessiert, auf Spezialwerke[1]) und geben für einige Zustände die endgültigen (normierten) Lösungen in Tabelle XXV wieder. Zur Vereinfachung wurde die Abkürzung $\sigma = \frac{Z}{a_1} r$ eingeführt.

Auf Abb. 235 ist der Gang der radialen Komponente der Wahrscheinlichkeitsdichte $D = 4\pi r^2 \psi^* \psi$ für verschiedene Zustände des Wasserstoffatoms in bezug auf die Entfernung, die in a_1-Einheiten angegeben ist, dargestellt.

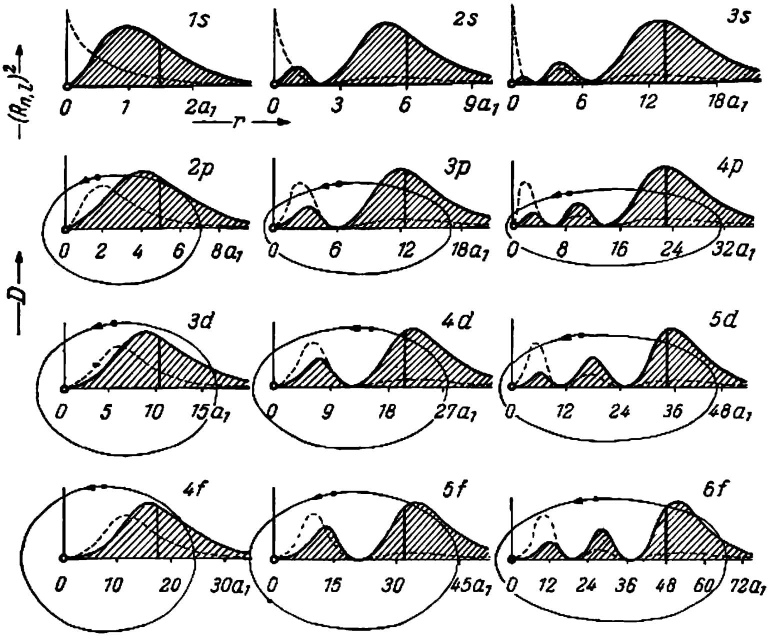


Abb. 235. Graphische Darstellung der radialen Komponente der Wahrscheinlichkeitsdichte $D = 4\pi r^2 [R(n, l)]^2$ für verschiedene Zustände eines wasserstoffähnlichen Atoms. Die punktierte Linie stellt den Gang der Funktion $[R(n, l)]^2$ dar. Die breite Vertikallinie gibt die Lage des Mittelwertes an.

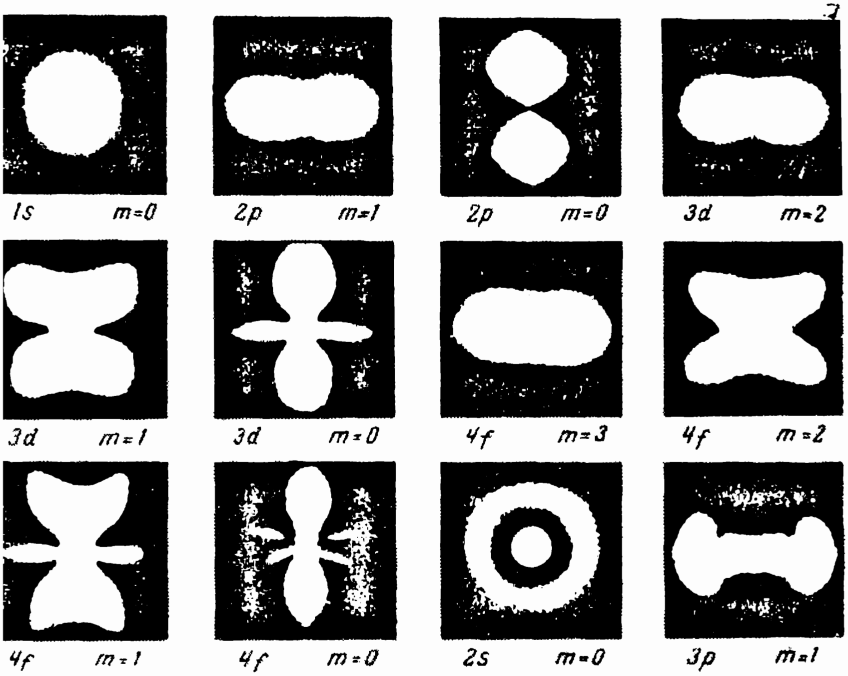
Für alle Zustände (außer denen vom Typ *s*) sind die entsprechenden Bahnen, die von der Größe $\sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}$ des Impulsmoments ausgehend berechnet wurden, eingezeichnet. Die großen Halbachsen dieser Bahnen, die nur von der Hauptquantenzahl *n* abhängen, sind die gleichen wie die der entsprechenden Bahnen in der Bohrschen Theorie. Es ist zu sehen, daß für die Zustände 1*s*, 2*p*, 3*d* und 4*f* die Maxima der Wahrscheinlichkeitsdichte den Abständen a_1, $4a_1$, $9a_1$ und $16a_1$ entsprechen (in Übung 1 am Ende des Paragraphen wird dem Leser vorgeschlagen, dies durch Rechnung zu beweisen). Wir erinnern uns noch, daß

([1]Siehe z. B. A. Sommerfeld, „Atombau und Spektrallinien“, 7. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1951.

Tabelle XXV

l	m	ψ (normiert) $= R(r)\,\Theta_{l,m}\,e^{\pm im\varphi}$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\sigma}$
0	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}(2-\sigma)\,e^{-\frac{\sigma}{2}}$
1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma e^{-\frac{\sigma}{2}}\cos\vartheta$
1	+1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma e^{-\frac{\sigma}{2}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}$
1	−1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma e^{-\frac{\sigma}{2}}\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}$
0	0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}(21-18\sigma+2\sigma^2)\,e^{-\frac{\sigma}{3}}$
1	0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}(6-\sigma)\,\sigma e^{-\frac{\sigma}{3}}\cos\vartheta$
1	+1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}(6-\sigma)\,\sigma e^{-\frac{\sigma}{3}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}$
1	−1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}(6-\sigma)\,\sigma e^{-\frac{\sigma}{3}}\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}$
2	0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma^2 e^{-\frac{\sigma}{3}}(3\cos^2\vartheta-1)$
2	+1	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma^2 e^{-\frac{\sigma}{3}}\sin\vartheta\cos\vartheta\, e^{i\varphi}$
2	−1	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma^2 e^{-\frac{\sigma}{3}}\sin\vartheta\cos\vartheta\, e^{-i\varphi}$
2	2	$\frac{1}{81\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma^2 e^{-\frac{\sigma}{3}}\sin^2\vartheta\, e^{i2\varphi}$
2	−2	$\frac{1}{81\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}\sigma^2 e^{-\frac{\sigma}{3}}\sin^2\vartheta\, e^{-i2\varphi}$

: Bohrschen Theorie für die berechneten Zustände ($l = 0$, 1, 2, 3, allgemein n enen $n_\varphi = l + 1$ ist, die Bahnen Kreise darstellen, deren Radien genau gleich a_1, .$6a_1$ sind. Wenn wir beachten, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte nur für Abst r Größenordnung der großen Bahnhalbachse wesentlich von Null verschieden is klar, daß auch hier eine „verschwommene" Übereinstimmung mit den klassis en vorliegt, wie in allen übrigen Fällen.



. 236. Photographien der Elektronenwolke für verschiedene Zustände wasserstoffähnlic Atome

n räumliche Bilder der Wahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten, ist es notwendig, elabhängigen Teil der Eigenfunktion $Y(\vartheta, \varphi)$ zu berücksichtigen. Eine deutliche ' ıng kann man von diesem Bild erhalten, wenn man die Photographien in Abb. 236 ıtet. Diese Photographien wurden mit Hilfe einer besonderen mechanischen Vorricht ;nommen. Sie bestand aus einer elektrischen Glühlampe am Ende einer um einen] t drehbar angeordneten Stange, deren freier Teil in seiner Länge entsprechend verän le. Diese Photographien können folgendermaßen gedeutet werden: Wir stellen ahineilendes Elektron vor, das sich überall da im Raum befinden kann, wo die W nlichkeitsdichte von Null verschieden ist. Es wird selbstverständlich vor allem treffen sein, wo die Wahrscheinlichkeitsdichte ihren Maximalwert annimmt. We n wir uns vor, daß es uns gelänge, eine Photographie dieses Elektrons mit la

Belichtungszeit anzufertigen. Seine Abbildung ist dann „verschmiert“ und ergibt (in Abhängigkeit vom Zustand) eines der Bilder der Abb. 236. Da $e\psi^*\psi d\tau$ die mittlere Ladungsdichte am gegebenen Orte ist, kann man auch sagen, daß diese Photographien die über den ganzen Raum in Form einer Wolke „verschmierte“ Ladung des Elektrons darstellen.

Übungen:

1. Es ist zu zeigen, daß sich die Maxima der Wahrscheinlichkeitsdichte in den Zuständen $2p$ und $3d$ in Abständen $4a_1$ und $9a_1$ vom Kern befinden.

2. Es ist zu zeigen, daß im Zustand $1s$ der Mittelwert $\overline{r^2}$ gleich $3a_1$, der Mittelwert $\overline{\left(\frac{1}{r^2}\right)}$ gleich $\frac{1}{a_1^2}$ ist.

3. Es ist zu zeigen, daß im Zustand $1s$

$$\overline{r^k} = \frac{(k+2)!\, a_1^k}{2^{k+1}}$$

ist.

4. Es ist zu zeigen, daß im Zustand $2p$ $\bar{r} = 5a_1$, $\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{4a_1}$ und im Zustand $3d$ $\bar{r} = 10{,}5\, a_1$, $\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{9a_1}$ ist.

5. Die Mittelwerte der Entfernung des Elektrons vom Kern werden in der Quantenmechanik und in der Bohrschen Theorie für beliebige Zustände wasserstoffähnlicher Atome mit der Atomnummer Z durch folgende Formeln dargestellt:

In der Quantenmechanik

$$\bar{r}_{nl} = \frac{n^2 a_1}{Z}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l(l+1)}{n^2}\right)\right],$$

in der Bohrschen Theorie

$$\bar{r}_{n,\, n_\varphi} = \frac{n^2 a_1}{Z}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_\varphi^2}{n^2}\right)\right].$$

Diese Formeln sind zu vergleichen, ihre Ähnlichkeit ist festzustellen und der Grund des Unterschiedes — zu erklären.

§ 185. Das Valenzelektronenmodell

Die Berechnung komplizierter Atome, d. h. Systeme mehrerer (oder vieler) Elektronen im Zentralfeld, ist eine mühsame und langwierige Aufgabe. Es gibt jedoch eine Gruppe von Atomen mit mehreren Elektronen, deren spektrale Eigenschaften sich leicht durch Näherungsrechnungen, die sich nur wenig von der betrachteten Lösung des Kepler-Problems für wasserstoffähnliche Systeme unterscheiden, darstellen lassen. Es sind dies die Atome der Alkalimetalle Li, Na, K, Rb, Cs, die in der ersten Gruppe des periodischen Systems stehen. In den Spektren dieser Atome gibt es Serien, die in ihrer äußeren Form genau an die Wasserstoffserien erinnern. In Abb. 237 ist als Beispiel das Absorptionsspektrum des

Natriumdampfes (sogenannte Hauptserie des Natriums, siehe § 186) wiedergegeben. Wir sehen hier, wie bei den Wasserstoffserien, dasselbe gesetzmäßige Zusammenrücken der Linien und einen Intensitätsabfall nach der Seriengrenze hin.

Es existiert allerdings ein wesentlicher Unterschied, der in Folgendem besteht: Alle Serien des Wasserstoffatoms (und wasserstoffähnlicher Ionen) ergeben sich aus Kombinationen nur eines Termentyps $\frac{R}{k^2}$, und haben die allgemeine Form

$$\nu = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2},$$

worin n eine konstante und m eine variable ganze Zahl ist. Die Serien der Alkalimetallatome können in Form von Termkombinationen, die $\frac{R}{k^2}$ *ähnlich* sind, aber nicht mit ihnen zusammenfallen, dargestellt werden. Der allgemeine Termausdruck für kompliziertere Atome ist in erster Näherung, wie schon RYDBERG durch die Analyse empirisch gewonnener Daten zeigte,

$$T_n = \frac{R}{(n+\sigma)^2}, \tag{185,1}$$

worin R dieselbe RYDBERGsche Konstante $R = 109737{,}30 \text{ cm}^{-1}$, n eine ganze Zahl und σ ein Korrekturfaktor ist. Es zeigte sich, daß zur formelmäßigen Darstellung aller beobachteten Spektralserien nicht eine einzelne Termserie $\frac{R}{n^2}$, sondern einige Termserien der Gestalt (185,1) benutzt werden müssen, wobei innerhalb jeder Termserie der Korrekturfaktor σ ein und denselben Wert behält.

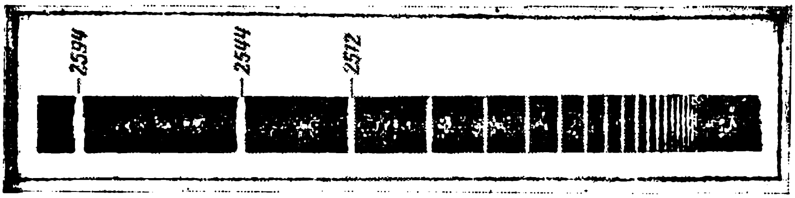


Abb. 237. Absorptionsspektrum des Na-Dampfes. Auf dem Spektrogramm ist nur der kurzwellige Teil der Serie wiedergegeben. Er beginnt mit dem 5. Glied der Serie (λ = 2594 Å)

Diese Besonderheiten der Alkalimetallatome konnten qualitativ schon im Rahmen der BOHRschen Theorie mit Hilfe des sogenannten Leuchtelektronenmodells gedeutet werden. Das periodische System der Elemente zeigt, daß die Alkalimetalle alle auf ein Edelgas folgen: Lithium steht nach Helium, Natrium nach Neon, usw., am Ende folgt Cäsium auf Xenon.

Die Edelgasatome sind durch ihre hohe Beständigkeit ausgezeichnet, während die Atome der Alkalimetalle im Gegensatz dazu besonders leicht zu ionisieren sind. Während z. B. die Energie, die zur Abspaltung des ersten Elektrons vom Heliumatom notwendig ist (das erste Ionisationspotential), 24,45 eV ausmacht, beträgt sie beim Lithium nur 5,37 eV, beim Neon 21,48 eV, beim Natrium dagegen 5,12 eV, usw.

Wir betrachten irgendein beliebiges Alkaliatom mit Z Elektronen. Dann können wir behaupten, daß $(Z-1)$ Elektronen die stabile Struktur eines Edelgases ausmachen (z. B. bilden die beiden ersten Elektronen des Lithiums die Heliumschale, die ersten 10 Elektronen des Natriums die Neonschale, usw.). Das letzte Elektron aber ist nur schwach an den Kern gebunden. In einem solchen Falle bilden die $Z-1$ inneren Elektronen mit negativer Gesamtladung $-(Z-1)e$ zusammen mit dem Kern mit positiver Ladung $+Ze$ den stabilen „Rumpf", der an einen Kern mit der Ladung $+e$ erinnert. Im Feld dieses „effektiven Kerns" bewegt sich das schwach gebundene Elektron, das gewöhnlich Leucht- oder Valenzelektron genannt wird, da es die chemische Wertigkeit des Atoms bedingt.

Wir erhalten so ein System, das an das Wasserstoffatom mit seinem Kern der Ladung $+e$ und einem Elektron erinnert. Warum aber unterscheiden sich dann im allgemeinen die Energiezustände dieses Systems — und zuweilen sogar sehr stark — von denen des Wasserstoffs? Der Grund hierfür ist folgender: Der Wasserstoffkern ist ein Elementarteilchen (ein Proton); der *Kern* eines wasserstoffähnlichen Ions, z. B. He^+, Li^{++}, usw., bildet zwar ein *System* von Teilchen, die Kräfte jedoch, die sie binden, sind so groß, daß man dieses System als vollkommen starr und unveränderlich ansehen kann. Der Rumpf oder „effektive Kern" der Alkalimetallatome hingegen ist keineswegs ein unveränderliches System; schon das starke Feld des Valenzelektrons kann, wenn es sich dem Rumpf hinreichend nähert, diesen beträchtlich deformieren, indem es den negativ geladenen Rumpfteil abstößt und den positiv geladenen Teil anzieht. Darum kann man nur unter bestimmten Bedingungen mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß die Bewegung des Leuchtelektrons im Zentralfeld einer Punktladung stattfindet. In vielen Fällen überlagert sich diesem Feld noch ein Dipolfeld oder das Feld eines komplizierteren Ladungssystems.

Weiter müssen wir nun daran erinnern, daß im Felde einer Punktladung die Energieniveaus entartet sind. So entsprechen z. B. der Hauptquantenzahl $n = 2$ des Wasserstoffatoms nicht ein, sondern zwei Energieniveaus gleicher Höhe, der Hauptquantenzahl $n = 3$ drei Niveaus, usw. Bei Rumpfdeformationen jedoch treten Störungen auf; die zusammenfallenden Niveaus werden auf verschiedene Weise gestört und spalten sich daher auf. Darin besteht nach Bohr und D. S. Roshdestwenski die Ursache für die Existenz mehrerer Termtypen bei den Alkalimetallen.

Dieses qualitative Bild kann man nun wie folgt für eine angenäherte quantitative Theorie benutzen. Da der Atomrumpf auf das Elektron im allgemeinen nicht als Punktladung, sondern als kompliziertes Ladungssystem wirkt, können wir die potentielle Energie

$$U = -\frac{e^2}{r} - c_1\frac{e^2}{r^2} - c_2\frac{e^2}{r^3} - \dots \tag{185,2}$$

in Form einer Reihe ausdrücken. Die Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$ sind offensichtlich nicht dimensionslose Zahlen; zur Homogenisierung der ganzen Summe muß der Koeffizient c_1 die Dimension einer Länge, c_2 die Dimension eines Längenquadrats, usw. haben. Das erste Glied der aufgeschriebenen Summe stellt darum die potentielle Energie des Elektrons im Felde einer Punktladung $+e$ dar, das zweite die potentielle Energie des Elektrons im Felde einer Dipolladung, die bekanntlich gleich $e\frac{el}{r^2}$ ist, worin el das Dipolmoment bedeutet, usw. Für eine erste Näherung genügen zwei Glieder der Reihe (185,2):

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} - c_1\frac{e^2}{r^2}. \tag{185,3}$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung in Polarkoordinaten lautet dann

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left(E+\frac{e^2}{r}+c_1\frac{e^2}{r^2}\right)\psi=0. \quad (185,4)$$

Wie in § 184 suchen wir die Lösung in Form eines Produkts

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=R(r)\,Y(\vartheta,\varphi) \quad (185,5)$$

und zerlegen unsere Gleichung (185,4) somit in zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0, \quad (185,6)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left(E+\frac{e^2}{r}+c_1\frac{e^2}{r^2}-\frac{h^2}{8\pi^2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0. \quad (185,7)$$

Die Gleichung (185,6) fällt offensichtlich mit (184,6) $[\beta=l(l+1)]$ zusammen. Der winkelabhängige Teil der Eigenfunktion $Y(\vartheta,\varphi)$ ist also genau der gleiche wie für das KEPLER-Problem:

$$Y(\vartheta,\varphi)=e^{\pm im\varphi}\Theta_{l,m}(\vartheta).$$

Daraus folgt, daß das, was im vorigen Paragraphen über die Zustände gesagt wurde, die durch diese Funktion beschrieben werden (speziell über das Vorhandensein von Niveauserien s, p, d, f), auch hier gilt. Die Zahlenwerte dieser Energieniveaus werden aber andere sein, da sich die Gleichung (185,7) von der Radialgleichung (184,8) des KEPLER-Problems durch das zusätzliche Glied $c_1\frac{e^2}{r^2}$ in der Klammer unterscheidet. Wenn wir jedoch (185,7) in die Form

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left\{E+\frac{e^2}{r}-\frac{h^2}{8\pi^2m}\frac{1}{r^2}\left[l(l+1)-c_1\frac{8\pi^2me^2}{h^2}\right]\right\}R=0 \quad (185,8)$$

umschreiben, so können wir uns davon überzeugen, daß die Gleichung formal identisch mit (184,8) ist. Setzt man

$$l'(l'+1)=l(l+1)-c_1\frac{8\pi^2me^2}{h^2}, \quad (185,9)$$

so kann man beide Gleichungen auf die gleiche Form bringen. Löst man die in l' quadratische Gleichung (185,9) und nimmt nur die positive Wurzel, so findet man

$$l'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(2l+1)^2-\frac{32\pi^2me^2}{h^2}c_1}$$

oder angenähert

$$l'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[(2l+1)-\frac{16\pi^2me^2}{h^2(2l+1)}c_1\right]=l-\frac{4\pi^2me^2}{h^2\left(l+\frac{1}{2}\right)}c_1. \quad (185,10)$$

Es ist evident, daß wir nach Weiterführung der Lösung wie in § 184 letzten Endes zu dem Ausdruck

$$E_{n,l} = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(n_r + l' + 1)^2 h^2}$$

für die Energie gelangen.

An Stelle der ganzzahligen Hauptquantenzahl

$$n = n_r + l + 1$$

erhalten wir die im allgemeinen nicht ganze Zahl

$$n^* = n_r + l' + 1$$

oder nach (185,10)

$$n^* = n_r + l + 1 - c_1 \frac{4\pi^2 m e^2}{h^2\left(l + \frac{1}{2}\right)} = n + \sigma\,, \tag{185,11}$$

worin σ das Korrekturglied

$$\sigma = -c_1 \frac{4\pi^2 m e^2}{h^2\left(l + \frac{1}{2}\right)} \tag{185,12}$$

ist. Die Zahl n^* heißt *effektive Hauptquantenzahl.* Den Ausdruck für die Energie können wir jetzt in der Gestalt

$$E_{n^*,l} = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^{*2} h^2} = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(n + \sigma)^2 h^2}$$

schreiben und den entsprechenden Term in der mit dem Rydbergschen Ausdruck (185,1) zusammenfallenden Form

$$T_{n^*,l} = -\frac{E_{n^*,l}}{hc} = \frac{R}{(n + \sigma)^2}\,.$$

Dazu sei bemerkt, daß — wie Formel (185,12) zeigt — die Korrektur σ von der azimutalen Quantenzahl l abhängt. Daher werden die Terme $s, p, d, \ldots$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ bei ein und demselben n nicht mehr den gleichen Wert besitzen — die Entartung ist aufgehoben.

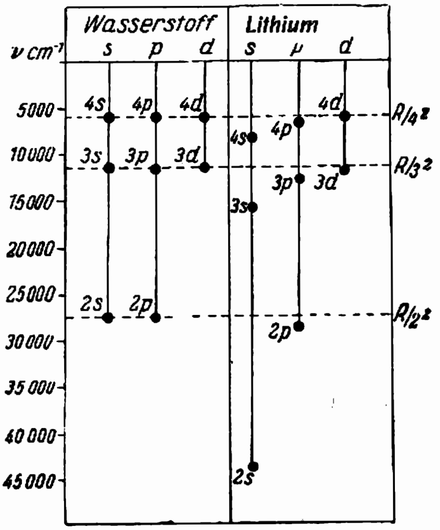


Abb. 238. Vergleich der Lithiumterme mit den Wasserstofftermen

Abb. 238 veranschaulicht die geschilderte Beziehung zwischen den Termen eines Alkalimetalls — des Lithiums — und den Wasserstofftermen. Um Platz einzusparen, wurden die Energieniveaus als Punkte eingezeichnet. Man sieht, daß beim Wasserstoff die Niveaus $2s$ und $2p$; $3s$, $3p$ und $3d$; $4s$, $4p$ und $4d$ zusammenfallen, während sich beim Lithium $2s$ und $2p$ stark unterscheiden; $3s$, $3p$ und $3d$ (besonders $3p$ und $3d$) liegen schon weniger weit auseinander und sind den Wasserstoffniveaus nahe. $4p$ und $4d$ schließlich fallen fast ganz miteinander und mit den Wasserstoffniveaus zusammen.

§ 186. Die Spektralserien der Alkalimetalle

Im vorigen Paragraphen wurde schon darauf hingewiesen, daß wegen der Existenz verschiedener Termtypen, die sich mehr oder weniger von wasserstoffähnlichen Termen unterscheiden, in den Alkalispektren mehrere verschiedene Serien zu beobachten sind. Alle beobachteten Frequenzen ordnen sich unter das gleiche Kombinationsprinzip wie die Frequenzen der Spektren wasserstoffähnlicher Atome

$$\nu = T(m) - T(n).$$

Das Umgekehrte hingegen ist nicht immer der Fall: Nicht jeder Termkombination entspricht eine Spektrallinie, die wirklich beobachtet werden kann. Wir werden später sehen, daß es bestimmte Regeln gibt („Auswahlregeln"), die angeben, welche Termkombinationen möglich sind und welche nicht. Die Serien, die lange vor der Entwicklung der Quantenmechanik empirisch in den Alkalispektren ermittelt wurden, sollen im Folgenden beschrieben werden.

Die Hauptserie. Diese Serie wird am leichtesten von allen Serien angeregt. Sie tritt auch bei Absorption auf, wenn man das Licht irgendeiner Quelle, die ein kontinuierliches Spektrum hat, durch kalten Metalldampf (Lithium, Natrium usw.) schickt. Ihr bekanntester Vertreter ist die gelbe Natriumlinie (in Wirklichkeit ein Dublett) $\lambda \approx 5890$ Å. Mit dieser Linie beginnt die Na-Hauptserie (Kopflinie). Die nächste Linie dieser Serie liegt im Ultravioletten, $\lambda = 3302$ Å, danach kommt $\lambda = 2853$ Å usw.

Aus der Tatsache, daß die Hauptserie gut in Absorption an *kaltem* Metalldampf zu beobachten ist, folgt, daß einer der für ihre Entstehung verantwortlichen Terme (der erste bei Absorption oder der Endterm bei Emission) dem *normalen*, d. h. unangeregten Zustand entspricht.

Für Alkalimetalle entspricht der Grundzustand, wie wir in dem vorigen Paragraphen sahen, zum Typ der s-Zustände ($l = 0$). Was aber die Hauptquantenzahl des Leuchtelektrons im Grundzustand betrifft, so ist sie für die einzelnen Alkalimetalle verschieden. Die Ermittlung dieser Hauptquantenzahlen ist eine Aufgabe der Theorie des periodischen Systems der Elemente, die wir im Kapitel XVI. kennenlernen werden. An dieser Stelle wollen wir nur ihre Werte angeben:

Atomnummer	Element	Hauptquantenzahl im Grundzustand
3	Li	2
11	Na	3
19	K	4
37	Rb	5
55	Cs	6

Empirisch wurde festgestellt, daß die verschiedenen Termkombinationen den schon erwähnten Auswahlregeln unterliegen. Es zeigte sich, daß allgemein nur solche Termkombinationen möglich sind, für die sich die Quantenzahlen l um 1 unterscheiden, d. h. also, Kombinationen der Terme s und p, p und d, usw. Unter gewöhnlichen Bedingungen werden Kombinationen innerhalb einer Termserie, z. B. Kombinationen der Terme s mit verschiedenen Haupt-

quantenzahlen, $2s - 3s$, u. a. m., *nicht beobachtet.* Termkombinationen mit $\Delta l = 2$ werden zwar beobachtet, jedoch nur in Ausnahmefällen; die entsprechenden Linien sind in der Regel nur schwach.

Diese Auswahlregeln wurden, wie schon gesagt, rein empirisch gefunden. Sie erhielten jedoch in der Quantenmechanik ihre vollkommene Erklärung, mit der wir uns im nächsten Abschnitt vertraut machen wollen.

Wenn wir uns daran erinnern, daß der Grundterm der Hauptserie vom Typ s ist, und außerdem die angegebenen Auswahlregeln beachten, so wird verständlich, daß die Hauptserie durch Kombinationen von s- und p-Termen entstehen muß. So ist z. B. die Formel für die Hauptserie des Lithiums

$$\nu = 2s - mp, \qquad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

die des Natriums

$$\nu = 3s - mp, \qquad m = 3, 4, 5, \ldots$$

usw. Diese Formeln können explizit mit Hilfe der RYDBERGschen Terme $\frac{R}{(m+\sigma)^2}$ dargestellt werden, wenn man vereinbart, das Korrekturglied jedesmal mit einem Buchstaben zu bezeichnen, der der Bezeichnung der gegebenen Termserie entspricht, z. B. für Lithium

$$\nu = \frac{R}{(2+s)^2} - \frac{R}{(m+p)^2}, \qquad m = 2, 3, 4, \ldots.$$

Die Schemata der Energieniveaus und der möglichen Übergänge werden gewöhnlich so gezeichnet, wie dies in Abb. 234 schon gezeigt wurde: Einer bestimmten Spalte entsprechen Niveaus mit ein und derselben Quantenzahl l und verschiedenen Hauptquantenzahlen. Ein Beispiel eines solchen Schemas, das in der Spektroskopie GROTRIAN-Diagramm genannt wird, ist in Abb. 239 wiedergegeben.

Ein besonderes Interesse stellen die Linien dar, die durch Übergänge zwischen dem Grundterm s und dem ihm nächstliegenden p-Term entstehen ($2s-2p$ für Lithium, $3s-3p$ für Natrium usw.) Es ist offensichtlich, daß die Anregung dieser Linien dem geringsten Energieaufwand entpricht. Außerdem kommt den Übergängen, denen diese Linien entsprechen, die größte Wahrscheinlichkeit zu. Daher zeichnen sich diese Linien durch größte Intensität aus.

Beleuchtet man z. B. Natriumdampf mit Licht, das ein kontinuierliches Spektrum hat, so vollziehen sich in den Natriumatomen mit größter Wahrscheinlichkeit Übergänge $3s-3p$, denen die Absorptionslinie $\lambda \approx 5890$ Å entspricht. Bei Rückkehr in den Grundzustand dieser angeregten Atome wird eine Linie emittiert, die ebenfalls die Wellenlänge 5890 Å besitzt (die gelbe D-Linie). Da Emissions- und Absorptionswellenlänge dieser Linien gleich sind, nennt man diese Linien *Resonanzlinien.*

Das Resonanzleuchten der Metalldämpfe stellt eine Art Dampffluoreszenz dar. Es ist sorgfältig und häufig untersucht worden. Das Resonanzleuchten des Natriums wurde insbesondere von WOOD erforscht, der zeigte, daß z. B. bei dem Beleuchten mit der UV-Linie 3302,34 Å, die dem Übergang $3s-4p$ (Abb. 240) entspricht, außer dieser Linie auch immer noch die gelbe Resonanzlinie auftritt. Ihre Entstehung kann man sich leicht auf folgende Weise klarmachen: Das bis zum Niveau $4p$ angeregte Atom kann gleich in den Grundzustand $3s$ zurückkehren; dabei wird dieselbe Linie $3s-4p = 3302{,}34$ Å ausgesandt. Es kann jedoch auch stufenweise auf das Niveau $3s$ zurückkehren (Abb. 240), nämlich $4p-4s$, $4s-3p$ und schließlich $3p-3s$.

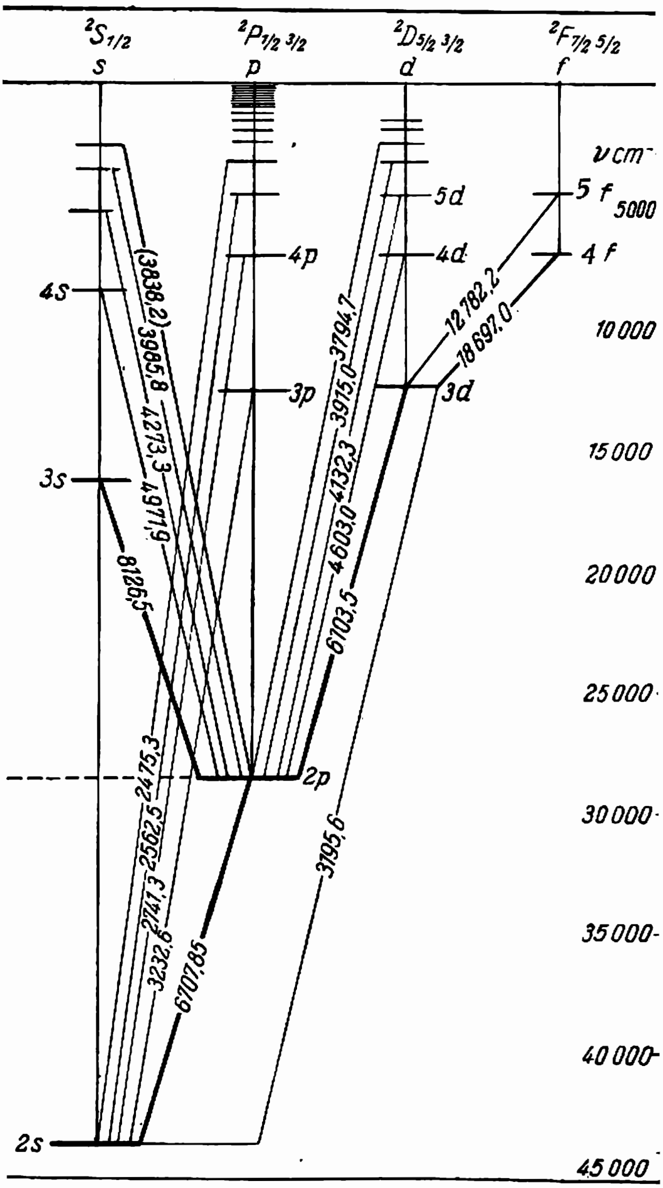


Abb. 239. Schema der Energieniveaus des Lithiumatoms

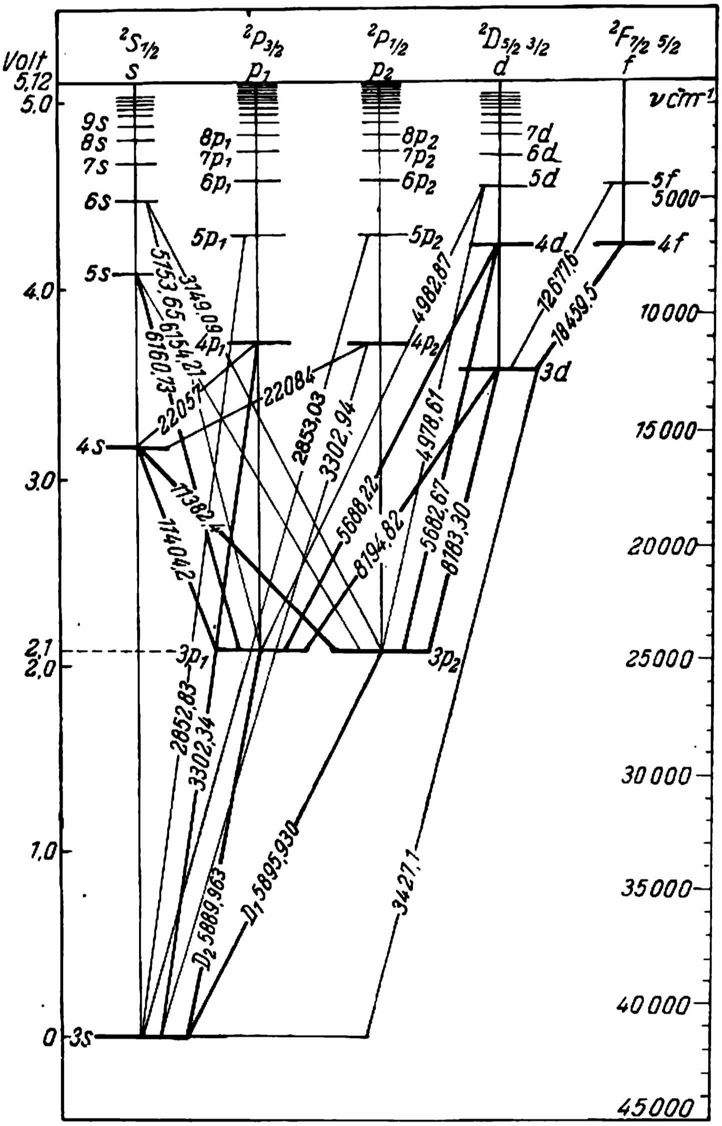


Abb. 240. Schema der Energieniveaus des Natriumatoms

Übergang wird dann die gelbe Resonanzlinie ausgestrahlt, wäh
iegenden Übergänge Linien entstehen, die im infraroten Teil des
241 ist ein ähnliches Diagramm für Cäsium wiedergegeben.

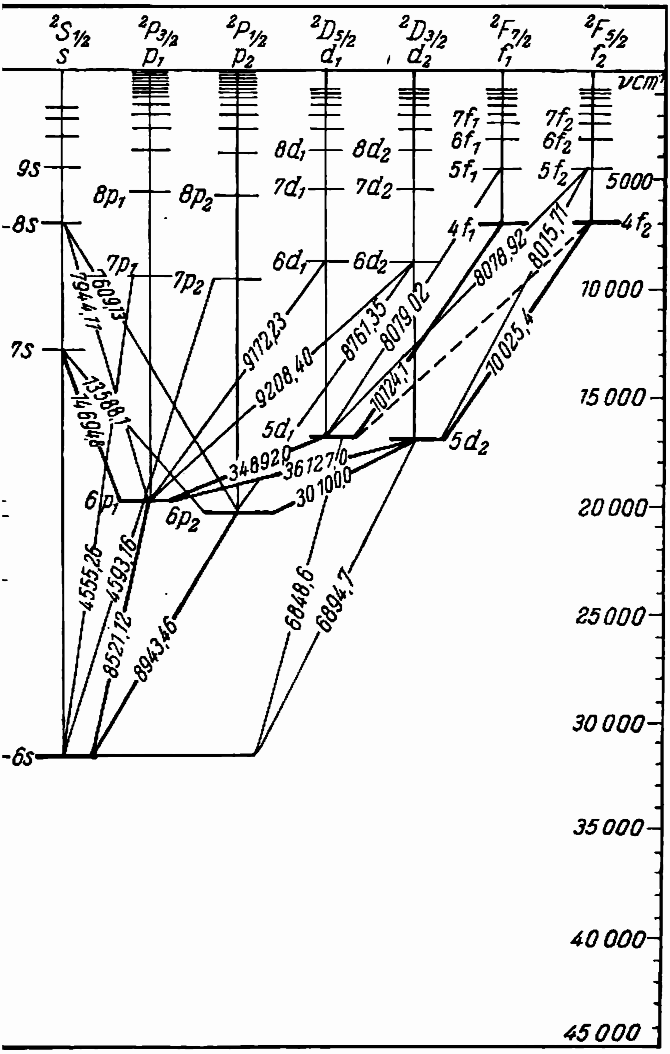


Abb. 241. Schema der Energieniveaus des Cäsiumatoms

lheiten dieser Schemata, speziell auf die Aufspaltung der p, d, f, .
n noch näher eingegangen werden (siehe Kapitel XIV).

Andere Serien der Alkalimetalle. Außer der Hauptserie werden in den Alkalispektren auch noch eine Reihe anderer Serien beobachtet. Vor allem sind dies zwei Serien, deren Grundterm der niedrigste p-Term ist ($2p$ beim Lithium, $3p$ beim Natrium usw.).

Diese Serien entstehen durch Übergänge von den Niveaus s und d auf das unterste p-Niveau. Die Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ ist sowohl im einen als auch im andern Fall erfüllt. Die Serien $2p-ms$ ($m = 3, 4, \ldots$) beim Lithium, $3p-ms$ ($m = 4, 5, \ldots$) beim Natrium usw. nennt man *zweite Nebenserien oder scharfe Serien.* Die Serien $2p-md$ ($m = 3, 4, \ldots$) und $3p-md$ ($m = 3, 4, \ldots$) heißen *erste Nebenserien oder diffuse Serien,* da ihre Linien verwaschen sind. Es ist klar, daß beide Serien eine gemeinsame Grenze haben müssen, die der Wellenzahl des niedrigsten p-Terms ($2p$ beim Li, $3p$ beim Na...) entspricht. Die Serien $3d-mf$ (für Li), $3d-mf$ (für Na) usw. schließlich werden als *Fundamental- oder* BERGMANN-*Serien* bezeichnet. Sie liegen im infraroten Teil des Spektrums. Die Entstehung aller Serien und der ihnen entsprechenden Übergänge ist leicht an Hand der Abbildungen 239 bis 241 zu verfolgen.

Alle beschriebenen Serien, außer der Hauptserie, erscheinen unter gewöhnlichen Bedingungen nur als Emissionslinienserien. Das Auftreten von Linien, deren Grundterme einem angeregten Zustand entsprechen, z. B. $2p$, ist im Absorptionsspektrum kalter Metalldämpfe unmöglich, da in kalten Dämpfen praktisch nur Atome im Grundzustand vorkommen. Eine genügend starke Konzentration angeregter Atome kann nur unter ganz besonderen Bedingungen erzeugt werden (siehe § 227).

Abschließend sei noch bemerkt, daß in den Spektren der Alkalimetalle außer den genannten Serien als Ausnahmen von der Auswahlregel auch verbotene Linien erscheinen (3195,6 Å als Ergebnis des Übergangs $2s-3d$ beim Lithium, 3427,1 Å durch den Übergang $3s-3d$ beim Natrium).

Übungen:

1. Unter Benutzung der rechten Skalen in den Abb. 239 bis 241, die den Wert der Terme in cm^{-1} angeben, sind Resonanz- und Ionisationspotentiale (in eV) aus dem Grund-s-Zustand für Li, Na und Cs annähernd zu berechnen.

2. Die Spektralterme des Lithiumatoms sind:

$2s$	43486,3						
$3s$	16280,5	$2p$	28582,5				
$4s$	8475,2	$3p$	12560,4	$3d$	12203,1		
$5s$	5187,8	$4p$	7018,2	$4d$	6863,5	$4f$	6856,1
				$5d$	4389,6	$5f$	4381,8

Unter Benutzung der RYDBERG-Formel (185,1) sind die Korrektionen für diese Terme zu berechnen und die Wasserstoffähnlichkeit der Terme d und f nachzuweisen (die RYDBERG Konstante ist mit $R = 109\,737\ \text{cm}^{-1}$ einzusetzen). Mit Hilfe der Tabelle sind Frequenzen und Wellenlängen aller Serien des Lithiumatoms auszurechnen.

3. Das Resonanzpotential des Natriums beträgt ungefähr 2 eV. Welcher Anteil der Atome des Na-Dampfes mit einer Temperatur von $T = 300°\,\text{K}$ befindet sich im Zustand $3p$? (Hinweis: Man benutze die MAXWELL-BOLTZMANNsche Formel $\sim e^{-E/kT}$.)

4. Die Grundterme der Alkalimetalle sind (in cm^{-1})

Li ($2s$)	43486,3	K ($4s$)	35008,5
Na ($3s$)	41440,0	Rb ($5s$)	33689,1
		Cs ($6s$)	31404,6

Es sind die Ionisationspotentiale (in eV) dieser Atome zu berechnen.

§ 187. Zwei Elektronen im Zentralfeld

Wir wollen uns nun der Behandlung des schwierigeren Problems zweier Elektronen im Zentralfeld zuwenden. Hierzu müssen wir zunächst die SCHRÖDINGER-Gleichung entsprechend verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung besteht in einer natürlichen Weiterentwicklung der Grundlagen der Quantenmechanik, wie sie im vorigen Kapitel aufgestellt wurden.

Wir haben jetzt zwei Teilchen, deren Lage durch die Radiusvektoren r_1 und r_2 vom Kraftzentrum aus bestimmt wird. Die HAMILTON-Funktion der klassischen Mechanik lautet für ein derartiges System

$$H = \frac{1}{2m_1}(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) + \frac{1}{2m_2}(p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_2}^2) + U(r_1, r_2). \tag{187,1}$$

Von dieser Funktion gehen wir zum Energieoperator über, indem wir die Impulskomponenten durch die entsprechenden Operatoren

$$p_{x_1} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_{x_2} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

ersetzen, worin die Indizes 1 und 2 angeben, daß die Differentiation nach den Koordinaten entweder des ersten oder des zweiten Teilchens auszuführen ist. Die potentielle Energie $U(r_1, r_2)$ — die eine Funktion der Koordinaten beider Teilchen ist — ersetzen wir durch den Operator der Multiplikation mit dieser Funktion. Der Energieoperator H hat dann die Form

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right) - \frac{h^2}{8\pi^2 m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) +$$

$$+ U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \equiv -\frac{h^2}{8\pi^2}\sum_i \frac{1}{m_i}\Delta_i + U. \tag{187,2}$$

Da der Operator H von 6 Koordinaten abhängt, ist auch die Funktion ψ, auf die er wirkt, von denselben 6 Koordinaten abhängig

$$\psi = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2).$$

Einen physikalischen Sinn allerdings hat nur das Quadrat des absoluten Betrages dieser Funktion

$$\psi^*\psi\, d\tau = |\psi|^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2.$$

Dieses Produkt deutet man als Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen 1 im Raumelement $d\tau_1$ mit den Koordinaten zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$, y_1 und $y_1 + dy_1$, z_1 und $z_1 + dz_1$, das Teilchen 2 im Raumelement $d\tau_2 = dx_2\, dy_2\, dz_2$ um den Punkt x_2, y_2, z_2 befindet. Dies kann man auch anders formulieren: Wir stellen uns einen sechsdimensionalen fiktiven Raum vor und wählen in ihm ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, dessen *Achsen die Koordinaten aller Teilchen repräsentieren.* Diesen Raum nennen wir *Konfigurationsraum* (nicht zu verwechseln mit dem Phasenraum, dessen Koordinaten nicht nur alle Ortskoordinaten, sondern auch alle Impulse sind). Der Gesamtheit der Koordinaten

beider Teilchen im Konfigurationsraum entspricht in einem gegebenen Augenblick ein Punkt. Daher ist $\psi^* \psi d\tau$ die Wahrscheinlichkeit dafür, den beide Teilchen repräsentierenden Punkt im gegebenen Raumelement

$$d\tau = d\tau_1 \, d\tau_2$$

des Konfigurationsraums zu finden.

Mit dem Energieoperator können wir die SCHRÖDINGER-Gleichung wie folgt aufstellen:

$$H\psi = E\psi,$$

wobei unter H der Operator (187,2) zu verstehen ist.

Wenn unsere beiden Teilchen nicht untereinander in Wechselwirkung stehen, dann ist die potentielle Energie des Systems $U(r_1, r_2)$ gleich der Summe der potentiellen Energien beider Teilchen im vorliegenden Zentralfeld. Wenn sich die Teilchen jedoch gegenseitig beeinflussen, dann erscheint in dem Ausdruck für die potentielle Energie noch ein Glied, das von den Koordinaten sowohl des einen als auch des anderen Teilchens abhängt. Wir wählen als Beispiel das Heliumatom oder ein ihm ähnliches System, das aus einem Kern mit der Ladung $+Ze$ und zwei Elektronen besteht. Ein derartiges System bildet außer Helium mit $Z = 2$ noch das Lithiumion Li^+ $(Z = 3)$, ionisiertes Beryllium Be^{++} $(Z = 4)$, usw. Die potentielle Energie setzt sich hier zusammen aus der potentiellen Energie jedes Elektrons im Feld des Kerns, von dem das Elektron nach dem COULOMBschen Gesetz angezogen wird, und der potentiellen Energie, die durch die gegenseitige Abstoßung der Elektronen bedingt ist:

$$U = -\frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}, \tag{187,3}$$

worin r_{12} der Abstand zwischen den Elektronen, r_1 und r_2 deren Abstand vom Kern ist. Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet mit dieser potentiellen Energie

$$(\Delta_1 + \Delta_2)\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}}\right)\psi = 0, \tag{187,4}$$

wobei Δ_1 und Δ_2 die LAPLACEschen Operatoren sind, in denen die Differentiation nach den Koordinaten des ersten und des zweiten Teilchens auszuführen ist.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$H_1 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta_1 - \frac{Ze^2}{r_1},$$

$$H_2 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta_2 - \frac{Ze^2}{r_2},$$

$$U_{12} = \frac{e^2}{r_{12}}.$$

Damit erhält dann die SCHRÖDINGER-Gleichung (187,4) die Form

$$(H_1 + H_2 + U_{12})\psi = E\psi. \tag{187,5}$$

Wenn das Glied U_{12}, das der Wechselwirkung Rechnung trägt, fehlen würde, so könnte die Gleichung (187,5) leicht in zwei Gleichungen aufgespaltet werden, von denen jede für sich die SCHRÖDINGER-Gleichung für das KEPLER-Problem (§ 184) darstellt. Tatsächlich setzen wir in (187,5) $U_{12} = 0$, so erhalten wir

$$(H_1 + H_2)\,\psi = E\psi. \tag{187,6}$$

Wir werden die Lösung dieser Gleichung als Produkt zweier Funktionen ansetzen, von denen jede nur von den Koordinaten des einen Elektrons abhängt. Bezeichnet man die Gesamtheit aller Koordinaten des i-ten Elektrons mit q_i, so gilt

$$\psi\,(q_1, q_2) = \psi_1\,(q_1)\cdot\psi_2\,(q_2).$$

Diese Lösung setzen wir in (187,6) ein und finden

$$\psi_2 H_1 \psi_1 + \psi_1 H_2 \psi_2 = E\psi_1\psi_2$$

oder nach Division durch $\psi_1\psi_2$

$$\frac{1}{\psi_1} H_1\psi_1 + \frac{1}{\psi_2} H_2\psi_2 = E. \tag{187,7}$$

Diese Gleichung zerfällt (siehe § 183) in zwei Gleichungen

$$H_1\psi_1 = E_1\psi_1, \quad H_2\psi_2 = E_2\psi_2, \tag{187,8}$$

in denen E_1 und E_2 die Eigenwerte der Operatoren H_1 und H_2 sind. Aus (187,7) und (187,8) folgt

$$E_1 + E_2 = E. \tag{187,9}$$

Die Gleichungen (187,8), die explizit wie folgt geschrieben werden können:

$$\Delta_1\psi_1 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E_1 + \frac{Ze^2}{r_1}\right)\psi_1 = 0,$$

$$\Delta_2\psi_2 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E_2 + \frac{Ze^2}{r_2}\right)\psi_2 = 0,$$

sind Gleichungen des KEPLER-Problems für jedes einzelne Teilchen. Da die Elektronen untereinander nicht in Wechselwirkung stehen, ist das Ergebnis (187,9) offensichtlich. Die Energie eines Systems aus Teilchen, zwischen denen keine Wechselwirkung besteht, ist gleich der Summe der Energien dieser Teilchen.

Wenn wir nun die Wechselwirkung der Elektronen untereinander, d. h. das Glied U_{12} im Energieoperator, berücksichtigen wollen, so entstehen dabei sofort mathematische Schwierigkeiten, da sich die Gleichung (187,5) in diesem Fall nicht durch den Ansatz $\psi = \psi_1\psi_2$ aufspalten läßt. Wir müssen also zur Lösung dieser Gleichung Näherungsmethoden anwenden. Eine von ihnen wollen wir im nächsten Paragraphen behandeln.

§ 188. Störungstheorie für einfache (nicht entartete) Eigenwerte

Das uns interessierende Problem ist dem Dreikörperproblem der Himmelsmechanik vollkommen ähnlich. Zwei Planeten, die nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz von der Sonne angezogen werden, stehen auch untereinander in Wechselwirkung. Die Berücksichtigung dieser

Wechselwirkung, die der exakten Lösung des Dreikörperproblems gleichkommt, stößt bekanntlich auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten. Man kennt jedoch in der klassischen Mechanik schon seit langem ausgezeichnete Näherungsmethoden, mit denen man Resultate erzielt, deren Genauigkeit durchaus den praktischen Erfordernissen der Astronomie genügt. Diese Methoden behandelt die sogenannte Störungstheorie, die es ermöglicht, die Lösung durch schrittweise Annäherung zu finden. Die grundlegende Annahme der Störungstheorie beruht auf der Tatsache, daß die Wechselwirkung der Planeten untereinander klein ist im Vergleich zur Wirkung der Anziehungskraft der Sonne auf jeden von ihnen.

In der sogenannten nullten Näherung bleibt die Wechselwirkung der Planeten untereinander deshalb ganz unberücksichtigt, und man erhält für jeden Planeten eine ungestörte Bahn. In der nächstfolgenden Näherung ist man bemüht, die Wechselwirkung als kleine Störung dieser Bahnen zu betrachten. Die beiden Planeten befinden sich aber zu verschiedenen Zeitpunkten in verschiedenen Entfernungen r_{12} voneinander, und die potentielle Energie ihrer Wechselwirkung U_{12} ändert sich entsprechend. Die Darstellung wird dadurch natürlich sehr kompliziert. Die Störungstheorie der klassischen Mechanik führt jedoch zu einem durch seine Einfachheit bemerkenswerten Resultat. Es zeigt sich, daß die Energie der gestörten Bewegung in erster Näherung einfach gleich der Energie der ungestörten Bewegung zuzüglich dem *über die ungestörte Bewegung gebildeten Mittel* der Wechselwirkungsenergie ist.

Die Störungstheorie in der Quantenmechanik führt zu einem Resultat, das dem der klassischen Mechanik analog ist. Die Bedingungen, die in einem atomaren System vorliegen, sind jedoch weit weniger günstig als in dem betrachteten astronomischen Falle, da die Wechselwirkungsenergie der Elektronen durchaus nicht klein gegen die der Wechselwirkung zwischen einem jeden von ihnen mit dem Kern ist. Bemerkenswert jedoch ist, daß trotzdem in vielen Fällen schon die erste Näherung durchaus befriedigende Ergebnisse ergibt, so unter anderem auch im Falle des Heliums, das, wie schon gesagt (Teil I, § 180), der Stein des Anstoßes für die Bohrsche Theorie war.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Schrödingersche Störungstheorie für den Fall einfacher Energieniveaus kennenlernen, d. h. für den Fall, daß jedem Eigenwert der Energie eine Eigenfunktion entspricht. Im folgenden Paragraphen werden wir dann die hier erhaltenen Resultate auf das Problem des Heliumatoms im Grundzustand anwenden.

Der Energieoperator des uns interessierenden Problems (das wir „gestörtes Problem" nennen werden) sei nur wenig von dem Energieoperator der exakt lösbaren Aufgabe verschieden. Die potentielle Energie des gestörten Problems möge sich von der ungestörten z. B. durch das Glied $\varepsilon U'$ unterscheiden, wobei ε ein kleiner Parameter ist:

$$U = U^0 + \varepsilon U'.$$

Der Energieoperator des gestörten Problems ist dann

$$H = H^0 + \varepsilon U', \tag{188,1}$$

wobei H^0 der Energieoperator des ungestörten Problems ist. Wir nehmen an, daß das ungestörte Problem

$$H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0 \tag{188,2}$$

exakt gelöst werden kann und uns die Eigenfunktionen ψ_n^0 und die Eigenwerte E_n^0 bekannt sind[1]). Dabei wollen wir in diesem Paragraphen nur den Fall betrachten, in dem jedem Eigenwert nur eine Eigenfunktion entspricht.

Das gestörte Problem

$$H\psi = E\psi \tag{188,3}$$

geht für $\varepsilon = 0$ in das ungestörte über. Da angenommen wurde, daß ε eine kleine Größe ist, so müssen wir erwarten, daß sich die Eigenfunktionen ψ_n und die Eigenwerte E_n des gestörten Problems nur unwesentlich von ψ_n^0 und E_n^0 unterscheiden. Darum können wir sie in der Form

$$\psi_n = \psi_n^0 + \varepsilon\psi_n' + \varepsilon^2\psi_n'' + \dots,$$

$$E_n = E_n^0 + \varepsilon E_n' + \varepsilon^2 E_n'' + \dots$$

ansetzen. Die aufeinanderfolgenden Glieder stellen die nullte, erste, zweite und höhere Näherung dar. Da jedoch für unsere Zwecke die erste Näherung ausreicht, können ψ_n und E_n in der Form

$$\psi_n = \psi_n^0 + \varepsilon\psi_n', \tag{188,4}$$

$$E_n = E_n^0 + \varepsilon E_n' \tag{188,5}$$

dargestellt werden. Wir setzen dies in die SCHRÖDINGER-Gleichung des gestörten Problems (188,3) unter Berücksichtigung des Ausdrucks (188,1) für H ein:

$$(H^0 + \varepsilon U')(\psi_n^0 + \varepsilon\psi_n') = (E_n^0 + \varepsilon E_n')(\psi_n^0 + \varepsilon\psi_n').$$

Nach Multiplikation erhalten wir

$$H^0\psi_n^0 + \varepsilon H^0\psi_n' + \varepsilon U'\psi_n^0 + \varepsilon^2\psi_n' U' = E_n^0\psi_n^0 + \varepsilon E_n^0\psi_n' + \varepsilon E_n'\psi_n^0 + \varepsilon^2 E_n'\psi_n'.$$

Hier können wir die Glieder mit ε^2 als Näherung höherer Ordnung streichen. Weiterhin können wir wegen (188,2) auch das erste Glied links und das erste Glied rechts weglassen. Den Rest der Gleichung schreiben wir um in

$$(H^0 - E_n^0)\,\psi_n' = (E_n' - U')\,\psi_n^0. \tag{188,6}$$

Wir erhalten so eine *inhomogene* Gleichung, deren linke Seite dieselbe Form wie (188,2) hat, die aber auf der rechten Seite den uns nicht bekannten Wert E_n' enthält. Diesen berechnen wir mit Hilfe des folgenden wichtigen Theorems: Damit die inhomogene

[1]) Im Einklang mit dem in § 162 Gesagten nehmen wir an, daß der Operator H^0 ein *diskretes* Spektrum von Eigenwerten hat. Die Störungstheorie ist auch auf den Fall eines kontinuierlichen Eigenwertspektrums anwendbar. Da wir aber in diesem Buch Probleme mit kontinuierlichen Eigenwertspektren nicht behandeln, verweisen wir auf andere Autoren (siehe ausführlicher bei D. I. BLOCHINZEW, „Grundlagen der Quantenmechanik", Kap. XIII. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958, und W. A. FOCK, „Elemente der Quantenmechanik", (В. А. Фок, Начала квантовой механики, гл. II, стр. 82, Кубуч, 1932) siehe auch W. PAULI, Handbuch der Physik, Bd. 24 I, S. 154, Springer, Berlin 1933.

Gleichung (188,6) überhaupt lösbar ist, d. h. eine stetige Lösung hat, muß die rechte Seite dieser Gleichung orthogonal zur Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$(H^0 - E_n^0)\,\psi = 0\,,$$

d. h. zu ψ_n^0, sein.

Beim Beweis dieses Theorems stützen wir uns auf die Hermitezität des Energieoperators. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (188,6) von links her mit ψ_n^{0*} und integrieren über den gesamten Raum:

$$\int \psi_n^{0*}\,(H^0 - E_n^0)\,\psi_n'\,d\tau = \int \psi_n^{0*}\,(E_n' - U')\,\psi_n^0\,d\tau\,.$$

Da H^0 ein selbstadjungierter Operator ist, können wir die linke Seite folgendermaßen umformen:

$$\int \psi_n^{0*}\,(H^0 - E_n^0)\,\psi_n'\,d\tau = \int \psi_n^{0*}\,H^0\psi_n'\,d\tau - E_n^0 \int \psi_n^{0*}\,\psi_n'\,d\tau =$$
$$= \int (H^0\psi_n^0)^*\,\psi_n'\,d\tau - E_n^0 \int \psi_n^{0*}\,\psi_n'\,d\tau =$$
$$= E_n^0 \int \psi_n^{0*}\,\psi_n'\,d\tau - E_n^0 \int \psi_n^{0*}\,\psi_n'\,d\tau = 0\,.$$

So erhalten wir

$$\int \psi_n^{0*}\,(E_n' - U')\,\psi_n^0\,d\tau = 0\,,$$

woraus wir

$$E_n' = \int \psi_n^{0*}\,U'\,\psi_n^0\,d\tau \tag{188,7}$$

finden, wenn wir annehmen, daß die Funktion ψ_n^0 normiert ist. Die rechte Seite von (188,7) aber ist nichts anderes als der quantenmechanische Mittelwert (siehe § 165) des Störungspotentials, *der über den entsprechenden ungestörten Zustand gebildet ist.* Wenn wir also die Energieniveaus und Eigenfunktionen des ungestörten Zustands kennen, können wir die gestörten Niveaus in erster Näherung berechnen:

$$E_n = E_n^0 + \varepsilon \int \psi_n^{0*}\,U'\,\psi_n^0\,d\tau\,. \tag{188,8}$$

Zur Berechnung der ersten Näherung der Eigenfunktionen des gestörten Zustands verfahren wir folgendermaßen: In der inhomogenen Gleichung

$$(H^0 - E_n^0)\,\psi_n' = (E_n' - U')\,\psi_n^0 \tag{188,6}$$

entwickeln wir die Funktion ψ_n' nach den orthogonalen Funktionen ψ_1^0, $\psi_2^0, \ldots, \psi_i^0, \ldots$ des ungestörten Zustands:

$$\psi_n' = \sum_k a_k \psi_k^0\,. \tag{188,9}$$

Setzen wir dies in (188,6) ein und beachten, daß infolge von (188,2)

$$H^0 \sum_k a_k \psi_k^0 = \sum_k a_k H^0 \psi_k^0 = \sum_k a_k E_k^0 \psi_k^0$$

ist, so erhalten wir

$$\sum_k a_k (E_k^0 - E_n^0)\,\psi_k^0 = (E_n' - U')\,\psi_n^0 .$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit ψ_m^{0*}, Integration und Berücksichtigung von

$$\int \psi_m^{0*}\,\psi_k^0\,d\tau = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq m, \\ 1 \text{ für } k = m, \end{cases}$$

erhalten wir

$$a_m (E_m^0 - E_n^0) = -\int \psi_m^{0*}\,U'\psi_n^0\,d\tau, \tag{188,10}$$

woraus

$$a_m = -\frac{\int \psi_m^{0*}\,U'\,\psi_n^0\,d\tau}{E_m^0 - E_n^0} \tag{188,11}$$

folgt. Diese Formel gestattet, alle Koeffizienten der Reihe (188,9) mit Ausnahme von a_n (Fall $m = n$) auszurechnen. Für $m = n$ geht der Nenner in (188,11) gegen Null, aber auch der Zähler ist gemäß (188,10) gleich Null, so daß der Koeffizient a_n unbestimmt ist. Diese Unbestimmtheit kann man allerdings zur Normierung der gestörten Funktion benutzen.

§ 189. Der Grundzustand des Heliumatoms

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Störungstheorie das Problem des Grundzustandes des Heliumatoms und ihm ähnlicher Ionen lösen. Das Problem des Heliumatoms wird in allgemeiner Form im XVI. Kapitel behandelt werden, da die angeregten Zustände des Heliums durch eine besondere Entartung ausgezeichnet sind, die wir erst später kennenlernen werden. In § 187 sahen wir, daß bei Berücksichtigung der Wechselwirkung der Elektronen die potentielle Energie des Heliums und ihm ähnlicher Ionen durch den Ausdruck

$$U = -\frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \tag{187,3}$$

gegeben ist. Dieser potentiellen Energie entspricht der Energieoperator

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}. \tag{189,1}$$

Die Schrödinger-Gleichung hat dann die Form

$$(\Delta_1 + \Delta_2)\,\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}}\right)\psi = 0,$$

$$\psi = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \tag{189,2}$$

(betr. Bezeichnungen siehe § 187). Streichen wir hier das Glied, das der Wechselwirkungsenergie der Elektronen $\frac{e^2}{r_{12}}$ entspricht, so läßt sich die verbleibende Schrödinger-Gleichung auf-

palten (siehe § 187), und wir erhalten für jedes Elektron eine Gleichung der Form

$$\Delta\psi_k + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E_k + \frac{Ze^2}{r_k}\right)\psi_k = 0, \quad k = 1, 2. \tag{189,3}$$

Das ist die untersuchte SCHRÖDINGER-Gleichung des KEPLER-Problems. Ihre Eigenwerte und Eigenfunktionen sind uns bekannt. Speziell für den Grundzustand ($n = 1$) ergibt die Formel (184,21)

$$E_1 = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2}. \tag{189,4}$$

Der Grundzustand ist der Zustand $1s$. Seine Eigenfunktion (§ 184) ist

$$\psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_1}\right)^{3/2} e^{-\sigma}, \tag{189,5}$$

worin

$$\sigma = \frac{Z}{a_1} r.$$

Die Energie des gesamten Systems ist gleich der Energiesumme der einzelnen Teile

$$E = 2E_1 = -2\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2}, \tag{189,6}$$

und die Eigenfunktion ist gleich dem Produkt der Funktionen ψ_{1s} für $r = r_1$ und $r = r_2$

$$\Psi = \frac{Z^3}{\pi a_1^3} e^{-\frac{Z}{a_1} r_1} e^{-\frac{Z}{a_1} r_2}. \tag{189,7}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Berechnungen führen wir die Bezeichnung

$$\varrho = \frac{2Z}{a_1} r \tag{189,8}$$

ein. (189,7) hat dann die Form

$$\Psi = \frac{Z^3}{\pi a_1^3} e^{-\frac{\varrho_1}{2}} e^{-\frac{\varrho_2}{2}}. \tag{189,9}$$

Damit haben wir in der nullten Näherung unsere Aufgabe vollständig gelöst.

Für die Lösung in erster Näherung werden wir die potentielle Energie der Wechselwirkung zwischen den Elektronen $\frac{e^2}{r_{12}}$ als Störung betrachten. Obwohl dieses Störglied im vorliegenden Falle nicht als klein angesehen werden kann, ist das Resultat, wie wir sehen werden, in erster Näherung befriedigend. Nach § 185 [Formel (188,7)] ist die Energiekorrektur in erster Näherung

gleich dem Mittelwert des Störglieds, der über den ungestörten Zustand gebildet ist, d. h.

$$E' = \int \frac{e^2}{r_{12}} |\Psi|^2 d\tau,$$

wobei das Raumelement $d\tau$ des sechsdimensionalen Raumes in Polarkoordinaten folgende Form hat:

$$d\tau = r_1^2 \sin\vartheta_1 \, dr_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \, r_2^2 \sin\vartheta_2 \, dr_2 \, d\vartheta_2 \, d\varphi_2 . \tag{189,10}$$

In den weiteren Berechnungen werden wir statt der Veränderlichen r_k die Veränderlichen ϱ_k, die nach Formel (189,8) zu bilden sind, benutzen:

$$r_{12} = \frac{a_1}{2Z}\varrho_{12}, \quad r_{1,2} = \frac{a_1}{2Z}\varrho_{12},$$

$$d\tau = \left(\frac{a_1}{2Z}\right)^6 \varrho_1^2 \sin\vartheta_1 \, d\varrho_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \, \varrho_2^2 \sin\vartheta_2 \, d\varrho_2 \, d\vartheta_2 \, d\varphi_2 .$$

Wir erhalten dann

$$E' = \frac{Ze^2}{2^5\pi^2 a_1} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-(\varrho_1+\varrho_2)}}{\varrho_{12}} \varrho_1^2 \, d\varrho_1 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \, \varrho_2^2 \, d\varrho_2 \sin\vartheta_2 d\vartheta_2 \, d\varphi_2 . \tag{189,11}$$

Das sechsfache Integral in dieser Formel ist gleich $20\pi^2$ [1]). Wir erhalten so [den Wert von a_1 siehe (183,10)]

$$E' = \frac{Ze^2}{2^5\pi^2 a_1} \cdot 20\pi^2 = \frac{Ze^2}{2a_1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2\pi^2 m Z e^4}{h^2} = \frac{5}{4} Z E_H , \tag{189,12}$$

wobei E_H die Energie des ersten Wasserstoffniveaus [siehe (184,21) für $Z = 1$ und $n = 1$] ist.

Somit ist die Energie des Grundzustands des Heliums in erster Näherung

$$E = -\left(2\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2} - \frac{5}{4} Z \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}\right) = -\left(2Z^2 - \frac{5}{4} Z\right) E_H . \tag{189,13}$$

Die Größe E_H ist bekannt:

$$E_H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} = 13{,}53 \text{ eV} .$$

Daher gibt (189,13) die Möglichkeit, die Energie des ersten Heliumniveaus ($Z = 2$) oder diesem ähnlicher Ionen ($Z = 3, 4, \ldots$) auszurechnen. Diese Energie ist mit positivem Vorzeichen gleich der Ionisationsenergie des Atoms im Grundzustand.

In Tabelle XXVI sind Werte angeführt, die einen Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen gestatten und gleichzeitig ermöglichen, die Bedeutung der Korrektur bei der ersten Näherung abzuschätzen. Alle Energiewerte der Tabelle sind in eV gegeben: E_{exp} ist die experimentell bestimmte Größe der Ionisationsenergie, E_0 das Resultat der nullten Näherung,

---

[1]) Siehe Anhang VIII am Ende des Buches.

$(E_0 + E')$ das Resultat der ersten Näherung, Δ_0 und Δ' sind die Differenzen zwischen den experimentell gefundenen Ergebnissen und nullter bzw. erster Näherung, $\frac{\Delta'}{\Delta_0}$ ist der Quotient dieser Differenzen.

Tabelle XXVI

Beobachtete und berechnete Werte für die Ionisationsenergie neutraler Heliumatome und ihnen ähnlicher Ionen

	$-E_{exp}$	$-E_0$	$-(E_0+E')$	Δ_0	Δ'	$\frac{\Delta'}{\Delta_0}$
He	78,62	108,24	74,42	29,62	$-$ 4,20	0,142
Li^{+}	197,14	243,54	192,80	46,40	$-$ 4,34	0,094
Be^{++}	369,96	432,96	365,31	63,00	$-$ 4,65	0,074
B^{+++}	596,4	676,50	591,94	80,1	$-$ 4,46	0,056
C^{++++}	876,2	974,16	872,69	97,96	$-$ 3,51	0,036

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die absolute Größe des Fehlers der ersten Näherung Δ' nahezu konstant bleibt. Da aber die Größe des Ionisationspotentials anwächst, nimmt der relative Fehler ab. Beim He beträgt er 5%, bei Li^{+} fällt er schon auf 2,2%, und für C^{++++} macht er nur noch 0,4% aus.

Es ist bemerkenswert, daß man ein derartig befriedigendes Resultat erhält, obwohl die durch die Wechselwirkung der Elektronen bedingte Störung durchaus nicht als klein gegenüber der Wechselwirkung jedes Elektrons mit dem Kern angesehen werden kann. Die Frage der durch die Störungstheorie erreichbaren Genauigkeit und deren Anwendbarkeit ist in Spezialwerken der Quantenmechanik näher behandelt[1]).

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß die Störungstheorie längst nicht immer befriedigende Resultate liefert und auch nicht immer angewendet werden kann. Das Problem der Bewegung vieler Elektronen eines komplizierten Atoms ist überhaupt außerordentlich schwierig. Im Rubidiumatom stehen z. B. 37, im Cäsiumatom 55 Elektronen in Wechselwirkung. Wenn es sich trotzdem als möglich erwies, die Rechnungen auch für solche Atome mit einer die hohen Anforderungen der Spektroskopie befriedigenden Genauigkeit auszuführen, dann nur deshalb, weil es gelungen ist, ausgezeichnete Näherungsmethoden zu entwickeln. In diesem Zusammenhang sind besonders die Arbeiten des sowjetischen Wissenschaftlers W. A. Fock zu erwähnen. Es würde jedoch weit über den Rahmen dieses Buches hinausgehen, die darin behandelten Probleme hier darzustellen[2]).

[1]) Siehe D. I. Blochinzew, „Grundlagen der Quantenmechanik“, Kap. XI, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

[2]) Siehe W. A. Fock, „Das Vielelektronenproblem der Quantenmechanik und der Atombau“, (В. А. Фок: „Многоэлектронная задача квантовой механики и строение атома“, Юбилейный сборник Академии наук СССР, ч. I, стр. 255, АН СССР, 1947).
Vgl. auch: P. Gombás, „Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik“, Verlag Birkhäuser, Basel 1950, S. 218 ff.

XIV. STRAHLUNG

Die bisher behandelten konkreten Probleme bezogen sich immer auf Bewegungen in einem zeitunabhängigen Potentialfeld (z. B. einem COULOMB-Feld). Wir gelangten so zu definierten stationären Zuständen, d. h. Zuständen, in denen die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^* \psi$ nicht von der Zeit abhängt.

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, daß die Quantenmechanik auch die Behandlung von Übergängen zwischen stationären Zuständen ermöglicht, d. h., die Probleme der Emission und Absorption von Licht zu lösen gestattet. Da wir hierbei Feldern mit zeitabhängigem Potential begegnen werden, müssen wir von Anfang an die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung, die die Zeit enthält,

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi ,$$

benutzen. Schließlich werden wir zeigen, wie man die SCHRÖDINGER-Gleichung verallgemeinern muß, um die Bewegung im Magnetfeld, das überhaupt kein Potential besitzt, zu behandeln.

§ 190. Die Methode der Variation der Konstanten

Als konkretes Beispiel wollen wir ein wasserstoffähnliches Atom untersuchen. Das Elektron dieses Atoms bewegt sich in einem Feld mit dem konstanten Potential $-\frac{Ze^2}{r}$; der HAMILTON-Operator H hat die aus § 184 bekannte Form. Lösen wir jetzt die SCHRÖDINGER-Gleichung $H\psi = E\psi$, so finden wir die Eigenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, denen im Falle $E < 0$ stationäre Zustände entsprechen. Die Zeitabhängigkeit kommt bei diesen Zuständen durch den Exponentialfaktor

$$e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t}$$

zum Ausdruck.

Stellen wir uns aber vor, daß von der Zeit $t = 0$ an das Atom der Wirkung des Feldes einer ebenen monochromatischen Lichtwelle ausgesetzt ist. In einem solchen Falle wird auf das Elektron außer der COULOMB-Kraft $\frac{Ze^2}{r^2}$ noch die periodische Kraft des elektromagnetischen Felds der Welle wirken. Die Wirkung dieser periodischen Kraft kann man mit Hilfe eines Potentials beschreiben, das explizit von der Zeit abhängt. Tatsächlich, die seitens des elektrischen Feldes der monochromatischen Welle auf das Elektron wirkende Kraft hängt von der Zeit nach dem Gesetz $e\mathfrak{E}_0 \cos \omega t$ ab. Dieser Kraft können wir (bis auf eine willkürliche Konstante) das Potential $U(x, t)$ gegenüberstellen, d. h. die Funktion, welche die Bedingung $-\frac{\partial U}{\partial x} = X$ befriedigt:

$$U(x,\ t) = -\int_0^x e\mathfrak{E}_0 \cos \omega t\, dx = -e\mathfrak{E}_0\, x \cos \omega t. \tag{190,1}$$

Wir können also das Feld, in dem sich das Elektron befindet, durch das Potential $-\frac{Ze^2}{r} + U(x, t)$ beschreiben. Der HAMILTON-Operator ist dann $H = H^0 + U(x, t)$, worin H^0 der HAMILTON-Operator für das COULOMBsche Kraftfeld ist. Die entsprechende SCHRÖDINGER-Gleichung lautet dann

$$[H^0 + U(x, t)]\,\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{190,2}$$

Kann man das zusätzliche Potential $U(x, t)$ als kleine Störung ansehen, so gelangen wir zu einem Fall, der mit dem in § 188 betrachteten zusammenfällt: Für $U = 0$ haben wir die Gleichung $H^0\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t}$, deren Lösung bekannt ist. Diese Lösung können wir als nullte Näherung betrachten und die Näherungen höherer Ordnung aufsuchen.

Es gibt allgemein zwei verschiedene Störungstheorien. In derjenigen, die wir in § 188 kennenlernten, ist die Störung als Ursache einer Zustandsänderung anzusehen. Die Störung hängt in diesem Falle nicht von der Zeit ab. Auf Grund dieser Theorie erhielten wir eine Antwort auf die Frage, wie sich die Energieniveaus ändern, wenn man die Störung berücksichtigt. Die andere Theorie bezieht sich auf den Fall, in dem die Niveaus selbst nicht verändert werden, das System jedoch unter dem Einfluß der zeitabhängigen (z. B. periodisch wechselnden) Störung nicht in einem der stationären Zustände verbleibt, sondern Übergänge aus einem Zustand in einen anderen vollzieht. Es ist offensichtlich, daß gerade diese zweite Theorie zur Lösung des Problems der Emission und Absorption des Lichts führt. Ihre Grundzüge sollen nachfolgend dargestellt werden.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung für das gestörte Problem laute

$$H\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{190,2'}$$

wobei der HAMILTON-Operator H in der Form

$$H = H^0 + U \tag{190,3}$$

einzusetzen ist. H^0 enthält das zeitunabhängige Potential. Für $U(x, t) = 0$ nimmt die Gleichung (190,2) die Form

$$H^0\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{190,4}$$

an. Als Lösungen dieser Gleichung erweisen sich die Funktionen

$$\psi_1 = \psi_1^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_1 t}, \quad \psi_2 = \psi_2^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_2 t}, \ldots, \quad \psi_n = \psi_n^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_n t}, \ldots. \tag{190,5}$$

Diese Funktionen bilden ein vollständiges, orthogonales, normiertes System (in Entartungsfällen müssen die entsprechenden Funktionen „orthogonalisiert“ werden; siehe § 158).

Da der Operator H in (190,2′) ein zeitabhängiges Potential enthält, werden die Funktionen vom Typ (190,5), die den stationären Zuständen entsprechen, nicht mehr dessen Lösung sein. Für einen bestimmten Zeitpunkt t' jedoch hat das Störungspotential $U(t')$ einen bestimmten

Wert. Für diesen Zeitpunkt ist das Potential gleich der Summe aus dem „ungestörten Potential", das in H^0 eingeht, und einer konstanten Zahl $U\ (t')$. Beachten wir, daß die Funktionen (190,5) ein vollständiges orthogonales System bilden, so können wir die Lösung der Gleichung (190,2') für den Zeitpunkt t' in Form einer Reihe der Funktionen (190,5) darstellen:

$$\psi' = \sum_k c_k \psi_k^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}E_k t'} = \sum_k c_k \psi_k .$$

Für einen anderen Zeitpunkt t'' können wir die Lösung in Form einer analogen Reihe, allerdings mit anderen Koeffizienten c_k, da $U\ (t') \neq U\ (t'')$, hinschreiben. Daher können wir die Lösung von (190,2') im allgemeinen als Reihe

$$\psi = \sum_k c_k\ (t)\ \psi_k \qquad (190{,}6)$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten $c_k\ (t)$ aufsuchen. Dabei ändern sich jedoch diese Koeffizienten nur langsam im Vergleich mit den sich schnell ändernden Exponentialfaktoren $e^{-i\frac{2\pi}{h}E_k t}$, die in ψ_k eingehen. Die Bedeutung dieser Koeffizienten liegt darin, daß die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung der Energie des Systems zum Zeitpunkt t den bestimmten Wert E_n zu erhalten, gleich $|\ c_n\ (t)\ |^2$ ist.

§ 191. Absorption und Emission des Lichts

Wir benutzen jetzt die im vorigen Paragraphen beschriebene Methode zur Lösung des Problems der Absorption und Emission von Licht. Dazu betrachten wir ein Atom, das von einem gewissen Zeitpunkt $t = 0$ an der Wirkung eines Lichtwellenfeldes unterworfen ist. Wir nehmen zunächst an, daß diese Welle streng monochromatisiert und in Richtung der x-Achse linear polarisiert ist und sich längs der z-Achse bewegt. Das elektrische Feld dieser Welle wirkt auf das Elektron des Atoms mit der Kraft

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{E}_\nu^0 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Die Wirkung des Magnetfeldes vernachlässigen wir, da die Kraft des Magnetfeldes der Lichtwelle, die auf das Elektron wirkt, im Verhältnis $\frac{v}{c}$ kleiner ist als die des elektrischen Feldes.

Wir wählen als Koordinatenursprung den Mittelpunkt des Atoms. In diesem Falle ist die Änderung von z im Bereiche des Atoms von der Größenordnung 10^{-8} cm; die Größe der Wellenlänge λ im Bereich des optischen Spektrums beträgt aber etwa 10^{-4} — 10^{-5} cm. Man kann daher den Bruch $\frac{z}{\lambda}$ im Phasenausdruck vernachlässigen und annehmen, daß innerhalb des Atoms die Welle ein und dieselbe Phase besitzt, so daß die x-Komponente der Kraft durch

$$X = e\mathfrak{E}_\nu^0 \cos 2\pi\nu t$$

dargestellt werden kann. Das dieser Kraft entsprechende Potential lautet

$$U(x, t) = -ex\mathfrak{E}_\nu^0 \cos 2\pi\nu t.$$

Es stellt die Störung dar, von der im vorigen Paragraphen die Rede war.

Die Lösung der gestörten Gleichung

$$H\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{190,2'}$$

mit dem HAMILTON-Operator

$$H = H^0 + U,$$

worin

$$U = U(x, t)$$

ist, suchen wir in Form einer Reihe mit zeitabhängigen Koeffizienten

$$\psi = \sum_k c_k(t)\,\psi_k. \tag{190,6}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $c_k(t)$ setzen wir (190,6) in die Gleichung (190,2) ein und erhalten

$$\sum_k c_k H^0\psi_k + \sum_k c_k U\psi_k = -\frac{h}{2\pi i}\sum_k c_k\frac{\partial\psi_k}{\partial t} - \frac{h}{2\pi i}\sum_k \psi_k\frac{dc_k}{dt}.$$

Da die Funktionen ψ_k die Gleichung des ungestörten Problems (190,4) befriedigen, sind das erste Glied links und das erste Glied rechts identisch. Streicht man beide, so bleibt

$$\sum_k c_k U\psi_k = -\frac{h}{2\pi i}\sum_k \psi_k\frac{dc_k}{dt}.$$

Wir multiplizieren jetzt beide Seiten dieser Gleichung mit einer Funktion ψ_m^*, die zu einer der Lösungen (190,4) komplex konjugiert ist, und integrieren über den ganzen Raum. Es ergibt sich dann

$$\sum_k c_k\int\psi_m^* U\psi_k\,d\tau = -\frac{h}{2\pi i}\sum_k\frac{dc_k}{dt}\int\psi_m^*\psi_k\,d\tau. \tag{191,1}$$

Hier haben wir rechts eine Summe, in der Integrale der Form

$$\int\psi_m^*\psi_k\,d\tau = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq m, \\ 1 \text{ für } k = m\end{cases}$$

vorkommen. Daher bleibt rechts nur ein Glied übrig, für das $k = m$ ist, d. h., die rechte Seite reduziert sich zu

$$-\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{dc_m}{dt},$$

und wir können (191,1) in die Form

$$\frac{dc_m}{dt} = -\frac{2\pi i}{h}\sum_k c_k \int \psi_m^* U \psi_k \, d\tau \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{191,2}$$

umschreiben. Setzen wir in diese allgemeine Gleichung nacheinander die Funktionen ψ_1, $\psi_2, \ldots$ für ψ_m ein, so erhalten wir ein Gleichungssystem, aus dem sich grundsätzlich alle Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ berechnen lassen. Diese Gleichungen erweisen sich als exakt, da wir bis jetzt noch keine Näherungsverfahren anwandten.

Die Berechnung der Koeffizienten c_m aus den exakten Gleichungen (191,2) ist allerdings praktisch unmöglich, da diese Gleichungen ein System mit einer unendlichen Anzahl von Unbekannten bilden. Darum muß man zu Näherungsmethoden Zuflucht nehmen. Um eine Lösung in *erster* Näherung zu bekommen, kann man die Tatsache ausnutzen, daß sich die Koeffizienten $c_k(t)$ nur langsam mit der Zeit ändern, und annehmen, daß für Zeiten zu Beginn der Störeinwirkung, d. h. zu einem Zeitpunkt nahe $t = 0$, die Koeffizienten c_k noch diejenigen Werte besitzen, die sie bei $t = 0$ hatten.

Wenn sich z. B. für $t = 0$ das Atom im stationären Zustand mit der Energie E_n befand, so ist für $t = 0$ gemäß der Bedeutung der Koeffizienten der Reihenentwicklung (§ 164) der Koeffizient c_n gleich 1 und alle übrigen Koeffizienten gleich Null:

$$c_k = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

da für diesen Augenblick mit Sicherheit bekannt ist, daß sich das Atom im Zustand ψ_n befand. Wir nehmen an, daß diese Werte der Koeffizienten für hinreichend kleine[1]) Werte von $t > 0$ *erhalten bleiben*. Das gibt uns die Möglichkeit, die Abhängigkeit aller Koeffizienten von der Zeit *angenähert* zu berechnen. Tatsächlich, unter der angegebenen Bedingung sind auf der rechten Seite der Gleichung (191,2) alle Koeffizienten c_k, außer (Fall $k = n$) $c_n = 1$, gleich Null. Wir erhalten

$$\frac{dc_m}{dt} = -\frac{2\pi i}{h}\int \psi_m^* U \psi_n \, d\tau. \tag{191,3}$$

Setzen wir hier $m = 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten wir Beziehungen für alle Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$, aus denen diese Koeffizienten einzeln berechnet werden können. Auf diesem Wege erhält man die erste Näherung. Danach kann man die zweite Näherung aufsuchen. Hierzu muß man die in der ersten Näherung ausgerechneten Koeffizienten c_m in (191,2) einsetzen und wieder integrieren. Durch Wiederholung dieser Operation kann man jede beliebige Näherung erhalten. Wir wollen uns im weiteren allerdings auf die erste Näherung beschränken, da sich diese als durchaus hinreichend für unsere Zwecke erweist.

Wir berücksichtigen jetzt die Zeitabhängigkeit der Funktionen ψ_m^* und ψ_n

$$\psi_m^* = \psi_m^{0*} e^{i 2\pi \frac{E_m}{h} t}, \quad \psi_n = \psi_n^0 e^{-i 2\pi \frac{E_n}{h} t}$$

[1]) Es ist an Zeiten gedacht, die klein sind im Vergleich zu den mittleren Verweilzeiten in einem stationären Zustand, die für Gas unter gewöhnlichen Bedingungen in der Größenordnung von 10^{-7}—10^{-8} sec liegen.

und führen die Bezeichnungen

$$\frac{E_m - E_n}{h} = \nu_{mn}, \quad \int \psi_m^{0*} U \psi_n^0 \, d\tau = U_{mn} \tag{191,4}$$

ein. Damit nimmt (191,3) die Form

$$\frac{dc_m}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} e^{i2\pi\nu_{mn}t} U_{mn} \tag{191,5}$$

an.

Diese Gleichungen werden wir benutzen, um die Übergangswahrscheinlichkeiten auszurechnen.

Wie wir voraussetzten, möge sich das Atom zur Zeit $t = 0$ in einem stationären Zustand mit der Energie E_n befinden. Unter dem Einfluß einer Störung wird ein Übergang in andere Zustände erfolgen. Da hier für $t > 0$ alle Koeffizienten c_k von Null verschieden sein können, so vermögen wir nicht zu sagen, daß sich der Übergang in irgendeinen bestimmten stationären Zustand vollzieht. Wir können nur behaupten, daß wir beim Messen der Energie zu irgendeinem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ mit einer Wahrscheinlichkeit, die gleich $c_m^* c_m \equiv |c_m|^2$ ist, den Wert E_m erhalten werden. Zeigt es sich, daß $|c_m|^2 = 0$ ist, so ist der Übergang $E_n \to E_m$ nicht möglich. $|c_m|^2$ charakterisiert also die Übergangswahrscheinlichkeit $E_n \to E_m$ für den Zeitabschnitt 0 bis t. Mit der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit wollen wir uns nun beschäftigen.

Berücksichtigen wir, daß

$$U(x, t) = -ex\mathfrak{E}_\nu^0 \cos 2\pi\nu t,$$

so finden wir unter Benutzung der Bezeichnungen (191,4)

$$U_{mn} = -e\mathfrak{E}_\nu^0 \cos 2\pi\nu t \int \psi_m^{0*} x \psi_n^0 \, d\tau.$$

Wenn wir zusätzlich noch die Bezeichnung

$$e \int \psi_m^{0*} x \psi_n^0 \, d\tau = e x_{mn} \tag{191,6}$$

einführen, so nimmt U_{mn} die Form

$$U_{mn} = -e x_{mn} \mathfrak{E}_\nu^0 \cos 2\pi\nu t \tag{191,7}$$

an. Die Größe x_{mn} können wir wie folgt deuten. Das Produkt ex ist die x-Komponente des Dipolmoments, wenn eine der Ladungen im Koordinatenursprung ruht. Der Mittelwert des Dipolmoments in irgendeinem bestimmten stationären Zustand mit der Eigenfunktion ψ_m^0 ist gleich (siehe § 165)

$$\overline{ex} = e \int \psi_m^{0*} x \psi_m^0 \, d\tau.$$

Die Formel (191,6) unterscheidet sich von diesem Ausdruck dadurch, daß in ihr Funktionen auftreten, die nicht einen Zustand ψ_m, sondern zwei Zustände, ψ_m und ψ_n, beschreiben. In Analogie zum bereits bekannten Ausdruck wollen wir jedoch den Ausdruck (191,6) den *mittleren Dipolmoment des Überganges* $n \to m$ nennen. Die Größen x_{mn} für alle möglichen

Kombinationen stationärer Zustände können im voraus berechnet werden. Sie bilden eine in bestimmter Weise geordnete Tabelle, d. h. eine Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ein beliebiges Glied dieser Matrix, dessen allgemeiner Ausdruck

$$x_{jk} = \int \psi_j^{0*} \, x \psi_k^0 \, d\tau \tag{191,7'}$$

ist, heißt Matrixelement.

Gehen wir nun zur Berechnung der Koeffizienten c_m über. Durch Einsetzen von (191,7) in (191,5) erhalten wir

$$\frac{dc_m}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \mathfrak{E}_\nu^0 \, e x_{mn} \, e^{i2\pi\nu_{mn} t} \cos 2\pi\nu t \, .$$

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung ersetzen wir hierin $\cos 2\pi\nu t$ durch die Halbsumme der Exponentialfunktionen

$$\frac{dc_m}{dt} = \frac{\pi i}{h} \mathfrak{E}_\nu^0 \, e x_{mn} \, e^{i2\pi\nu_{mn} t} \left(e^{i2\pi\nu t} + e^{-i2\pi\nu t}\right).$$

Hieraus finden wir durch direkte Integration von 0 bis t

$$c_m = \frac{1}{2h} \mathfrak{E}_\nu^0 \, e x_{mn} \left(\frac{e^{i2\pi(\nu_{mn}+\nu)t} - 1}{\nu_{mn} + \nu} + \frac{e^{i2\pi(\nu_{mn}-\nu)t} - 1}{\nu_{mn} - \nu} \right). \tag{191,8}$$

Die Übergänge, die im Atom unter der Einwirkung eines Strahlungsfeldes stattfinden, können zweierlei Art sein. Ist $E_m > E_n$, so entzieht das Atom dem Strahlungsfeld Energie, d. h., es vollzieht sich eine Absorption. Ist aber $E_m < E_n$, so gibt das Atom Energie an das Feld ab, es findet eine erzwungene Emission statt (siehe Teil I, § 94).

Den Bezeichnungen (191,4) entsprechend ist ν_{mn} im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Es ist leicht einzusehen, daß man in beiden Fällen eins der beiden Glieder in der Klammer obigen Ausdrucks für c_m streichen kann. Da nämlich $|\nu_{mn} + \nu|$ eine große Zahl ist, kann man im Falle der Absorption das erste Glied fortlassen, im Falle der erzwungenen Emission aber das zweite. Unsere weiteren Überlegungen werden wir für den Fall einer Absorption durchführen; wir streichen also das erste Glied. Was das zweite Glied anbetrifft, so ist auch dieses für alle Werte von ν nahezu gleich Null, *ausgenommen der Fall* $\nu \approx \nu_{mn}$. Wir erhalten somit

$$c_m = \frac{\mathfrak{E}_\nu^0}{2h} e x_{mn} \frac{e^{i2\pi(\nu_{mn}-\nu)t} - 1}{\nu_{mn} - \nu}.$$

Das Quadrat des absoluten Betrages von c_m, das die Übergangswahrscheinlichkeit darstellt, wird daher gleich

$$|c_m|^2 \equiv c_m^* c_m = \frac{(\mathfrak{E}_\nu^0)^2 e^2 |x_{mn}|^2}{4h^2} \cdot \frac{2[1 - \cos 2\pi(\nu_{mn} - \nu)t]}{(\nu_{mn} - \nu)^2} =$$

$$= \frac{(\mathfrak{E}_\nu^0)^2 e^2 |x_{mn}|^2}{h^2} \, \frac{\sin^2 \pi(\nu_{mn} - \nu)t}{(\nu_{mn} - \nu)^2}. \tag{191,9}$$

Diese Formel ist sehr wichtig. Wir sehen, daß die Übergangswahrscheinlichkeit erstens dem Quadrat der Amplitude des elektrischen Feldes der Welle (der elektrischen Feldstärke), d. h. der Intensität der Welle, proportional ist. Zweitens ist $|c_m|^2$ dem Quadrat des Dipolmoments des Übergangs $|ex_{mn}|^2$ proportional. Dieses Ergebnis ist dem in der klassischen Elektronentheorie der Strahlung auftretenden Resultat (siehe Bd. I, § 64) analog, mit dem wesentlichen Unterschied jedoch, daß an Stelle des Dipolmoments ex in der Formel (64,6′) jetzt das Matrixelement ex_{mn} auftritt. Die Formel (191,9) zeigt auch, daß die Kurve, die die Abhängigkeit des $|c_m|^2$ von der Frequenz ν darstellt, zu einem beliebigen Zeitpunkt für $\nu = \nu_{mn}$ eine scharfe Spitze hat. Das bedeutet, daß die einfallende Welle auf das Atom nur dann eine zum Übergang $E_n \to E_m$ führende Wirkung ausübt, wenn ihre Frequenz mit $\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}$ zusammenfällt oder ν_{mn} sehr nahe liegt. Dadurch wird die gut bekannte BOHRsche Frequenzbedingung gerechtfertigt.

In einer Hinsicht allerdings ist das gewonnene Ergebnis unbefriedigend. Wenn wir den Ausdruck (191,9) in der Form

$$|c_m|^2 = \frac{\pi^2}{h^2} (\mathfrak{E}_\nu^0)^2 e^2 |x_{mn}|^2 t^2 \left[\frac{\sin \pi (\nu_{mn} - \nu) t}{\pi (\nu_{mn} - \nu) t}\right]^2 \qquad (191,9')$$

schreiben, so sehen wir, daß für kleine Zeitintervalle $|c_m|^2$, also die Wahrscheinlichkeit eines Überganges in der Zeitspanne 0 — t Sekunden, dem Quadrat der Zeit proportional ist. Demzufolge ist die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs in der Zeiteinheit $\frac{d}{dt} |c_m|^2$ der Zeit selbst proportional. Ein derartiges Resultat steht in krassem Widerspruch zur statistischen Betrachtungsweise des Absorptionsprozesses (siehe z. B. Teil I, §§ 93 und 94).

Dieses unbefriedigende Resultat rührt von unserer Annahme her, daß sich die Absorption unter der Einwirkung einer streng monochromatischen Strahlung mit der bestimmten Frequenz ν vollziehe und daß der Übergang zwischen Zuständen ganz bestimmter Energien E_m und E_n erfolge, daß also auch ν_{mn} eine ganz bestimmte Frequenz ist. Es wurde jedoch schon verschiedentlich darauf hingewiesen, daß ein derartiger Fall in der Natur niemals vorkommt. In Wirklichkeit haben die Niveaus eine endliche Breite, und daher haben auch die Absorptionslinien eine endliche Breite, d. h., sie entsprechen einem schmalen Bereich des kontinuierlichen Spektrums. Um also die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit zu berechnen, die der ganzen Linienbreite und nicht nur ihrem Maximum entspricht, ist der Ausdruck (191,9) über die Frequenzen in Grenzen der Linienbreite zu integrieren. Die Integration wird dadurch erleichtert, daß die rechte Seite von (191,9) ein sehr spitzes Maximum bei $\nu = \nu_{mn}$ besitzt. Daher kann die Integration ohne weiteres von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt und $\mathfrak{E}_\nu^0$ als Konstante angesehen werden.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 d\nu = \frac{(\mathfrak{E}_\nu^0)^2 e^2 |x_{mn}|^2}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi (\nu_{mn} - \nu) t}{(\nu_{mn} - \nu)^2} d\nu .$$

Wir führen als neue Veränderliche $\pi (\nu_{mn} - \nu) t = \xi$ ein und erhalten

$$\int_{\infty}^{+\infty} |c_m|^2 d\nu = \frac{(\mathfrak{E}_\nu^0)^2 e^2 |x_{mn}|^2}{h^2} \pi t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi .$$

Das hierin auftretende bestimmte Integral ist bekannt, sein Wert ist gleich π. Damit ergibt sich endgültig

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | c_m |^2 \, d\nu = \frac{(\mathfrak{E}_\nu^0)^2 e^2 \, | x_{mn} |^2}{h^2} \, \pi^2 t. \tag{191,10}$$

Wir sehen, daß, wie auch zu erwarten war, die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit für t Sekunden der Zeit proportional und daher für die Zeiteinheit zeitunabhängig ist.

§ 192. Die Berechnung der Einstein-Koeffizienten

Die Einwirkung eines Lichtwellenfeldes auf ein Atom kann sich, wie wir schon erwähnten, auf zweierlei Weise äußern: Das Atom kann entweder Energie aus dem Felde absorbieren, indem es in höhere Energiezustände übergeht, oder es kann umgekehrt Energie an das Feld abgeben, indem es einen niedrigeren Energiezustand einnimmt. Im letzteren Falle haben wir es mit einer erzwungenen Emission zu tun (siehe Bd. I, § 94). Es sind aber auch sogenannte spontane Übergänge möglich, bei denen das Atom ohne Einwirkung des Lichtwellenfeldes in einen niedrigeren Zustand übergeht. Derartige Übergänge kann man jedoch im Rahmen der Quantenmechanik allein nicht verstehen. Von deren Standpunkt aus muß das Atom, das sich in einem stationären Zustand mit bestimmter Energie befindet, in diesem auch für eine unbestimmt lange Zeit bleiben, da keine Ursache für eine Energieänderung gegeben ist.

Zur Deutung der spontanen Übergänge müssen wir außer der Mechanik auch die Faktoren berücksichtigen, die die Eigenschaften des Strahlungsfeldes betreffen, und dabei immer ein System im Auge haben, das aus einem Atom und einem Strahlungsfeld besteht. Eine derartige exakte Strahlungstheorie existiert, ihre Darlegung würde jedoch über den Rahmen dieses Buches hinausgehen[1]). Wir wollen uns daher darauf beschränken, einen Zusammenhang zwischen den von uns berechneten Größen $| c_m |^2$ und den Wahrscheinlichkeiten für erzwungene und spontane Übergänge, die in der statistischen Strahlungstheorie von Einstein auftreten, zu finden (siehe Bd. I, §§ 92 bis 95).

Es sei daran erinnert, daß in dieser Theorie Atome betrachtet werden, die in thermodynamischem Gleichgewicht mit der Hohlraumstrahlung stehen. Wenn E_m und E_n zwei Energieniveaus sind, wobei $E_m > E_n$, so vollziehen sich in den Atomen Übergänge sowohl nach der einen als auch der anderen Seite, also Übergänge

$$E_n \to E_m \quad \text{und} \quad E_m \to E_n.$$

Die Übergänge erster Art, die von einer Absorption der Feldenergie begleitet sind, vollziehen sich nur unter Einwirkung des Feldes und werden durch den Koeffizienten B_{nm} charakterisiert. Die Übergänge der zweiten Art vollziehen sich sowohl unter der Feldeinwirkung (erzwungene Emission) als auch „willkürlich" (spontane Emission) und werden entsprechend durch die Koeffizienten B_{mn} und A_{mn} charakterisiert. In den Fällen, in denen die Energieniveaus einfach (nicht entartet) sind, gelten zwischen den drei Koeffizienten B_{nm}, B_{mn} und A_{mn} die statistischen Beziehungen

[1]) Siehe z. B.: W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Clarendon Press Oxford, 1954, Kap. III.
Vgl. auch: G. Wentzel, Handbuch der Physik, Bd. 24I, S. 740 ff., Verlag Springer, Berlin 1933.

$$B_{nm} = B_{mn}, \quad A_{mn} = \frac{8\pi h\,\nu^3}{c^3} B_{nm} \tag{192,1}$$

(siehe Bd. I, § 95, Formeln auf S. 299, wobei $g_1 = g_2 = 1$ zu setzen ist).

Die Hohlraumstrahlung ist gekennzeichnet durch die räumliche Dichte ϱ_ν, die den Mittelwert der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\varrho_\nu = \frac{1}{8\pi}(\overline{\mathfrak{E}_\nu^2} + \overline{\mathfrak{H}_\nu^2}) = \frac{1}{4\pi}\overline{\mathfrak{E}_\nu^2}$$

darstellt. Weiter ist wegen der völligen Isotropie der Hohlraumstrahlung

$$\overline{\mathfrak{E}_{\nu x}^2} = \overline{\mathfrak{E}_{\nu y}^2} = \overline{\mathfrak{E}_{\nu z}^2} = \frac{1}{3}\overline{\mathfrak{E}_\nu^2}$$

und daher

$$\varrho_\nu = \frac{3}{4\pi}\overline{\mathfrak{E}_{\nu x}^2}. \tag{192,2}$$

Da

$$\overline{\mathfrak{E}_{\nu x}^2} = (\mathfrak{E}_{\nu x}^0)^2\,\overline{\cos^2 2\pi\nu t} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{\nu x}^0)^2$$

ist, so ist

$$\varrho_\nu = \frac{3}{8\pi}(\mathfrak{E}_{\nu x}^0)^2. \tag{192,3}$$

Die Formel (191,10) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich der Übergang in t Sekunden unter dem Einfluß einer in x-Richtung polarisierten Strahlung vollzieht. Im Falle nichtpolarisierter Strahlung lautet die Übergangswahrscheinlichkeit unter der Wirkung der x-Komponente des Feldes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |c_m|^2\, d\nu = \frac{(\mathfrak{E}_{\nu x}^0)^2 e^2 |x_{mn}|^2}{h^2}\pi^2 t. \tag{191,10'}$$

Drücken wir mit (192,3) $(\mathfrak{E}_{\nu x}^0)^2$ durch ϱ_ν aus und setzen dies in (191,10′) ein, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |c_m|^2\, d\nu = \frac{8\pi^3 e^2}{3h^2}|x_{mn}|^2 \varrho_\nu t. \tag{192,4}$$

Für die Wahrscheinlichkeit der Übergänge unter Einwirkung der beiden anderen Feldkomponenten ergeben sich analoge Ausdrücke:

$$\frac{8\pi^3 e^2}{3h^2}|y_{mn}|^2 \varrho_\nu t \quad \text{und} \quad \frac{8\pi^3 e^2}{3h^2}|z_{mn}|^2 \varrho_\nu t. \tag{192,5}$$

Die vollständige Übergangswahrscheinlichkeit in der Zeiteinheit unter dem Einfluß unpolarisierter Strahlung ist daher

$$\frac{8\pi^3 e^2}{3h^2}(|x_{mn}|^2 + |y_{mn}|^2 + |z_{mn}|^2)\,\varrho_\nu$$

oder mit

$$|x_{mn}|^2 + |y_{mn}|^2 + |z_{mn}|^2 = |r_{mn}|^2,$$

auch

$$\frac{8\pi^3 e^2}{3h^2}|r_{mn}|^2 \varrho_\nu \equiv \frac{8\pi^3}{3h^2}|er_{mn}|^2 \varrho_\nu. \tag{192,6}$$

In der Einsteinschen Theorie haben wir für diese Wahrscheinlichkeit

$$B_{n,m}\,\varrho_\nu$$

geschrieben. Beachten wir (192,6), so erhalten wir

$$B_{nm} = \frac{8\pi^3}{3h^2}|er_{mn}|^2, \tag{192,7}$$

wobei er_{mn} der quantentheoretische Ausdruck für das Dipolmoment der klassischen elektromagnetischen Strahlungstheorie ist.

Der Koeffizient B_{nm} charakterisiert die Wahrscheinlichkeit eines mit Absorption verknüpften Übergangs und nach (192,1) auch die einer erzwungenen Emission. Die Übergangswahrscheinlichkeit für eine spontane Emission kann aus dem am Anfang des Paragraphen dargelegten Grunde nicht durch analoge Überlegungen erhalten werden. Wir können sie jedoch finden, wenn wir die für die Einsteinschen Koeffizienten A_{mn} und B_{mn} bei thermodynamischem Gleichgewicht gültige Beziehung

$$A_{mn} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{nm}$$

benutzen.

Setzen wir darin B_{nm} aus Formel (192,7) ein, so finden wir

$$A_{mn} = \frac{64\pi^4\nu_{nm}^3}{3hc^3}|er_{nm}|^2. \tag{192,8}$$

Um daraus den Ausdruck für die Energie einer Strahlung der Frequenz ν_{nm} im räumlichen Winkel $d\omega$ zu erhalten, multiplizieren wir (192,8) mit $h\nu_{nm}\frac{d\omega}{4\pi}$. Es ergibt sich

$$A_{mn}h\nu_{nm}\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{16\pi^3\nu_{nm}^4}{3c^3}|er_{nm}|^2\,d\omega. \tag{192,9}$$

Diesen Ausdruck vergleichen wir mit der Formel für die Intensität der Dipolstrahlung in der klassischen elektromagnetischen Theorie. Im Teil I, § 64 erhielten wir die Formel für die Gesamtintensität polarisierter Dipolstrahlung, die wir mit den Bezeichnungen dieses Paragraphen (wir ersetzen den Momentanwert des Dipolmoments $p_0 \cos 2\pi\nu t$ durch er) umschreiben können in

$$I = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3}(er)^2.$$

Für unpolarisierte Strahlung gilt

$$I = \frac{64\pi^4\nu^4}{3c^3}(er)^2.$$

Daraus ergibt sich die in den Raumwinkel $d\omega$ ausgestrahlte Energie zu

$$I\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{16\pi^3\nu^4}{3c^3}(er)^2\,d\omega\,. \tag{192,10}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (192,9), so sehen wir, daß der einzige Unterschied zwischen beiden darin besteht, daß an Stelle des Dipolmoments (er) in (192,10) das diesem entsprechende Matrixelement des Dipolmoments er_{nm} in (192,9) steht.

§ 193. Auswahlregeln

Nach dem Kombinationsprinzip der Spektroskopie kann die Frequenz einer beliebigen Spektrallinie (in Emission oder Absorption) als Differenz zweier Terme dargestellt werden,

$$\nu_{jk} = T_k - T_j\,.$$

Wie wir schon erwähnt haben (§ 186), ist diese Behauptung im allgemeinen nicht umkehrbar: nicht jede Termkombination ergibt eine Frequenz, die einer tatsächlich beobachtbaren Spektrallinie entspricht. Eine Analyse der Spektren zeigte, daß in sehr vielen Fällen eigenartige „Auswahlregeln“ gültig sind. Als „zulässig“, d. h. einer tatsächlich zu beobachtenden Linie entsprechend, erweisen sich nur einige wenige Übergänge, die durch eine mehr oder weniger streng bestimmte Änderung der Quantenzahlen charakterisiert sind. Alle sonstigen Übergänge sind „verboten“, d. h. Linien, die diesen „verbotenen“ Übergängen entsprächen, werden nicht beobachtet.

Diese „Auswahlregeln“, die von experimentell in der Spektroskopie arbeitenden Forschern mit großer Sicherheit festgestellt wurden, erweckten bis zur Entwicklung der Quantenmechanik den höchst eigenartigen Eindruck, es sei dem Atom „gestattet“, sich in einer bestimmten Weise zu verhalten, in einer anderen wiederum nicht. Die Formeln für die Übergangswahrscheinlichkeiten, wie sie im vorigen Paragraphen hergeleitet wurden, erklärten die Ursache dieses „Verbots“. Es zeigte sich, daß die Auswahlregeln einfach eine Folge der Orthogonalität der Eigenfunktionen sind.

Als Beispiel stellen wir die Auswahlregeln für den linearen harmonischen Oszillator und für ein Elektron im Zentralfeld auf.

a) *Der lineare harmonische Oszillator.* Die Übergangswahrscheinlichkeit berechnen wir nach Formel (192,8). Erfolgt die Oszillatorschwingung entlang der x-Achse, so unterscheidet sich nur das Matrixelement x_{nm} von Null:

$$x_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* x \psi_m\, dx\,. \tag{193,1}$$

Die Eigenfunktionen des linearen harmonischen Oszillators sind (siehe Teil I, § 150)

$$\psi_n = N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)\,.$$

An Stelle von x steht die dimensionslose Größe ξ, die wir bei der Lösung des Oszillatorproblems einführten,

$$\xi = \sqrt{a} \cdot x, \quad a = \frac{4\pi^2 m \nu_0}{h},$$

worin bedeuten: ν_0 die „klassische" Frequenz der Oszillatorschwingung [siehe Teil I, Formeln (149,9) und (149,3)], N_n den Normierungsfaktor (siehe Teil I, Anhang VI)

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{a^{1/2}}{\pi^{1/2}}.$$

Die $H_n(\xi)$ sind Tschebyschew-Hermitesche Polynome der Form

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n}. \tag{150,2'}$$

Da die Eigenfunktionen reell sind, ist $\psi_m^* = \psi_m$. Unter Beachtung von

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{a}}$$

werden wir die ax_{nm} folgendermaßen berechnen:

$$a x_{nm} = \xi_{nm} = \int \psi_n^* \xi \psi_m \, d\xi. \tag{193,2}$$

Setzen wir ψ_m und ψ_n hierin ein, so ergibt sich für ξ_{nm}

$$\xi_{nm} = \int G_{n+1} H_m(\xi) \, e^{-\xi^2} d\xi, \tag{193,3}$$

worin

$$G_{n+1} = N_n N_m \xi H_n(\xi) \tag{193,4}$$

ist. $H_n(\xi)$ ist ein Polynom n-ten Grades; daher ist $\xi H_n(\xi)$ vom $(n+1)$-ten Grade. Ein beliebiges Polynom vom Grade $(n+1)$ kann aber durch eine Summe der Tschebyschew-Hermiteschen Polynome $H_0(\xi)$, $H_1(\xi)$, ..., $H_{n+1}(\xi)$, multipliziert mit entsprechend gewählten Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$,

$$G_{n+1}(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n+1} c_\nu H_\nu(\xi) \tag{193,5}$$

dargestellt werden. Einige der Koeffizienten c_ν können gleich Null sein, c_{n+1} aber ist auf jeden Fall von Null verschieden. Setzen wir (193,5) in (193,3) ein, so erhalten wir

$$\xi_{nm} = \sum_{\nu=0}^{n+1} c_\nu \int H_\nu H_m e^{-\xi^2} d\xi. \tag{193,6}$$

Nehmen wir an, daß $m > n$. Wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen des linearen Oszillators sind alle in der Summe (193,6) auftretenden Integrale für $m \neq \nu$ gleich

Null. Da außerdem $m > n$ ist, haben wir für

$$m = n + 1$$

das einzige von Null verschiedene Integral. Unter dieser Bedingung ergibt (193,6)

$$\xi_{n,\,n+1} = c_{n+1} \int H_{n+1}^2(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi. \tag{193,7}$$

Wir setzen darin das von uns bei einer Normierung der Funktion ψ_n berechnete Integral ein.[1]) Es lautet

$$\int H_{n+1}^2(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi = 2^{n+1}(n+1)!\, \pi^{1/2}.$$

Das Quadrat des Normierungsfaktors ist

$$N_{n+1}^2 = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{a^{1/2}}{\pi^{1/2}}, \tag{193,8}$$

womit wir

$$2^{n+1}(n+1)!\, \pi^{1/2} = \frac{a^{1/2}}{N_{n+1}^2}$$

erhalten. Es ist dann

$$\int H_{n+1}^2(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi = \frac{a^{1/2}}{N_{n+1}^2}.$$

Setzen wir dies in (193,7) ein, so erhalten wir schließlich

$$\xi_{n,\,n+1} = c_{n+1} \frac{a^{1/2}}{N_{n+1}^2}. \tag{193,9}$$

Durch analoge Überlegungen überzeugen wir uns davon, daß für den Fall $n > m$ in (193,6) nur das Integral für $n = m + 1$, d. h. für $m = n - 1$ nicht verschwindet. Wir finden in diesem Fall

$$\xi_{n,\,n-1} = c_n \frac{a^{1/2}}{N_n^2}. \tag{193,10}$$

Daß für $m = n$ das Matrixelement ebenfalls gleich Null ist, folgt unmittelbar aus Formel (193,2). Diese nimmt für $m = n$ die Form

$$\xi_{n,\,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_n^2\, d\xi \tag{193,11}$$

an. Die Funktion $\psi_n(\xi)$ kann gerade oder ungerade sein, d. h., sie kann bei Änderung des Vorzeichens von ξ ihr Vorzeichen beibehalten oder umkehren. Die Funktion $\psi_n^2(\xi)$ ist

[1]) Siehe Teil I, Anhang VI, S. 438.

jedoch immer gerade, das Produkt $\xi \psi_n^2(\xi)$ demzufolge immer eine ungerade Funktion und das Integral (193,11) gleich Null.

So sind für den linearen harmonischen Oszillator die Matrixelemente des Dipolmoments in allen Fällen mit Ausnahme desjenigen, in dem $\Delta n = \pm 1$ ist, gleich Null. Daraus folgt die Auswahlregel: Für den linearen harmonischen Oszillator sind mit Ausstrahlung verbundene Übergänge nur bei Änderung der Quantenzahl um ± 1 möglich, also nur Übergänge zwischen benachbarten Zuständen. Da die Energie des linearen harmonischen Oszillators gleich

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$$

ist, kann der Oszillator wegen der Auswahlregel nur die „Grundfrequenz" ν_0 emittieren oder absorbieren, genau wie der klassische Oszillator. Die Frequenzen der „Obertöne" $2\nu_0$, $3\nu_0$ emittiert und absorbiert der harmonische Oszillator der Quantenmechanik ebenso wie der klassische Oszillator nicht.

Wir wollen nun die Übergangswahrscheinlichkeit der „erlaubten" Übergänge $\Delta n = \pm 1$ berechnen. Für $m = n + 1$ ergibt sich nach (193,4)

$$G_{n+1}(\xi) = N_n N_{n+1} \xi H_n(\xi).$$

Der Koeffizient bei der höchsten Potenz rechts ist $N_n N_{n+1} a_n$ oder, da in den Tschebyschew-Hermiteschen Polynomen $a_n = 2^n$ ist,

$$N_n N_{n+1} 2^n. \tag{193,12}$$

Der Koeffizient der höchsten Potenz rechts in (193,5) ist

$$c_{n+1} a_{n+1} = c_{n+1} 2^{n+1}. \tag{193,13}$$

Durch Gleichsetzung von (193,12) und (193,13) finden wir

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} N_n N_{n+1}.$$

Setzen wir diesen Wert in (193,9) ein, so erhalten wir

$$\xi_{n,n+1} = \frac{\alpha^{1/2}}{2} \cdot \frac{N_n}{N_{n+1}}.$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für den Normierungsfaktor (193,8) finden wir zunächst

$$\frac{N_n}{N_{n+1}} = \sqrt{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!}} = \sqrt{2(n+1)},$$

so daß

$$\xi_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}(n+1)}$$

ist.

Beachten wir schließlich, daß $x_{n,\,n+1} = \frac{1}{a}\,\xi_{n,\,n+1}$ ist, so erhalten wir

$$x_{n,\,n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{2a}}. \tag{193,14}$$

Die Formel (192,8) liefert uns jetzt für die Übergangswahrscheinlichkeit im linearen harmonischen Oszillator

$$A_{n,\,n+1} = \frac{64\pi^4 \nu_{n,\,n+1}^3 e^2}{3hc^3} \cdot \frac{n+1}{2a}. \tag{193,15}$$

Unter Beachtung der oben auf der Grundlage der Auswahlregel aufgestellten Beziehung

$$\nu_{n,\,n+1} = \nu_0$$

erhalten wir

$$A_{n,\,n+1} = \frac{64\pi^4 \nu_0^3 e^2}{3hc^3} \cdot \frac{n+1}{2a}. \tag{193,16}$$

Ganz analog ergibt sich für die Ausstrahlung

$$A_{n,\,n-1} = \frac{64\pi^4 \nu_0^3 e^2}{3hc^3} \cdot \frac{n}{2a}. \tag{193,17}$$

Setzen wir darin den Wert für a

$$a = \frac{4\pi^2 m \nu_0}{h}$$

ein, so erhalten wir

$$A_{n,\,n-1} = \frac{8\pi^2 \nu_0^2 e^2}{3mc^3}\, n. \tag{193,18}$$

Nach § 93 des I. Teils beträgt die mittlere Lebensdauer τ eines angeregten Zustands

$$\tau = \frac{1}{A_{n,\,n-1}}, \tag{93,7}$$

im vorliegenden Falle also

$$\tau = \frac{3mc^3}{8\pi^2 \nu_0^2 e^2} \cdot \frac{1}{n}. \tag{193,19}$$

In der klassischen Strahlungstheorie wurde gezeigt (Teil I, § 66), daß der Dämpfungsfaktor γ des Oszillators gleich

$$\gamma = \frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} = \frac{8\pi^2 \nu^2 e^2}{3mc^3} \tag{66,3}$$

ist. Formel (93,7) kann daher umgeschrieben werden in

$$\tau = \frac{1}{\gamma \cdot n},$$

während in der klassischen Theorie aber

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{8\pi^2\nu^2e^2}. \qquad (66,5)$$

b) *Das Elektron im Zentralfeld.* Wir zeigen jetzt, daß es für die Dipolstrahlung eines Elektrons, das sich im Zentralfeld (z. B. dem COULOMB-Feld eines Kerns) bewegt, zwei wichtige Auswahlregeln gibt. Die eine von ihnen beherrscht die Übergänge, die mit einer Änderung der Quantenzahl l verbunden sind, und sagt aus, daß nur Übergänge, bei denen Δl gleich $+1$ oder -1 ist, möglich sind:

$$\Delta l = \pm 1. \qquad (193,20)$$

Die zweite bezieht sich auf die Quantenzahl m. Es sind, wie sich herausstellt, nur Übergänge möglich, bei denen für m die Bedingung

$$\Delta m = \pm 1 \text{ oder } 0 \qquad (193,21)$$

erfüllt ist. Wir werden dies beweisen, indem wir zeigen, daß die nach den Formeln (192,7) und (192,8) zu berechnenden Übergangswahrscheinlichkeiten in allen Fällen, in denen die Forderungen (193,20) und (193,21) nicht erfüllt werden, gleich Null sind.

Die Matrixelemente der Koordinaten sind

$$x_{jk} = \int \psi_j^* x \psi_k \, d\tau, \qquad y_{jk} = \int \psi_j^* y \psi_k \, d\tau,$$

$$z_{jk} = \int \psi_j^* z \psi_k \, d\tau.$$

Zur Ableitung der Auswahlregeln für die Quantenzahlen l und m betrachten wir ein Modell, für das die Eigenfunktionen nur von den Winkeln ϑ und φ (siehe § 180) abhängen. Dieses Modell ist ein Teilchen, das sich in stets gleichbleibender Entfernung um ein unbewegliches Zentrum bewegt (Rotator). Die hier auftretenden Eigenfunktionen sind in Tabelle XXIII, S. 76 aufgeführt. Wir schreiben sie in der allgemeinen Form

$$\psi = e^{im\varphi} P_l^m. \qquad (193,22)$$

Die durch das Symbol P_l^m gekennzeichneten Polynome sind in Tabelle XXIII die von ϑ abhängigen Polynome, die in den Eigenfunktionen des Quadrats des Impulsmoments auftreten. Mit ihnen beschäftigt man sich in der Theorie der Kugelfunktionen; sie sind bekannt als zugeordnete LEGENDREsche Polynome.

Wegen der Symmetrieeigenschaften des Problems ist es angebracht, von kartesischen zu Polarkoordinaten überzugehen. Dabei können wir den Betrag des Radiusvektors, der während der ganzen Zeit unveränderlich bleibt, gleich 1 setzen. Wir erhalten dann folgende Beziehungen:

$$x = \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad y = \sin\varphi \sin\vartheta, \qquad z = \cos\vartheta,$$

$$d\tau = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

In einem durch die Indizes j bzw. k gekennzeichneten Zustand seien die diesem entsprechenden Quantenzahlen l, m bzw. l', m'. Die Matrixelemente schreiben wir in

Polarkoordinaten um, indem wir statt ψ_j und ψ_k ihre expliziten Ausdrücke einsetzen und $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch Exponentialfunktionen ersetzen:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned}
x_{jk} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(e^{i(m'-m+1)\varphi} + e^{i(m'-m-1)\varphi}\right) d\varphi \int_0^{\pi} P_l^m P_{l'}^{m'} \sin^2\vartheta \, d\vartheta\,,\\
y_{jk} &= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \left(e^{i(m'-m+1)\varphi} - e^{i(m'-m-1)\varphi}\right) d\varphi \int_0^{\pi} P_l^m P_{l'}^{m'} \sin^2\vartheta \, d\vartheta\,,\\
z_{jk} &= \int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\varphi}\, d\varphi \int_0^{\pi} P_l^m P_{l'}^{m'} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (193{,}23)$$

Zuerst suchen wir nun die Auswahlregeln für m. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst z_{jk}. Wir sehen sofort, daß das Integral

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\varphi}\, d\varphi$$

nur für $m' = m$ von Null verschieden ist. Wir erhalten somit als erste Auswahlregel

$$\Delta m = 0\,.$$

In den Ausdrücken für x_{jk} und y_{jk} sind ebenso die Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m+1)\varphi}\, d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} e^{i(m'-m-1)\varphi}\, d\varphi$$

nur für $m' - m = \pm 1$ von Null verschieden. Das gibt uns die zweite Auswahlregel für m, nämlich

$$\Delta m = \pm 1\,.$$

Zur Herleitung der Auswahlregel für l beschränken wir uns auf die Betrachtung von z_{jk}. Nach dem oben Gesagten ist hierbei $m' = m$ zu setzen. Das Integral über ϑ schreiben wir dann in der Form

$$\int_0^{\pi} \cos\vartheta \, P_l^m(\cos\vartheta)\, P_{l'}^{m'}(\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \qquad (193{,}24)$$

oder, wenn wir als neue Veränderliche $x = \cos\vartheta$ setzen,

$$\int_{-1}^{+1} x P_l^m(x)\, P_{l'}^{m'}(x)\, dx\,.$$

In der Theorie der Kugelfunktionen[1]) wird die Formel

$$x P_l^m(x) = \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m + \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l+1}^m$$

hergeleitet. Beachten wir die Orthogonalität der LEGENDREschen Funktionen P_l^m, so erkennen wir, daß das Integral (193,24) nur für $l' = l \pm 1$ nicht verschwindet. Die Auswahlregel für l ist also

$$\Delta l = \pm 1 .$$

Den Beweis, daß eine derartige Auswahlregel auch für x_{jk} und y_{jk} gilt, wollen wir hier nicht führen, sondern verweisen Interessenten auf Spezialwerke der Quantenmechanik.

Aus den Formeln (193,23) können wir außer den Auswahlregeln auch leicht Polarisationsregeln ableiten. Wir nehmen $m' = m$ (Übergang $\Delta m = 0$) an; in diesem Falle ist $z_{jk} \neq 0$ und $x_{jk} = y_{jk} = 0$. Das bedeutet, daß bei Übergängen mit $\Delta m = 0$ linear polarisierte Strahlung mit Schwingungen längs der z-Ach e entstehen muß. Wenn aber $\Delta m = m' - m = \pm 1$, so ist $z_{jk} = 0$, x_{jk} und y_{jk} sind jedoch von Null verschieden. Für $\Delta m = +1$ erhalten wir aus (193,23)

$$x_{jk} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_l^m P_{l'}^{m+1} \sin^2\vartheta \, d\vartheta ,$$

$$y_{jk} = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_l^m P_{l'}^{m+1} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_l^m P_{l'}^{m+1} \sin^2\vartheta \, d\vartheta .$$

y_{jk} und x_{jk} unterscheiden sich, wie wir sehen, nur durch den Faktor $-i$ voneinander. Das bedeutet, daß sich die Schwingungen der Projektionen auf die y- und x-Achse in ihrer Phase um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Ganz analog finden wir, daß sich für $\Delta m = -1$ die Schwingungen der Projektionen in ihrer Phase um $-\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Somit muß bei Übergängen $\Delta m = \pm 1$ eine rechts oder links zirkular polarisierte Strahlung entstehen.

Für wasserstoffähnliche Atome (KEPLER-Problem) haben die Eigenfunktionen die Form (siehe § 184, Tabelle XXV)

$$\psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r) \, e^{im\varphi} P_l^m(\cos\vartheta) .$$

In Übereinstimmung damit stellen die Matrixelemente Produkte der Integrale (193,23) mit Integralen vom Typ

$$\int R_{n'l'}(r) \, r R_{nl}(r) \, r^2 \, dr \tag{193,25}$$

[1]) Siehe z. B.: W. A. FOCK, „Elemente der Quantenmechanik" (В. А. Фок, Начала квантовой механики, стр. 123, Кубуч, 1932); W. I. SMIRNOW, „Lehrgang der höheren Mathematik", Bd. 3,2, Kap. VI, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955, und auch A. SOMMERFELD, „Partielle Differentialgleichungen der Physik", S. 134, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1954.

dar. Die Integrale (193,23) führen wiederum zu Auswahlregeln für l und m ($\Delta l = \pm 1$, $\Delta m = 0, \pm 1$), die also auch für ein Elektron im COULOMB-Feld gelten. Was die Integrale (193,25) anbetrifft, so sind sie, wie die Rechnung[1]) zeigt, bei Beachtung der Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ für beliebige Werte der Differenz $n' - n = \Delta n$ von Null verschieden. Es existieren also für die Hauptquantenzahl keine Auswahlregeln: sie kann sich um jede beliebige ganze Zahl ändern.

Zum Schluß wollen wir noch bemerken, daß die oben hergeleiteten Auswahlregeln streng nur für elektrische Dipolstrahlung gelten. Das Matrixelement, von dem die Übergangswahrscheinlichkeit abhängt, hat nämlich die Form

$$D_{mn} = ex_{mn} = \int \psi_m^* \, ex \, \varphi_n \, dx \, .$$

Wie schon erwähnt, stellt dieses Matrixelement nichts anderes dar als das Dipolmoment ex, das eigenartig über die Zustände ψ_m und ψ_n gemittelt ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit führte in unserem Falle gerade auf ein solches Matrixelement, weil wir bei der Behandlung der Wirkung einer Lichtwelle auf ein Atom die Phasenverschiebung in Atomausdehnung vernachlässigen konnten (siehe Anfang des § 191). Im Falle optischer Spektren, wo die Wellenlänge beträchtlich größer als die Abmessungen des Atoms ist, war diese Vernachlässigung durchaus gerechtfertigt. Tatsächlich sind im optischen Gebiet, wie wir weiter sehen werden, die oben aufgestellten Auswahlregeln für die Quantenzahlen l und m in der überwiegenden Mehrzahl aller Fälle erfüllt. Es gibt allerdings auch Ausnahmen. So beobachtet man z. B. in den Spektren der Alkalimetalle sehr schwache Linien, die auf eine Termkombination $s - d$ zurückzuführen sind, d. h., sie entstehen durch Übergänge, die einer Änderung der Quantenzahl l um 2 entsprechen. Das Erscheinen derartiger „verbotener" Linien erklärt sich dadurch, daß die Übergangswahrscheinlichkeit in der exakten Theorie aus einer Summe von Gliedern resultiert, von denen nur das erste einer Dipolstrahlung entspricht. Das zweite und die folgenden Glieder entsprechen der Strahlung komplizierterer Ladungssysteme, Quadrupolen und höheren Multipolen. Die Größe dieser Glieder nimmt schnell ab, und daher ist die Wahrscheinlichkeit für Quadrupolübergänge (bei denen speziell Übergänge mit der Änderung $\Delta l = 2$ möglich sind) um viele Male (etwa 10^5 bis 10^6) geringer als die Wahrscheinlichkeit der Dipolübergänge.

Aus diesen Gründen erklärt sich auch die geringe Intensität der „verbotenen" Linien. Im Gebiet der Röntgenspektren, wo die Wellenlänge 10^3 bis 10^4 mal kleiner als im optischen Spektrum ist, spielt die Phasenverzögerung eine entsprechend größere Rolle.

Eine Berechnung zeigt, daß hier die Wahrscheinlichkeit der Quadrupolübergänge, vor allem für schwere Atome, 10^3- bis 10^4mal größer ist als im sichtbaren Spektralbereich. Daher ist es auch erklärlich, daß in Röntgenspektren weitaus häufiger verbotene Linien zu finden sind.

Weiteres über verbotene Linien siehe in den §§ 235 und 236.

[1]) Siehe z. B. W. A. FOCK, „Elemente der Quantenmechanik", (В. А. Фок, Начала квантовой механики, стр. 132 и след., Кубуч, 1932). Siehe auch H. BETHE, Handbuch der Physik, Bd. 24 I, S. 440 ff., Verlag Springer, Berlin 1933.

§ 194. Das Bohrsche Magneton

Wir wollen uns nun der Betrachtung des Einflusses eines Magnetfelds auf die Energieniveaus zuwenden und beginnen mit der Berechnung des magnetischen Moments eines Atoms. In der Elektrodynamik wird das magnetische Moment eines Kreisstroms durch die Stromstärke und die von ihm umflossene Fläche ausgedrückt (siehe z. B. Teil I, § 72). Die Stromstärke des durch die Elektronenbewegung bedingten Stromes ist einfach durch das Produkt $\varrho \cdot v \cdot \sigma$ gegeben, worin σ der Stromquerschnitt ist. Haben wir es mit einem Elektron im Zentralfeld zu tun, so ist seine Bahn vom Standpunkt der klassischen Physik (und auch der Bohrschen Theorie) aus ein Kreis oder eine Ellipse. Beim Durchlaufen dieser Bahn erzeugt das Elektron einen geschlossenen Strom, dessen Stärke man leicht berechnen kann, wenn man die Umlaufsgeschwindigkeit des Elektrons kennt.

In der Quantenmechanik gestaltet sich die Angelegenheit schwieriger, da wir hier die mittlere, über den ganzen Raum verteilte Ladungsdichte $e\psi^*\psi$ und den Mittelwert des Stroms, der das Produkt aus der Ladung e und dem Wahrscheinlichkeitsstrom s darstellt, betrachten müssen. Da wir es mit einer räumlichen Ladungsverteilung zu tun haben, müssen wir auch einen räumlichen Strom, also keinen linearen, berechnen. Dazu ist es zunächst notwendig, den Ausdruck für die räumliche Wahrscheinlichkeitsstromdichte abzuleiten. Für eine eindimensionale Bewegung war der Wahrscheinlichkeitsstrom, wie wir in § 170 sahen, gegeben zu[1])

$$s_x = \frac{h}{4\pi i\mu}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right). \tag{194,1}$$

Für den Fall eines räumlichen Stroms treten zwei weitere Komponenten des Vektors s auf die wegen der Symmetrie des Problems ein analoges Aussehen haben:

$$\left.\begin{aligned} s_y &= \frac{h}{4\pi i\mu}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y}\right), \\ s_z &= \frac{h}{4\pi i\mu}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{194,2}$$

$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ sind die Komponenten des Gradienten der skalaren Funktion ψ. Wir können also den Ausdruck für den Wahrscheinlichkeitsstrom in Vektorschreibweise folgendermaßen darstellen:

$$s = \frac{h}{4\pi i\mu}(\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*). \tag{194,3}$$

Die Benutzung der Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte in dieser Schreibweise ist besonders praktisch, da wir in ihr an kein spezielles Koordinatensystem gebunden sind und dasjenige wählen können, in dem sich die Rechnung am einfachsten durchführen läßt. Speziell für den Fall eines Zentralfeldes benutzen wir die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ, in denen die Komponenten des Gradienten[2])

---

[1]) Hier und in Zukunft werden wir, wenn in Formeln gleichzeitig die magnetische Quantenzahl m und die Masse auftreten, die Masse mit dem Buchstaben μ bezeichnen.

[2]) Siehe z. B.: N. E. Kotschin, „Vektorrechnung" (Н. Е. Кочин: Векторное исчисление, § 18, стр. 209, Изд. 7., ИАН СССР Москва, 1951) oder auch W. Magnus und F. Oberhettinger: „Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik", S. 193 (2. Aufl.), Verlag Springer, Berlin 1948.

$$\mathrm{grad}_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathrm{grad}_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \mathrm{grad}_\varphi = \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{194,4}$$

sind.

Die Eigenfunktionen können dann, wie wir in § 180 sahen, in Form des Produkts dreier Funktionen dargestellt werden:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot e^{im\varphi}.$$

In § 170 lenkten wir bereits unsere Aufmerksamkeit darauf, daß in den Fällen, in denen ψ eine reelle Funktion einer Koordinate ist, die Komponente der Stromdichte für diese Koordinate gleich Null ist.

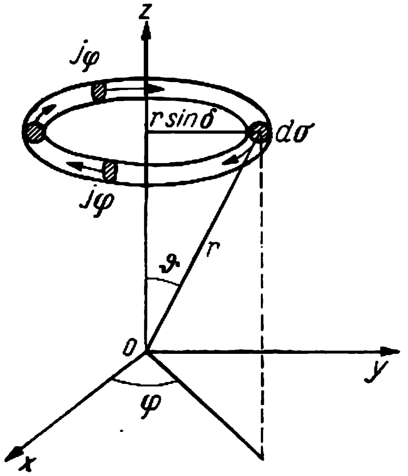


Abb. 242

Im gegebenen Falle gerade stellen $R(r)$ und $\Theta(\vartheta)$ reelle Funktionen dar (siehe § 170), und die Komponente des Stroms verschwindet daher für diese Koordinaten. Es bleibt also nur die φ-Komponente übrig. Das bedeutet, daß weder in radialer noch meridionaler Richtung ein Strom vorhanden ist. Dieser fließt nur längs der Breitenkreise, als hätten wir es mit einem Umlauf um die Vertikalachse zu tun.

Das magnetische Moment eines Kreisstroms ist gleich der Stromstärke in elektromagnetischen Einheiten, multipliziert mit der umflossenen Fläche. Zur Berechnung des magnetischen Moments eines räumlichen Stroms gehen wir folgendermaßen vor: Wir berechnen zunächst das magnetische Moment einer elementaren „Stromröhre" längs des Breitenkreises ϑ im Abstand r vom Zentrum (Abb. 242). Danach integrieren wir über den gesamten Raum, d. h. also über alle derartigen Stromröhren. Die Stromstärke (in elektromagnetischen Einheiten) in dieser Stromröhre ist gleich $j_\varphi\, d\sigma$, wobei j_φ die φ-Komponente der Stromdichte und $d\sigma$ die Fläche des Stromröhrenquerschnitts sind. Es ist aber

$$j_\varphi = \frac{e}{c} s_\varphi = \frac{e}{c} \cdot \frac{h}{4\pi i \mu} (\psi^* \mathrm{grad}_\varphi \psi - \psi \mathrm{grad}_\varphi \psi^*).$$

Die Rechnung ergibt

$$\psi^* \operatorname{grad}_\varphi \psi = R\Theta e^{-im\varphi} \cdot \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (R\Theta e^{im\varphi}) = \frac{im}{r \sin\vartheta} \psi^* \psi$$

und analog

$$\psi \operatorname{grad} \psi^* = -\frac{im}{r \sin\vartheta} \psi^* \psi ,$$

so daß

$$j_\varphi = m \frac{eh}{2\pi\mu c} \frac{\psi^*\psi}{r \sin\vartheta}$$

ist. Die Stromstärke wird also gegeben zu

$$J_\varphi = j_\varphi \, d\sigma = m \frac{eh}{2\pi\mu c} \frac{\psi^*\psi \, d\sigma}{r \sin\vartheta} .$$

Zur Ermittlung des magnetischen Moments des Stromrohrs ist dieser Ausdruck mit der umflossenen Fläche zu multiplizieren, d. h. also mit $\pi (r \sin\vartheta)^2$ (siehe Abb. 242):

$$dM = J_\varphi \pi (r \sin\vartheta)^2 = m \frac{eh}{2\pi\mu c} \psi^*\psi \pi r \sin\vartheta \, d\sigma = m \frac{eh}{4\pi\mu c} \psi^*\psi \, (2\pi r \sin\vartheta \, d\sigma) .$$

Das Produkt ($2\pi r \sin\vartheta \, d\sigma$), d. h. Länge der „Stromröhre" mal ihrem Querschnitt, ist der Rauminhalt der „Röhre". Daher ist die Integration über alle möglichen Röhren gleichbedeutend mit einer Integration der Größe $\psi^*\psi$ über den ganzen Raum. Dieses Integral ist wegen der Normierung von ψ gleich 1. So finden wir schließlich für das magnetische Moment des über den ganzen Raum verteilten Stroms

$$M = m \frac{eh}{4\pi\mu c} ; \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (194,5)$$

Der Faktor

$$M_0 = \frac{eh}{4\pi\mu c} \qquad (194,6)$$

setzt sich nur aus universellen Konstanten zusammen und ist daher selbst konstant. Wir haben also ein wichtiges Resultat erhalten: Das magnetische Moment ist gleich dem Produkt aus der ganzen Zahl m und der Konstanten M_0:

$$M = m M_0 .$$

Ähnlich der Tatsache, daß jede elektrische Ladung ein Vielfaches der Elektronenladung ist, beträgt also das magnetische Moment des Elektrons im Zentralfeld ein Vielfaches der universellen Einheit des magnetischen Moments M_0: Diese Quanteneinheit des magnetischen Moments wird *Bohrsches Magneton* genannt. Häufiger wird aber das Bohrsche Magneton M_0, multipliziert mit der Avogadroschen Zahl $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$, benutzt. Diese makroskopische Einheit des magnetischen Moments bezeichnet man durch M_B. Sie ist gleich

$$M_B = N M_0 = N \cdot \frac{e}{\mu c} \cdot \frac{h}{4\pi} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}760 \cdot 10^7 \cdot \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27}}{4\pi} = 5585 \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^{-1} .$$

Wir wollen nun noch die für das Folgende wichtige Beziehung des magnetischen Moments zum mechanischen Impulsmoment aufsuchen. Da das gesamte magnetische Moment einem räumlichen Kreisstrom um die z-Achse entsprach, ist für das Impulsmoment natürlich auch die z-Komponente zu wählen, d. h.

$$L_z = m \frac{h}{2\pi}. \tag{179,3}$$

Aus (194,5) und (179,3) finden wir

$$\frac{M}{L_z} = \frac{e}{2\mu c}, \tag{194,7}$$

d. h., das Verhältnis des magnetischen Moments zum mechanischen Moment ist gleich der Größe $\frac{e}{2\mu c}$, die wir schon in Bd. I, § 72 aus Betrachtungen im Rahmen der klassischen Physik fanden.

§ 195. Das Elektron im Magnetfeld

Bis jetzt hatten wir es nur mit den konkreten Problemen der Bewegung im Potentialfeld zu tun. Nun wollen wir zeigen, wie in das System der Quantenmechanik auch die Behandlung der Bewegung unter Einwirkung magnetischer Kräfte, die kein Potential besitzen (siehe Teil I, § 60), eingeschlossen werden kann. Hierfür müssen wir zunächst einmal die Schrödinger-Gleichung wesentlich verallgemeinern. Da diese Gleichung eine Gleichung für die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators darstellt, muß es unser erster Schritt sein, die Form des Hamilton-Operators für den Fall magnetischer Kräfte aufzusuchen. Dabei werden wir nach dem schon früher angewandten Verfahren vorgehen: wir schreiben zunächst die *klassische Hamilton-Funktion* für den uns interessierenden Fall auf. Wie wir in Teil I, § 60[1]) sahen, ist diese von der Form

$$H = \frac{1}{2\mu}\left[\left(P_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(P_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \left(P_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2\right] + e\varphi. \tag{60,14}$$

Hierin sind P_x, P_y, P_z die Komponenten des sogenannten kinetischen Impulses (siehe § 60), A_x, A_y, A_z die Komponenten des Vektorpotentials, φ das skalare Potential des Feldes (in Abwesenheit eines Magnetfeldes ist φ das elektrostatische Potential).

Um den der Gleichung (60,14) entsprechenden Hamilton-Operator zu erhalten, gehen wir nach dem üblichen Schema vor: Die kinetischen Impulse P_x, P_y, P_z werden durch die Operatoren $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ usw. ersetzt. Den Größen der Gleichung (60,14) werden daher folgende Operatoren gegenübergestellt:

$$\left.\begin{aligned}
P_x - \frac{e}{c}A_x &\rightarrow \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x,\\
P_y - \frac{e}{c}A_y &\rightarrow \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c}A_y,\\
P_z - \frac{e}{c}A_z &\rightarrow \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c}A_z,\\
e\varphi &\rightarrow \text{Multiplikation mit } e\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{195,1}$$

---

[1]) In Abänderung der in Teil I, § 60 benutzten Bezeichnungen sind hier P_x, P_y, P_z für die Komponenten des kinetischen und p_x, p_y, p_z für die des gewöhnlichen Impulses eingeführt.

Wir gelangen auf diesem Wege zu dem Operator

$$H = \frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c}A_z\right)^2\right] + e\varphi. \qquad (195,2)$$

Diesen Operator setzen wir in die Gleichung $H\psi = E\psi$ ein. Um diese Gleichung explizit schreiben zu können, formen wir den Operator (195,2) um. Wir betrachten die erste Summe in der eckigen Klammer und wenden den Operator auf eine beliebige Funktion ψ an:

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x\right)^2 \psi = \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x\right)\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x\psi\right) =$$

$$= -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}(A_x\psi) - \frac{e}{c}\frac{h}{2\pi i}A_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{e^2}{c^2}A_x^2\psi.$$

Haben wir so die übrigen Summanden in der eckigen Klammer ausgerechnet und beachtet, daß

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_x\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y\psi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z\psi) = \operatorname{div}(\mathfrak{A}\psi),$$

$$A_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + A_y\frac{\partial\psi}{\partial y} + A_z\frac{\partial\psi}{\partial z} = \mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi$$

ist, so erhalten wir

$$H\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\Delta\psi - \frac{eh}{4\pi i\mu c}\operatorname{div}(\mathfrak{A}\psi) - \frac{eh}{4\pi i\mu c}\mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi + \frac{e^2}{2\mu c^2}\mathfrak{A}^2\psi + U\psi, \qquad (195,3)$$

worin

$$U = e\varphi$$

ist.

Da die Wirkung eines Magnetfeldes schwach im Vergleich zu der eines elektrischen Feldes ist, können wir für schwache Felder das Glied, welches das Quadrat des Vektorpotentials $\frac{e^2}{2\mu c^2}\mathfrak{A}^2$ enthält, vernachlässigen. Weiter können wir auf Grund einer bekannten Identität der Vektoranalysis, die sehr leicht durch direkte Rechnung zu prüfen ist, setzen

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}\psi) = \psi\operatorname{div}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi. \qquad (195,4)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir aus folgendem Grunde $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$ setzen. Wie in Teil I, § 60 dargelegt wurde, ist das Vektorpotential, aus dem man mit Hilfe der Beziehung $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ die Stärke des Magnetfeldes bestimmen kann, überhaupt nur bis auf den Gradienten eines willkürlichen Skalars $\operatorname{grad} f$ bekannt (wie auch das elektrostatische Potential nur bis auf eine willkürliche Konstante bekannt ist). Erfüllt der Vektor $\mathfrak{A}$ nicht die Bedingung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$, so können wir ihn durch den Vektor $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \operatorname{grad} f$, worin f ein beliebiger Skalar ist, ersetzen und diesen Skalar so wählen, daß $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -\operatorname{div}\mathfrak{A}$ ist. Dann haben wir

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}' = \operatorname{div}(\mathfrak{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{div}\mathfrak{A} + \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\mathfrak{A} - \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0.$$

Die magnetische Feldstärke, die aus $\mathfrak{A}$ zu bestimmen ist, ändert sich jedoch dabei nicht, da

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}' = \operatorname{rot} (\mathfrak{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

($\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0$) ist.

Somit erhalten wir aus (195,4), wenn wir $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ setzen,

$$\operatorname{div} (\mathfrak{A}\psi) = \mathfrak{A} \operatorname{grad} \psi ,$$

und die Formel (195,3) nimmt nach Streichung des letzten Gliedes die Form

$$H\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\Delta\psi - \frac{eh}{2\pi i\mu c}\mathfrak{A} \operatorname{grad} \psi + U\psi \tag{195,5}$$

an. Setzt man schließlich diesen Ausdruck in die SCHRÖDINGER-Gleichung $H\psi = E\psi$ ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$\Delta\psi + \frac{4\pi e}{hci}\mathfrak{A} \operatorname{grad} \psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(E - U)\psi = 0. \tag{195,6}$$

Dies ist die verallgemeinerte SCHRÖDINGER-Gleichung für den Fall der Anwesenheit eines schwachen Magnetfeldes. Wie wir sehen, unterscheidet sie sich von der bisherigen nur durch das zweite Glied, in dem die Wirkung dieses Feldes zum Ausdruck gebracht wird.

§ 196. Die Theorie des normalen ZEEMAN-Effekts

Wir zeigen jetzt, daß sich aus der verallgemeinerten SCHRÖDINGER-Gleichung (195,6) sehr leicht die Theorie des einfachen oder normalen ZEEMAN-Effekts herleiten läßt. Wir betrachten ein wasserstoffähnliches Atom, das sich in einem zur z-Achse parallelen homogenen Magnetfeld befindet. Die Komponenten dieses Feldes lauten für ein kartesisches Koordinatensystem

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z = H.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dieses Feld aus dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$, dessen Komponenten

$$A_x = -\frac{1}{2}Hy, \quad A_y = \frac{1}{2}Hx, \quad A_z = 0$$

sind, herrührt. Tatsächlich, da sich die magnetische Feldstärke aus dem Vektorpotential nach der Formel $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ berechnet, ist

$$H_x = \operatorname{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,$$

$$H_y = \operatorname{rot}_y \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0,$$

$$H_z = \operatorname{rot}_z \mathfrak{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H = H.$$

Berücksichtigen wir dies, so finden wir das zusätzlich auftretende Glied $\frac{4\pi e}{hci}\,\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\psi$ in Gleichung (195,6). Wir haben

$$\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\psi = A_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + A_y\frac{\partial\psi}{\partial y} + A_z\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{2}H\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Gehen wir jetzt von kartesischen zu Polarkoordinaten über, deren Achse längs der z-Achse orientiert ist, so erhalten wir, wie wir schon in § 176 sahen,

$$x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

und damit

$$\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\psi = \frac{1}{2}H\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.$$

Die Gleichung (195,6) nimmt jetzt folgende Form an

$$\varDelta\psi + \frac{2\pi e}{hci}H\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(E-U)\,\psi = 0. \tag{196,1}$$

Da wir es mit einer Bewegung im Zentralfeld zu tun haben, werden wir die Lösung dieser Gleichung wie in § 180 wieder als Produkt dreier Funktionen, $R(r)\;\Theta\;(\vartheta)\,\Phi\;(\varphi)$, ansetzen. Hierbei ist es selbstverständlich, daß sowohl im Fall der Kugel- als auch dem der Achsensymmetrie des Feldes die Funktion $\Phi\;(\varphi)$ von der Form[1] $e^{im\varphi}$ sein muß, so daß sich $\psi = R\Theta e^{im\varphi}$ ergibt. Dann haben wir

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = im\,R\Theta e^{im\varphi} = im\psi;$$

weiterhin ist

$$\frac{2\pi e}{ihc}H\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = m\frac{2\pi e}{hc}H\psi,$$

und die Gleichung (196,1) nimmt nach Vereinigung aller mit ψ multiplizierter Glieder die Gestalt

$$\varDelta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(E + m\frac{eh}{4\pi\mu c}H - U\right)\psi = 0 \tag{196,2}$$

an. Bezeichnen wir noch

$$E + m\frac{eh}{4\pi\mu c}H = E', \tag{196,3}$$

so erhalten wir

$$\varDelta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(E' - U)\,\psi = 0.$$

---

[1]) Im Folgenden wird ersichtlich, daß der Faktor $e^{im\varphi}$ unbedingt komplex sein muß und nicht durch $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$ ersetzt werden kann. Dies ist eins der Beispiele dafür, daß die Funktion ψ im Grunde genommen selbst komplex ist.

Die Lösung dieser Gleichung, mit der wir uns im vorigen Paragraphen beschäftigten, lieferte eine Reihe von Energieeigenwerten E'_1, E'_2, ..., E'_k, ... Nach (196,3) ist aber

$$E'_k = E_k + m \frac{eh}{4\pi\mu c} H. \tag{196,4}$$

Die Energieeigenwerte E'_k unterscheiden sich bei Anwesenheit eines Magnetfeldes H von den Eigenwerten E_k ohne Magnetfeld durch den Summanden $m \frac{eh}{4\pi\mu c} H$. Da aber m alle ganzzahligen Werte zwischen $+l$ und $-l$ annehmen kann, spaltet jedes Energieniveau E'_k, das bei Abwesenheit eines Magnetfeldes einfach ist, im Magnetfeld in $2l+1$ Unterniveaus auf.

Die Eigenfunktionen jedoch bleiben dieselben wie ohne Magnetfeld. Wir können also sagen, daß die Entartung hinsichtlich der Quantenzahl m im Magnetfeld aufgehoben ist: Die $2l+1$ zusammenfallenden Unterniveaus verschieben sich so zueinander, daß der Abstand zwischen zwei benachbarten Unterniveaus $\frac{eh}{4\pi\mu c} H$ beträgt. Dieser Abstand ist der magnetischen Feldstärke proportional und hängt nicht von den Quantenzahlen n und l ab.

Die Frequenzen der Spektrallinien, die im Magnetfeld ausgestrahlt werden, sind daher

$$\nu = \frac{E'_k - E'_i}{h} = \frac{E_k - E_i}{h} + \Delta m \frac{e}{4\pi\mu c} H = \nu_0 + \Delta m \frac{e}{4\pi\mu c} H. \tag{196,5}$$

Hier ist ν_0 die Frequenz der in Abwesenheit eines Magnetfeldes ausgestrahlten Linie. Unter Beachtung der Auswahlregeln für die magnetische Quantenzahl aus § 193, nach denen $\Delta m = 0, \pm 1$ ist, erhalten wir folgendes Ergebnis: Im Magnetfeld der Stärke H spaltet sich jede Linie der Frequenz ν_0 in drei Linien auf:

$$\nu_0 + \frac{e}{4\pi\mu c} H, \quad \nu_0, \quad \nu_0 - \frac{e}{4\pi\mu c} H.$$

Das ist aber das uns bereits aus der klassischen Theorie (Bd. I, §§ 73 bis 74) bekannte einfache LORENTZ-Triplett.

Wir wenden uns nun folgendem wichtigem Umstand zu: Die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein Atom im Magnetfeld ergibt dasselbe Resultat wie die einfache klassische Theorie (Teil I, §§ 73 bis 74). Es wurde aber schon gesagt, daß dieses Ergebnis nur für bestimmte Sonderfälle gilt. Zum Beispiel ist es für das Wasserstoffatom in einem schwachen Magnetfeld nicht zutreffend. Die beobachtete Anzahl der Komponenten ist eine andere, und die zahlenmäßigen Werte $\Delta\nu$ fallen allgemein nicht mit der obigen LORENTZ-Aufspaltung zusammen, obwohl sie mit ihr durch einfache Zahlenbeziehungen verknüpft sind. Besonders wichtig ist folgende Tatsache: Da bei gegebener Quantenzahl l die magnetische Quantenzahl $2l+1$ verschiedene Werte haben kann, müßte das Magnetfeld immer eine Aufspaltung in eine *ungerade* Anzahl von Unterniveaus hervorrufen. Tatsächlich kommen aber auch geradzahlige Aufspaltungen vor. Das einfache LORENTZ-Triplett erhält man nur in starken Magnetfeldern oder in schwachen Feldern bei sogenannten Singulett-Linien. Der Grund einer derartigen Diskrepanz zum Experiment liegt darin, daß in der SCHRÖDINGER-Gleichung eine wichtige Eigenschaft des Elektrons vernachlässigt wird: Die Anwesenheit eines ihm *eigenen* Impulsmoments und eines magnetischen Moments. Wir werden diese im nächsten Kapitel kennenlernen, wo auch die Theorie des anomalen ZEEMAN-Effekts (der in Wirklichkeit am häufigsten auftritt und nur aus historischen Gründen als anomal bezeichnet wird) behandelt werden soll.

XV. DER ELEKTRONENSPIN

§ 197. Die Hypothese des rotierenden Elektrons

Am Schluß des vorangegangenen Kapitels wurde gezeigt, daß die Anwendung der SCHRÖDINGER-Gleichung auf ein Atom im Magnetfeld nur das einfache LORENTZ-Triplett ergibt und daher Fälle komplizierterer Aufspaltungen nicht zu erklären gestattet. Diese Schwierigkeit hat jedoch einen weitaus allgemeineren Charakter. So diskutierten wir z. B. in den Paragraphen 185 und 186 die Spektren von Atomen mit einem Valenzelektron und zeigten, daß die Mannigfaltigkeit der Serien, die in diesen Spektren beobachtbar sind, aus der Aufhebung der Entartung in bezug auf die azimutale Quantenzahl l herrührten: Die Energieniveaus, die durch ein und dieselbe Hauptquantenzahl n und verschiedene Quantenzahlen l charakterisiert sind, d. h. die Niveaus, die in wasserstoffähnlichen Atomen zusammenfallen (siehe § 184), werden in den Atomen der Alkalimetalle ungleich. Darum zerfällt jeder BALMER-Term $\frac{R}{n^2}$ in soviel Terme, wie l bei einer gegebenen Quantenzahl n verschiedene Werte besitzt, also in n verschiedene Terme (die möglichen Werte für l sind: $0, 1, \ldots, n-1$). Daher haben wir für $n = 1$ nur einen Term $1s$, für $n = 2$ zwei verschiedene Terme $2s$ und $2p$, für $n = 3$ drei verschiedene Terme $3s$, $3p$ und $3d$ usw. Die Anzahl dieser Terme reicht vollkommen aus, um die Entstehung der Hauptserie, der beiden Nebenserien (der scharfen und der diffusen) und der Fundamentalserie, d. h. aller Serien von Atomen mit einem Valenzelektron, zu erklären. Man kann so verstehen, warum es z. B. im Spektrum des Lithiums verschiedene Serien $2s - mp$ und $2p - ms$ gibt, während diese beiden Termkombinationen im Spektrum wasserstoffähnlicher Atome ein und dieselbe, nämlich die BALMER-Serie ergeben würden (vergl. Abb. 234 mit Abb. 239).

Es zeigt sich jedoch, daß diese Termzahl, die zur Erklärung der Spektralserien in *groben Zügen* ausreicht, für die Deutung der sogenannten Feinstruktur ihrer Linien unzureichend ist.

Es ist z. B. allgemein bekannt, daß die Linie am Anfang der Hauptserie des Natriums (die gelbe D-Linie) ein Dublett mit einem Abstand von 6 Å zwischen beiden Komponenten (5889,953 Å und 5895,930 Å) ist. Ebenso erweisen sich auch alle anderen Linien der Hauptserie sämtlicher Alkalimetalle als Dubletts. Dabei wächst der Abstand zwischen den Komponenten des Dubletts mit zunehmender Atomnummer rasch an und erreicht beim Cäsium ($Z = 55$) 422 Å. Bei der scharfen Nebenserie ist die Struktur etwas komplizierter, da es außer den beiden helleren Linien des Dubletts noch einen schwachen Begleiter gibt; man erhält als Resultat ein sogenanntes kompliziertes Dublett. Sowohl die einfachen als auch die komplizierten Dubletts können jedoch gedeutet werden, wenn man annimmt, daß die s-Niveaus einfach und die Niveaus p, d, f doppelt sind, so daß es beim Na nicht nur ein $3p$-Niveau, sondern zwei, nämlich $3p_1$ und $3p_2$, beim Cs nicht ein Niveau $6p$, sondern zwei, nämlich $6p_1$ und $6p_2$, usw. gibt (siehe Abb. 240 und 241). Woher rührt nun aber diese Duplizität? Darauf gibt die SCHRÖDINGER-Gleichung keine Antwort. Dazu kommt die Schwierigkeit hinsichtlich des anomalen ZEEMAN-Effekts und eine Reihe anderer Erscheinungen, von denen noch die

Rede sein wird. Man steht also vor einem ganzen Fragenkomplex, zu dessen Erklärung etwas Neues erforderlich ist.

Den Ausweg aus diesen Schwierigkeiten fanden im Jahre 1925 GOUDSMIT und UHLENBECK. Sie zeigten, daß man dem Elektron eine weitere spezifische Eigenschaft, die ihm wie Masse und Ladung stets zueigen ist, zuschreiben muß. Diese Eigenschaft besteht darin, daß das Elektron ein *eigenes* Impulsmoment und ein *eigenes* magnetisches Moment besitzt, d. h., es verhält sich wie ein Kreisel und ein Magnet. Da dem Elektron ein mechanisches Moment zugeschrieben wurde, mußte auch eine neue, dieses messende Quantenzahl s eingeführt werden (diese Bezeichnung stammt von dem englischen Worte spin, deutsch: Drehung; die Bezeichnung ist historisch verwurzelt, jedoch nicht sehr günstig, da derselbe Buchstabe auch als Termsymbol dient). Das mechanische Moment errechnet sich nach dem allgemeinen Gesetz der Quantenmechanik (siehe §§ 178 und 179) zu $L = \sqrt{s(s+1)}\,\frac{h}{2\pi}$; seine Projektion auf die z-Achse kann $2s+1$ verschiedene Werte in denselben $\frac{h}{2\pi}$-Einheiten annehmen. Wesentlich jedoch ist, daß man mit Hilfe dieser neuen Quantenzahl die Aufspaltung jedes Niveaus in *zwei* Unterniveaus erklären muß. Das zwingt uns, der Quantenzahl s nicht einen ganzzahligen, sondern einen gebrochenen Wert, nämlich den Wert $\frac{1}{2}$, zuzuschreiben. Nur in diesem Falle kann die Anzahl $(2s+1)$ der Aufspaltungen $2\cdot\frac{1}{2}+1=2$ betragen. Daraus folgt, daß der Wert des dem Elektron eigenen mechanischen Moments (wir werden es Spinmoment nennen) $\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\,\frac{h}{2\pi} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\frac{h}{2\pi}$ ist. Seine Projektion auf eine Achse kann *zwei und nur zwei Werte*, und zwar $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ und $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, annehmen. Wir treffen hier zum ersten Mal auf eine solche eigenartige dynamische Veränderliche, deren Gesamtheit von Werten in nur zwei Werten besteht.

Damit ist jedoch die Eigenartigkeit der betrachteten Eigenschaft des Elektrons nicht erschöpft. Wie wir schon sagten, ist dem Elektron außer dem mechanischen auch ein magnetisches Moment zuzuschreiben. In § 194 sahen wir, daß zwischen dem mechanischen und dem magnetischen Moment die Beziehung

$$M_l = \frac{e}{2\mu c} L_z \qquad (194{,}7)$$

besteht (unter L_z ist die z-Komponente des Impulsmoments zu verstehen).

Für $L_z = 1\frac{h}{2\pi}$ ist das magnetische Moment gleich einem BOHRschen Magneton $\frac{eh}{4\pi\mu c}$. Gelte die Beziehung (194,7) auch für den Spin, so wäre sein magnetisches Moment gleich einem halben BOHRschen Magneton. Unterdessen führen aber alle experimentell gewonnenen Ergebnisse eindeutig zu der Erkenntnis, daß das magnetische Moment des Elektrons einem ganzen BOHRschen Magneton gleich ist, so daß für den Spin an Stelle von (194,7) die Beziehung

$$M_s = 2\frac{e}{2\mu c} s_z \qquad (197{,}1)$$

gilt.

Die Spinhypothese brachte mit einem Male die Möglichkeit einer einfachen Deutung vieler Probleme. Speziell wurde die Duplizität der Terme von Atomen mit einem Valenzelektron jetzt vollkommen verständlich. Tatsächlich, das Atom besitzt in Zuständen, die durch eine von Null verschiedene Quantenzahl l (p-, d-, f-, ... Terme) charakterisiert sind, ein nicht verschwindendes Bahndrehimpulsmoment. Mit diesem mechanischen Moment ist auch ein bestimmtes magnetisches Moment, d. h. ein Magnetfeld, verknüpft. Wegen der räumlichen Quantelung stellt sich das Moment des Elektrons zu diesem Magnetfeld so ein, daß seine Projektion auf die Feldrichtung entweder $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ oder $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ beträgt. Daher entstehen aus einem Niveau, z. B. dem p-Niveau ($l = 1$), zwei Niveaus mit den Impulsprojektionen entweder $\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi} = \frac{3}{2}\frac{h}{2\pi}$ oder $\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. Dies wird jedoch bei s-Termen nicht der Fall sein, da im Zustand s das mechanische und demzufolge auch das magnetische Moment des Atoms gleich Null sind und es keine Richtung gibt, zu der sich das Spinmoment einstellen könnte. Dies ist auch der Grund dafür, daß die s-Terme einfach bleiben, während die p-, d-, ... usw. Terme doppelte Terme sind.

Die Vorstellung über den Elektronenspin und die damit verbundenen Eigenarten wurde als Hypothese eingeführt. In der Folge zeigte es sich jedoch, daß die Existenz des Spins und alle seine Eigenschaften automatisch aus der Dirac-Gleichung der Quantenmechanik, die den Forderungen der Relativitätstheorie gerecht wird, hervorgehen. So erwies sich der Elektronenspin als quantenmechanische und gleichzeitig auch relativistische Eigenschaft.

In den folgenden Paragraphen sollen zunächst einige Versuche, die einen unmittelbaren Beweis (und nicht nur einen indirekten, wie die spektroskopischen Befunde) für die Existenz des Elektronenspins und seiner sonderbaren Eigenschaften darstellen, beschrieben werden. Danach wollen wir dann auch die hiermit verbundenen theoretischen Fragen behandeln.

§ 198. Der Stern-Gerlach-Versuch

Wir wollen untersuchen, auf welche Weise man sich direkt von der Existenz des Spins und des magnetischen Moments des Elektrons überzeugen kann. Es ist klar, daß man dazu das Elektron der Wirkung eines äußeren Magnetfeldes unterwerfen muß. Überlegungen auf der Grundlage der Ungenauigkeitsrelationen zeigen indessen, daß eine direkte Messung magnetischer und gyroskopischer Eigenschaften freier Elektronen überhaupt unmöglich ist.[1]) Damit diese Eigenschaften aufgedeckt werden können, muß das Elektron mit einer hinreichend großen Masse als „Ballast" verbunden sein, so daß Störungen seitens der Meßvorrichtung weniger ins Gewicht fallen.

Dies bedeutet, daß der Versuch nicht an freien Elektronen auszuführen ist, sondern an Elektronen, die im Atom gebunden sind. Am geeignetsten für diesen Zweck erweisen sich die Atome des Wasserstoffs und der Elemente der ersten Gruppe des periodischen Systems. Das Wasserstoffatom enthält ein Elektron, das an ein Proton gebunden ist, dessen Masse fast 2000mal größer als die des Elektrons ist und so einen ausreichenden „Ballast" darstellt.

Die Atome der ersten Gruppe des periodischen Systems haben eine noch größere Masse und besitzen außerdem (wie auch das Wasserstoffatom) folgende für den uns interessierenden Versuch günstige Eigenschaft: Ihre unangeregten Zustände sind vom Typ s, d. h., das Bahn-

[1]) Diese Frage ist z. B. in dem Buch: L. de Broglie, „Das magnetische Elektron", Kap. XIX (L. de Broglie, L'Électron magnetique, Paris 1934) ausführlich behandelt.

moment nicht angeregter Atome ist gleich Null. Wenn der Versuch nun zeigt, daß die Atome trotzdem ein mechanisches und magnetisches Moment haben, so müssen diese Eigenschaften dem Valenzelektron zugeschrieben werden.

Wir stellen uns jetzt vor, daß ein Atomstrahl eines der erwähnten Elemente durch ein Magnetfeld geschickt wird. Ist dieses Feld homogen, so werden wir auf diese Art nichts entdecken; ein homogenes Feld wirkt auf einen magnetischen Dipol nur durch Kräftepaare und richtet ihn daher nur aus. Diese Orientierung zu beobachten, ist jedoch unmöglich. Wirklich, stellen wir uns einen zur Feldrichtung senkrechten Atomstrahl vor. Es ist evident, daß lediglich eine Ausrichtung der Atome die Strahlkonfiguration in keiner Weise ändert: War der Strahl vor dem Felddurchgang parallel, so ist er es auch danach. Um eine Ablenkung des Strahls hervorzurufen, muß das Feld inhomogen sein. Wenn dabei die Inhomogenität des Feldes schon in der Längenausdehnung eines Dipols bemerkbar ist, so unterliegen dessen Pole der Wirkung ungleicher Kräfte, und es resultiert eine Kraft, die den Dipol nach der einen oder nach der anderen Seite auslenkt.

Die Größe dieser Kraft hängt sowohl vom magnetischen Moment als auch von der Inhomogenität des Feldes ab. Sie ist gleich (M grad) $\mathfrak{H}$. Die z-Komponente der Kraft, die wir einfach mit F bezeichnen, lautet daher[1])

$$F = M_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Außer dieser Kraft wirkt auf die Atome auch noch die Kraft, die die atomaren Dipole in Feldrichtung einzustellen sucht. Da aber diese Dipole gleichzeitig auch Kreisel sind, entsteht eine Präzession um die Feldrichtung (siehe Teil I, § 72). Erstreckt sich das Feld in z-Richtung, so nehmen angesichts dieser Präzession die Projektionen von M auf die x- und y-Achse abwechselnd positive und negative Werte an und sind im Mittel gleich Null. Die Projektion auf die z-Achse jedoch bleibt konstant, und der Mittelwert der Kraft, die auf den Dipol wirkt, ist daher gegeben zu

$$F = M_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Sie ist der z-Komponente des magnetischen Moments und der Inhomogenität des Feldes $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ proportional. Die z-Komponente des magnetischen Moments ist aber der z-Komponente des mechanischen Moments proportional, diese kann jedoch nur eine begrenzte Anzahl diskreter Werte annehmen. Demzufolge teilt sich der Strahl nach dem Felddurchgang in soviel Einzelstrahlen auf, wie es mögliche Werte L_z gibt. Ordnet man senkrecht zum Strahl eine Platte an, die die Atome auffängt, so müssen sich darauf einige dünne Streifen abzeichnen.

Ein derartiger Versuch wurde erstmalig von P. L. KAPITZA und N. N. SEMJONOW projektiert und unabhängig davon von STERN und GERLACH auf folgende Weise ausgeführt. In ein hochevakuiertes Gefäß brachten sie einen kleinen Heizofen K (Abb. 243), in den sie ein Stückchen Silber legten. Bei einer Aufheizung verdampft das Silber, und seine Atome fliegen mit den der Temperatur entsprechenden Geschwindigkeiten der Größenordnung einiger 100 m pro Sekunde in allen möglichen Richtungen aus der Ofenöffnung heraus. Einige Diaphragmen BB blenden daraus einen schmalen parallelen Atomstrahl aus, der

1) Siehe z. B. BECKER, „Theorie der Elektrizität", Bd. I, § 38, Verlag Teubner, Leipzig 1951.

das inhomogene Magnetfeld zwischen den Polen des Elektromagneten *SN* passiert und auf den Schirm *PP* auftrifft, auf dem eine Spur niedergeschlagener Silberatome beobachtet werden konnte.

Die Hauptschwierigkeit des Versuchs lag in der Herstellung eines so inhomogenen Feldes, daß seine Inhomogenität bereits in der Größe eines Atomdurchmessers, d. h. auf etwa 10^{-8} cm, merklich ist. Eine solche Inhomogenität wurde dadurch erreicht, daß man den Polschuhen eine ganz spezielle Form gab.

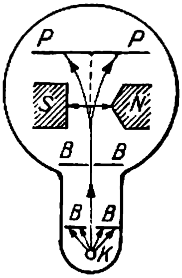


Abb. 243. Schema des Stern-Gerlach-Versuchs

Für den Versuch, der zum ersten Mal mit Silber durchgeführt wurde, verwendete man dann auch andere Stoffe. In Abb. 244 sind z. B. die Ergebnisse eines Versuches mit Lithium und auf Abb. 245 diejenigen mit Wasserstoff wiedergegeben. Der zweite Fall ist deshalb besonders interessant, weil Wasserstoff das einfachste System mit einem einzigen Elektron darstellt.

Der Versuch zeigte, daß im Falle des Wasserstoffs, Silbers und der Alkalimetalle *zwei* Streifen entstehen, die symmetrisch zu der Spur liegen, die sich bei Abwesenheit eines Magnetfeldes bildet. Das zeugt davon, daß der Strahl bei Felddurchgang in zwei Teile aufspaltet, die gleich stark in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt werden, d. h., daß L_z in Anwesenheit

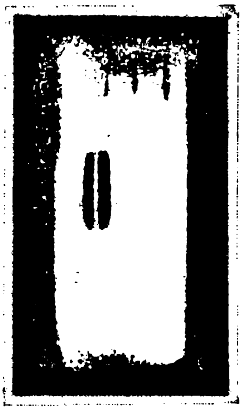


Abb. 244
Ergebnisse des Stern-Gerlach-Versuchs mit Lithium

Abb. 245. Ergebnisse des Stern-Gerlach-Versuchs mit atomarem Wasserstoff

eines Feldes zwei Werte, die gleich groß, aber entgegengesetzten Vorzeichens sind, annehmen kann. Um den Inhalt dieses Ergebnisses recht verstehen zu können, ist es notwendig, sich daran zu erinnern, daß der niedrigste Energiezustand der Atome des Wasserstoffs, Lithiums und Silbers der s-Zustand ist, so daß es ohne Spin gar keine Aufspaltung des Strahls geben könnte. Die tatsächlich jedoch beobachtbare Aufspaltung ist dadurch bedingt, daß außer dem „Bahnmoment", das durch die Quantenzahl l charakterisiert ist, *das Elektron noch ein Eigenmoment besitzt, nämlich das Spinmoment.* Die Tatsache, daß für $l = 0$ zwei und nicht drei oder mehr Streifen erhalten werden, beweist direkt, daß die Spinprojektion auf die Feldrichtung nur *zwei Werte* annehmen kann. Weiter läßt sich aus der Größe der Aufspaltung, der Stärke des Feldes, dem Grad seiner Inhomogenität und den geometrischen Daten die Größe des magnetischen Moments des Atoms errechnen. Diese Rechnung ist

durchgeführt worden und ergab für M einen Wert, der gleich einem BOHRschen Magneton ist. Die Versuchsbedingungen waren allerdings derart, daß das Ergebnis nicht mit allzu großer Genauigkeit gefunden werden konnte (Fehler etwa 10%); die Genauigkeit ist aber doch ausreichend, um überzeugende Schlüsse aus dem Versuch ziehen zu können.

Der STERN-GERLACH-Versuch gehört neben einigen wenigen anderen zu den grundlegenden Versuchen der Atomphysik, da er eine der wichtigsten Eigenschaften der Materie aufdeckte.

§ 199. Magneto-mechanische Effekte

Die Existenz des Elektronenspins und seine besonderen Eigenschaften gehen auch aus früheren Versuchen hinsichtlich sogenannter magneto-mechanischer Erscheinungen hervor. Zu diesen gehört vor allem der bekannte EINSTEIN-DE-HAAS-Effekt. Im Innern einer Drahtspule, längs ihrer Achse, hängt an einem feinen Quarzfaden eine zylindrische Materialprobe von etwa 0,03 cm Durchmesser und 10 cm Länge (Abb. 246). Als Proben wurden ferromagnetische Stoffe (z. B. Eisen) oder paramagnetische Salze gewählt. Schickt man einen Strom hinreichender Stärke durch die Spule, so wird die Probe magnetisiert. Das bedeutet, daß sich ihre Elementarmagnetchen in Richtung des Feldes einstellen. Ändert man jetzt die Stromrichtung, so wird das Stäbchen ummagnetisiert. Dazu müssen sich aber die Elementarmagnetchen um 180° drehen. Da sie gleichzeitig kleine Kreisel sind (infolge der schnellen Umdrehung der Elektronen), wäre eine solche Drehung mit einer Änderung des gesamten Impulsmoments des Systems verbunden, was unmöglich ist. Daher muß sich zur Kompensation des Impulsmoments das ganze Stäbchen in entgegengesetzter Richtung drehen und den Faden tordieren. Dieser Effekt ist natürlich äußerst schwach. Durch Resonanz konnte er aber verstärkt werden. Die Spule wurde mit Wechselstrom, dessen Frequenz gleich der der Eigendrehschwingung des hängenden Zylinders ist, beschickt. Unter derartigen Bedingungen gelang es, den Effekt nicht nur an ferromagnetischen Proben, sondern in schwächerer Form auch an paramagnetischen Salzen zu beobachten. Aus dem Versuch konnte man direkt das Verhältnis des magnetischen Moments der Elementarmagnetchen der Probe zu deren mechanischem Moment bestimmen. Dieses Verhältnis lautet allgemein

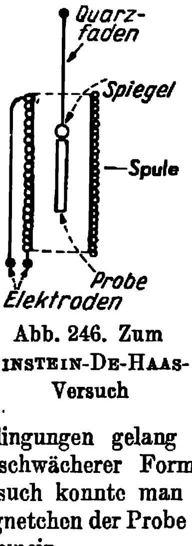


Abb. 246. Zum EINSTEIN-DE-HAAS-Versuch

$$\frac{M}{L} = g\frac{e}{2\mu c}.$$

Wären die Elementarmagnete mit dem Bahnmoment verknüpft, so müßte $g = 1$ sein. Es zeigt sich aber, daß $g = 2$ ist.

BARNETT machte den umgekehrten Versuch: Er versetzte Eisenstäbchen in schnelle Drehung und erzeugte infolge der gyroskopischen Eigenschaften der Elementarmagnete deren Orientierung und somit eine Magnetisierung der Stäbchen. Bei Drehung in umgekehrter Richtung erfolgte eine Ummagnetisierung. Auch diese Versuche ergeben für das Verhältnis des mechanischen zum magnetischen Moment eine Größe, die doppelt so groß ist wie die erwartete.

Die Erklärung dieser Anomalien wurde erst nach der Entdeckung des Elektronenspins möglich. Sie bewiesen nämlich, daß die Elementarmagnete nicht die kreisförmigen Elektronenbahnen sind, sondern daß die Elektronen selbst dank ihrer Natur gleichzeitig Elementarmagnete und kleine Kreisel sind.

Beiläufig sei hier noch bemerkt, daß der Spin nicht nur eine Besonderheit der Elektronen ist. Auch andere Elementarteilchen — Protonen, Neutronen und — Mesonen sind nach den modernen Vorstellungen durch einen Spin ausgezeichnet.

§ 200. Spin und Polarisation

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, daß durch eine hinreichende Anzahl von Tatsachen die Existenz des Spins und eines magnetischen Moments beim Elektron von ganz verschiedenen Seiten aus nachgewiesen werden kann, wollen wir nun betrachten, wie sich diese Eigenschaft in das Gerüst der Quantenmechanik einfügen läßt. Goudsmit und Uhlenbeck versuchten ihre Hypothese dadurch anschaulich zu gestalten, daß sie sich das Elektron als rotierende elektrisch geladene Kugel vorstellten. Wie aber zu erwarten war, konnte eine derartig reine Korpuskelvorstellung nicht ohne Widersprüche bleiben. Es zeigte sich z. B., daß die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons — der geladenen Kugel —, sollte es infolge der Eigenrotation ein magnetisches Moment von der Größe eines Bohrschen Magnetons besitzen, so groß sein mußte, daß die lineare Geschwindigkeit auf der Kugeloberfläche größer als die Lichtgeschwindigkeit wäre.[1])

Wie auch in allen anderen Fällen ist die Anwendbarkeit des anschaulichen Korpuskelbildes auf das Elektron durch seine Welleneigenschaften begrenzt.

Wir wollen daher untersuchen, auf welche Weise der Spin wellentheoretisch beschrieben werden könnte. Es zeigt sich, daß diese Eigenschaft in einer Wellendarstellung mit der Polarisation der Welle in Verbindung gebracht werden kann. Um uns davon zu überzeugen, wenden wir uns zunächst den gut bekannten Lichtwellen zu. Wenn wir die Frequenz der ebenen Lichtwelle ν und die Richtung ihrer räumlichen Ausbreitung, die durch den Vektor $\mathfrak{k}$ charakterisiert wird, angeben, so haben wir damit noch nicht alle Eigenschaften der Welle beschrieben, da bekannt ist, daß für ein und dieselben ν und $\mathfrak{k}$ zwei Wellen, die senkrecht zueinander polarisiert sind, existieren können. Bewegt sich die Welle längs der z-Achse, so sind zu ihrer vollständigen Beschreibung nicht eine, sondern zwei orts- und zeitabhängige Funktionen erforderlich,

$$\begin{aligned} u_+ &= A_x \cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{z}{c}\right) + \delta_1\right], \\ u_- &= A_y \cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{z}{c}\right) + \delta_2\right]. \end{aligned} \tag{200,1}$$

Im Falle linearer Polarisation ist der Phasenunterschied $\delta_1 - \delta_2$ gleich Null oder gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π; im allgemeinen Fall elliptischer Polarisation kann er eine beliebige Größe haben, ist jedoch konstant. Für eine unpolarisierte Welle

---

[1]) Sieht man nämlich das Elektron als eine rotierende geladene Kugel mit einem Impulsmoment von $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ an, so zeigt die nach der klassischen Elektrodynamik ausgeführte Rechnung, daß zur Gewinnung eines magnetischen Moments von der Größe eines Bohrschen Magnetons die Lineargeschwindigkeit auf der Kugeloberfläche 300 c sein müßte, wobei $c = 3\cdot 10^{10}$ cm/sec ist. Den an Berechnungen interessierten Leser verweisen wir auf L. Brillouin, „L'Atom de Bohr", Paris 1931.

(natürliches Licht) sind schließlich beide Phasen δ_1 und δ_2 völlig unabhängig voneinander.[1])

Die Amplituden A_x und A_y sind die Projektionen des „Lichtvektors" $\mathfrak{A}$ auf die x- bzw. y-Achse:

$$A_x = A\cos\vartheta\,,\quad A_y = A\sin\vartheta\,. \tag{200,2}$$

Wir sehen, daß durch die beiden Funktionen u_+ und u_- die Welle tatsächlich vollständig, also auch in ihrer Polarisationseigenschaft beschrieben ist.

Wir stellen uns jetzt eine linear polarisierte Welle längs der z-Achse vor und schicken sie durch einen Analysator (z. B. Polaroid). Wir nehmen an, daß der Analysator so aufgestellt ist, daß er Wellen mit einer Schwingung längs der x-Achse hindurchläßt. Ist unsere Welle so polarisiert, daß ihr elektrischer Vektor auch in x-Richtung schwingt, so tritt die Welle vollständig durch den Analysator; erfolgen die Schwingungen aber in y-Richtung, so läßt der Analysator eine solche Welle überhaupt nicht durch (in einem dichroitischen Kristall [Turmalin, Polaroid] wird diese Welle vollständig absorbiert). Bildet schließlich die Schwingungsrichtung des „Lichtvektors" bis zum Durchgang durch den Analysator den Winkel ϑ mit der x-Achse, so erfolgen nach dem Durchgang die Schwingungen der Welle in x-Richtung, wobei sich jedoch die Intensität der Schwingungen verringert und gleich $A^2\cos^2\vartheta$ wird. Die Erklärung dieser Verhältnisse stellt vom Standpunkt der Wellentheorie keine Schwierigkeiten dar: Wir zerlegen die Vektoramplitude der polarisierten Welle in x- und y-Richtung und behaupten, daß nur die x-Komponente, die gleich $A\cos\vartheta$ ist, durch den Analysator hindurchgeht.

Nun entsteht jedoch auch die Frage: Wie ist diese Erscheinung vom korpuskularen Standpunkt aus zu deuten? Von diesem Standpunkt aus wird das Licht als ein Photonenstrom angesehen. Dieser offenbart sich am deutlichsten z. B. durch den Photoeffekt. Beim Photoeffekt, ebenso wie auch in anderen Erscheinungen korpuskularen Charakters, verhält sich jedes Photon als ein Ganzes und spaltet sich nicht in Teile auf. Bemerkenswert ist, daß gerade der Photoeffekt uns bestimmte Hinweise auch darauf gibt, wie die Polarisation im Korpuskelbilde aufzufassen ist: Der Versuch zeigt, daß bei Einfall von polarisiertem Licht die freiwerdenden Elektronen in einer bestimmten Vorzugsrichtung emittiert werden. Daraus folgt, daß die Eigenschaft der Polarisation jedem einzelnen Photon zugeschrieben werden muß, so daß ein Strahl linear polarisierten Lichts als ein Strom Photonen, von denen jedes in derselben Richtung linear polarisiert ist, anzusehen ist. Fällt die Polarisationsrichtung des Photons mit der Richtung des Polaroids, in der das Licht ganz hindurchgelassen wird, zusammen, so gelangen alle Photonen hindurch und behalten dabei ihre Polarisationsrichtung. Stehen jedoch diese beiden Richtungen senkrecht aufeinander, so gelangt kein Photon hindurch, sondern alle werden durch das Polaroid absorbiert. Somit bietet die Beschreibung des Photonendurchtritts durch ein Polaroid in diesen beiden Grenzfällen keine Schwierigkeiten. Bildet jedoch die Polarisationsrichtung des Photons mit der Durchlaßrichtung des Polaroids einen beliebigen Winkel ϑ, so taucht eine Schwierigkeit auf.

Wir nehmen den Lichtstrahl als so schwach an, daß die Photonen der Reihe nach in das Polaroid eintreten. Nach dem Durchgang des Polaroids ist der Strahl in x-Richtung polarisiert, seine Intensität ist $\cos^2\vartheta$ mal geschwächt. Da wir keine Vorgänge kennen, bei

[1]) Siehe z. B. M. Born, Optik, §§ 7 und 8, Berlin 1933, und F. Hund, „Einführung in die Theoretische Physik", Band III, Bibliographisches Institut, Leipzig 1951.

denen das Photon sich in Teile aufspaltet, so müssen wir folgern, daß das Photon *entweder als Ganzes* durch das Polaroid hindurchgeht *oder* aber *vollkommen absorbiert* wird (siehe Teil I, § 138). Daher ist in dem von uns betrachteten Falle $\cos^2\vartheta$ der Teil der *Gesamtphotonenzahl*, der durch den Analysator hindurchgelangt, und $\sin^2\vartheta$ der Teil, der von ihm absorbiert wird. Wir können auch sagen, daß $\cos^2\vartheta$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß das Photon durch das Polaroid hindurchgeht, und $\sin^2\vartheta$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es absorbiert wird. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden alternativen Prozesse ist gleich 1, wie zu erwarten war. Wir wollen nicht vergessen, daß sich beim Durchgang durch das Polaroid auch der Polarisationszustand des Photons ändert: Waren die einfallenden Photonen unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse polarisiert, so sind es die austretenden Photonen nur in x-Richtung. Alle diese Tatsachen kann man statistisch folgendermaßen beschreiben. Der Zustand des Photons, das unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse polarisiert ist, wird durch die Funktion u, die eine Superposition der beiden Funktionen u_+ und u_- darstellt, beschrieben:

$$u = c' u_+ + c'' u_- .$$

Bis zum Durchgang durch das Polaroid ist $c' = \cos\vartheta$, $c'' = \sin\vartheta$, so daß die Durchgangswahrscheinlichkeit gleich $c'^2 = \cos^2\vartheta$ und die Absorptionswahrscheinlichkeit $c''^2 = \sin^2\vartheta$ ist. Nach dem Durchgang ändert sich der Zustand: c'^2 wird gleich 1 und c''^2 gleich 0. Der Analysator übt eine Wirkung auf das Photon aus, derzufolge es aus dem durch die Superposition zweier Funktionen u_+ und u_- beschriebenen Zustand in einen von diesen, u_+ oder u_-, übergehen muß und entweder hindurchgeht oder absorbiert wird. Wir erinnern daran, daß in § 181 auf ganz analoge Weise der Einfluß des Magnetfeldes bei der räumlichen Quantelung beschrieben wurde.

Die Analogie zwischen Spin und Polarisation ist jetzt klar. Ähnlich wie der Polarisationszustand des Lichts im allgemeinen Fall als Resultat der Superposition zweier Wellen anzusehen ist, die in zueinander senkrechten Richtungen polarisiert sind, läßt sich der Zustand der Atome im Stern-Gerlach-Versuch bis zum Durchgang durch das Magnetfeld als Ergebnis der Superposition zweier Zustände beschreiben, wobei in einem von ihnen die Spins nach oben „polarisiert" sind $\left(\text{d. h. die Spin-Projektion } +\frac{h}{2\pi} \text{ ist}\right)$ und im anderen nach unten $\left(\text{d. h. die Projektion } -\frac{h}{2\pi} \text{ ist}\right)$. Der Zustand wird in diesem Falle durch die Superposition zweier Funktionen

$$\psi = c'\psi_+ + c''\psi_-$$

beschrieben. Das Magnetfeld zwingt die Atome, in einen der beiden Zustände ψ_+ (Spin nach oben) oder ψ_- (Spin nach unten) überzugehen. Dabei ist $|c'|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Atom unter der Feldwirkung in den Zustand ψ_+, $|c''|^2$ dafür, daß es in ψ_- übergeht. *Nach dem Felddurchgang* bildet der Strahl schon ein *Gemisch* von Atomen, die sich in einem dieser beiden Zustände befinden. Es ist offensichtlich, daß ein inhomogenes Magnetfeld im betrachteten Versuch ähnlich einem doppelbrechenden Kristall wirkt, der jeden Lichtstrahl in zwei Strahlen teilt, die senkrecht zueinander polarisiert sind.

Neben den deutlichen Analogien sind auch die Unterschiede zwischen der polarisierten *Lichtwelle* und der „Spinwelle" offensichtlich: Für die Polarisation des Lichts sind zwei senkrecht zueinander liegende Richtungen charakteristisch, wobei wir nicht besonders unterscheiden, *nach welcher Seite* die Polarisation orientiert ist, nach oben oder nach unten, nach rechts

oder nach links. Unterdessen sind für den Spin zwei *entgegengesetzte* Richtungen charakteristisch $\left(\text{die Projektionen } +\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi} \text{ und } -\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\right)$. Das gab die Veranlassung, für den Spin ein besonderes mathematisches Gebilde einzuführen: Der Spin ist kein Vektor, sondern ein Halbvektor oder Spinor.

Wir sehen auf jeden Fall, daß die skalare Wellenfunktion zur Kennzeichnung des Zustands von Mikroteilchen unzureichend ist. Ebenso wie für polarisierte Photone sind zur Beschreibung des Elektronenzustands zwei Funktionen ψ_+ und ψ_- entsprechend den beiden entgegengesetzt „polarisierten" Spins erforderlich. Man kann übrigens den Elektronenzustand auch durch eine Funktion beschreiben, dann muß diese Funktion jedoch außer von den Koordinaten und der Zeit noch von einer Veränderlichen σ, $\psi = \psi\,(t, q, \sigma)$ abhängen, wobei diese neue Veränderliche *nur zwei Werte* annehmen kann. Legen wir (selbstverständlich ganz willkürlich) der Veränderlichen σ die Werte $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ bei, so kann man weiter festsetzen, daß für den Fall $\sigma = +\frac{1}{2}$, $\psi = \psi_+$ gilt, und für $\sigma = -\frac{1}{2}$, $\psi = \psi_-$ ist.

Auf dieser Grundlage wurde von PAULI die Quantenmechanik für Teilchen, die einen Spin besitzen, aufgebaut. Er fand die Form der Operatoren, die auf die Spinvariable σ wirken. Da diese Veränderliche nur zwei Werte annehmen kann, so sind die PAULIschen Operatoren selbstverständlich keine Differentialoperatoren. Sie stellen gewisse lineare Transformationen der beiden Funktionen ψ_+ und ψ_- dar und können in Form von Matrizen mit zwei Spalten und zwei Zeilen geschrieben werden. Auf diese Art und Weise gelang es, eine Gleichung zu erhalten, die formal auch den Spin berücksichtigt.[1])

§ 201. Die relativistische Wellengleichung zweiter Ordnung

Die Theorie von PAULI war ein wichtiger Schritt in der Entwicklung der Quantenmechanik des Elektrons. Sie besaß allerdings wesentliche Unzulänglichkeiten, so daß man sie nur als ersten und noch unvollkommenen Versuch ansehen muß. Vor allem trug diese Theorie formalen Charakter: Sie erklärte die Entstehung des Spins überhaupt nicht, sondern nahm seine Existenz als etwas Gegebenes hin. Ihre ernsteste Unzulänglichkeit aber war, daß sie die Erscheinungen, die mit der Relativitätstheorie verbunden sind, also die relativistischen Effekte, überhaupt nicht berücksichtigte. Unterdessen aber sind gerade die relativistischen Effekte, wie später DIRAC zeigte, die Schlüssel zum Verständnis der Natur des Spins.

Das Problem bestand somit in der Aufstellung einer Grundgleichung der Quantenmechanik, die den Forderungen der Relativitätstheorie genügte. Diesen Forderungen genügt die übliche SCHRÖDINGER-Gleichung, die wir so viel benutzt haben, nicht. Dies ist schon aus ihrer Form

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + U\psi$$

[1]) Zur Darstellung der PAULIschen Theorie siehe D. I. BLOCHINZEW, „Grundlagen der Quantenmechanik", Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

zu erkennen. Diese Gleichung ist in der Zeit von erster, in den Koordinaten von zweiter Ordnung. Daraus ist sofort ersichtlich, daß die SCHRÖDINGER-Gleichung die Grundforderung der Relativitätstheorie, die Invarianz gegenüber der LORENTZ-Transformation,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

nicht erfüllt.

In diese Transformationsformeln gehen die Zeit und die räumlichen Koordinaten gleichberechtigt ein, und zwar linear; in der SCHRÖDINGER-Gleichung ist dies nicht der Fall.

Daß die SCHRÖDINGER-Gleichung den Forderungen der Relativitätstheorie nicht genügen kann, folgt schon aus der Methode ihrer Herleitung. Wir stellten in § 143 die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein freies Teilchen als Differentialgleichung dar, der die Gleichung der ebenen Welle genügte und die dem Dispersionsgesetz

$$\nu = \frac{h}{2\mu}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

entsprach. Dieses Dispersionsgesetz aber entspringt der nicht-relativistischen Beziehung zwischen Energie und Impuls:

$$E = \frac{1}{2\mu}\mathfrak{p}^2 = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung erhält man aus dieser Beziehung durch Ersetzen von p_x, p_y, p_z und E durch die Operatoren $p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ usw. und $E = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$.

Das Dispersionsgesetz der DE BROGLIEschen Wellen, das der relativistischen Beziehung zwischen Impuls und Energie [siehe Teil I, Formel (61,12)]

$$\frac{E^2}{c^2} = \mu_0^2 c^2 + \mathfrak{p}^2 = \mu_0^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{201,1}$$

entspricht, lautet

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\nu_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{201,2}$$

Die Differentialgleichung, die dem Dispersionsgesetz (201,2) entspricht, erhält man, wenn man in (201,1) p_x, p_y, p_z und E nach dem üblichen Schema durch Operatoren ersetzt:

$$p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} \text{ usw. und } E = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Das führt zu der Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu_0^2 c^2 \psi + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \Delta\psi \tag{201,3}$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{4\pi^2 \mu_0^2 c^2}{h^2}\psi. \tag{201,4}$$

Die Gleichungen für die Bewegung im elektromagnetischen Feld erhalten wir entsprechend wie in § 195: Wir ersetzen in (201,1) die elementaren Impulskomponenten p_x, p_y, p_z durch die Ausdrücke der kinetischen Impulse

$$p_x = P_x - \frac{e}{c} A_x \quad \text{usw.}$$

und E durch $E - e\varphi$. So bekommen wir

$$\frac{1}{c^2}(E - e\varphi)^2 = \left(P_x - \frac{e}{c} A_x\right)^2 + \left(P_y - \frac{e}{c} A_y\right)^2 + \left(P_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2 + \mu_0^2 c^2. \qquad (201{,}5)$$

Für den Übergang zur quantenmechanischen Gleichung ersetzen wir $P_x - \frac{e}{c} A_x$ durch den Operator $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x$ usw. und $E - e\varphi$ durch den Operator $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi$, so daß wir

$$\left[-\frac{1}{c}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + e\varphi\right)\right]^2 \psi = \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x\right)^2 \psi +$$

$$+ \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y\right)^2 \psi + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z\right)^2 \psi + \mu_0^2 c^2 \psi \qquad (201{,}6)$$

erhalten. Die Gleichungen (201,4) und (201,6) erfüllen die Symmetrieforderung für Raumkoordinaten und Zeit. Sie stellen relativistische Gleichungen *zweiter Ordnung* dar, die Gleichung (201,4) für ein freies Teilchen und die Gleichung (201,6) für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Diese Gleichungen erwiesen sich jedoch zur Charakterisierung des Elektrons als *unbrauchbar*. So gelang es z. B. mit ihrer Hilfe nicht, einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^*\psi$ zu bilden, der die natürliche Forderung, überall positiv zu sein, befriedigt. Der Grund dafür liegt darin, daß in den Gleichungen (201,4) und (201,6) der *Spin* unberücksichtigt geblieben ist, den man nicht durch eine skalare Funktion ψ beschreiben kann, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde. Es gelang jedoch DIRAC, die richtige Wellengleichung für ein Elektron im feldfreien Raum zu finden, indem er die Gleichungen zweiter Ordnung (201,4) in Gleichungen erster Ordnung „aufspaltete" und dann auch Gleichungen *erster* Ordnung für das Elektron im elektromagnetischen Feld aufstellte.

§ 202. Die DIRAC-Gleichung

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, eine Gleichung aufzusuchen, die die Forderungen der Relativitätstheorie befriedigt und dabei von erster Ordnung ist. In diesem Paragraphen wollen wir die Aufstellung einer derartigen Gleichung für den einfachsten Fall der Bewegung eines Elektrons im feldfreien Raum behandeln. Der sehr wichtige Fall der Bewegung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld soll dann im nächsten Paragraphen betrachtet werden.

Wir gehen von der im vorigen Paragraphen gefundenen relativistischen Gleichung zweiter Ordnung (201,3) aus:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \mu_0^2 c^2 \psi. \qquad (201{,}3)$$

Diese Gleichung werden wir in Gleichungen erster Ordnung „aufzuspalten" versuchen. Wir führen folgende Bezeichnungen für die in diese Gleichung eingehenden Operatoren ein:

$$p_1 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}, \quad p_4 = -\frac{1}{c}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{202,1}$$

Mit diesen können wir (201,3) umschreiben in

$$p_4^2\psi = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu_0^2c^2)\,\psi$$

oder, was dasselbe ist, in

$$(p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \mu_0^2c^2)\,\psi = 0. \tag{202,2}$$

Das Problem besteht nun darin, ausgehend von dieser Gleichung eine solche zu suchen, die linear hinsichtlich der Operatoren p_1, p_2, p_3, p_4 ist. Diese Aufgabe löste DIRAC auf eine einfache Weise, die an die Art erinnert, mit der wir in der elementaren Algebra die Quadratsumme $a^2 + b^2$ durch das Produkt der linearen Faktoren $(a - ib)$ $(a + ib)$ ersetzen. Wir schreiben den Operator der rechten Seite (202,2) in Form eines Produkts zweier linearer Operatoren

$$\begin{aligned} &p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \mu_0^2c^2 = \\ &= (p_4 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \alpha_4\mu_0 c) \times (p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4\mu_0 c) \end{aligned} \tag{202,3}$$

und untersuchen, welche Bedingungen α_1, α_2, α_3, α_4 erfüllen müssen, damit die rechte Seite von (202,3) der linken identisch ist. Dazu müssen wir die rechte Seite von (202,3) ausmultiplizieren. Da wir es mit Operatoren zu tun haben, dürfen wir bei der Multiplikation nicht vergessen, daß das Gesetz der Kommutativität nicht gültig ist. Von den Operatoren p_1, p_2, p_3, p_4 wissen wir jedoch, daß sie untereinander kommutativ sind, da sie alle Differentialoperatoren sind. Die Eigenschaften der Operatoren α kennen wir jedoch vorläufig noch nicht. Auf Grund allgemeiner Überlegungen müßte man erwarten, daß sie wohl mit den p, nicht aber untereinander kommutativ sind. Denken wir an die erwähnte Zerlegung der Quadratsumme $a^2 + b^2$ in Linearfaktoren $(a - ib)$ $(a + ib)$, worin die imaginäre Einheit die Rolle der α spielt, so können wir annehmen, daß in unserem Falle die α_1, α_2, α_3, α_4 Einheiten darstellen, die i analog sind. In der Mathematik sind schon lange sogenannte „hyperkomplexe" Zahlen bekannt, die mehr als zwei Einheitszahlen enthalten (bei der gewöhnlichen komplexen Zahl $a + ib = 1a + ib$ gibt es zwei Einheiten: die reelle Einheit 1 und das imaginäre i). Diese hyperkomplexen Einheiten (wenn es mehr als zwei sind) haben einige eigentümliche Eigenschaften. Speziell unterliegen sie bei der Multiplikation nicht dem Gesetz der Kommutativität. Für uns ist es jetzt wichtig, festzustellen, daß die „Einheiten" α auf jeden Fall nicht von x, y, z und t abhängen und demzufolge mit p_1, p_2, p_3, p_4 kommutativ sein müssen.[1])

Beachten wir dies alles, so können wir die Multiplikation auf der rechten Seite der Gleichung (202,3) unter Wahrung der Reihenfolge der Faktoren α ausführen:

$$\begin{aligned} &(p_4 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \alpha_4\mu_0 c)\ (p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4\mu_0 c) = \\ &= p_4^2 - \alpha_1^2 p_1^2 - \alpha_2^2 p_2^2 - \alpha_3^2 p_3^2 - \alpha_4^2\mu_0^2c^2 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1)\,p_1p_2 - \\ &- (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)\,p_1p_3 - (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_4\alpha_1)\,p_1\mu_0 c - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2)\,p_2p_3 - \\ &- (\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2)\,p_2\mu_0 c - (\alpha_3\alpha_4 - \alpha_4\alpha_3)\,p_3\mu_0 c. \end{aligned} \tag{202,4}$$

[1]) Die Interpretation der Operatoren α als Einheiten einer hyperkomplexen Zahl ist zuerst von D. D. IWANENKO und K. W. NIKOLSKI gegeben worden.

Vergleichen wir dieses Resultat mit der linken Seite von (202,3), so sehen wir, daß beide Ausdrücke unter den Bedingungen

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = 1\,, \tag{202,5}$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i \neq j) \tag{202,6}$$

identisch sind.

Die Beziehungen (202,6) zeigen, daß die Faktoren α tatsächlich nicht dem Gesetz der Kommutativität unterliegen, sondern daß sie „antikommutativ" sind.

Wir bringen (202,2) jetzt in die Form

$$(p_4 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \alpha_4 \mu_0 c)\ (p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 \mu_0 c)\ \psi = 0\,. \tag{202,7}$$

Ist die Gleichung

$$(p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 \mu_0 c)\ \psi = 0 \tag{202,8}$$

erfüllt, so gilt offensichtlich (202,7) und demzufolge auch (202,2). Was die Gleichung

$$(p_4 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \alpha_4 \mu_0 c)\ \psi = 0 \tag{202,9}$$

betrifft, so ist leicht zu sehen, daß sie durchaus nichts Neues darstellt, denn die Gleichungen (202,8) und (202,9) unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen vor α_i voneinander. Aus den Beziehungen (202,5) können aber alle α_i nur bis auf das Vorzeichen bestimmt werden und ein gleichzeitiger Vorzeichenwechsel bei allen Operatoren α führt (202,8) in (202,9) über. Da außerdem die Gleichung (202,8) linear in allen p ist, so ist sie auch die gesuchte Gleichung erster Ordnung. Es ist dies die DIRAC-Gleichung in symbolischer Operatorform.

Mit den Ausdrücken (202,1) für die Operatoren p_1, p_2, p_3, p_4 bringen wir die DIRAC-Gleichung in folgende Form:

$$\frac{ch}{2\pi i}\left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha^3 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \alpha_4 \mu_0 c^2 \psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t}\,. \tag{202,10}$$

Schon die Tatsache, daß in der Gleichung (202,10) alle Ableitungen symmetrisch vorkommen, und zwar als erste Ableitungen, läßt erwarten, daß diese Gleichung die Grundforderung der speziellen Relativitätstheorie erfüllt, d. h., daß sie invariant hinsichtlich der LORENTZ-Transformation ist. Eine Nachprüfung, auf die wir hier nicht eingehen werden, bestätigt diese Erwartung.[1])

Bisher haben wir uns noch nicht mit der Form der Operatoren α, die wir „Einheiten" nannten, beschäftigt. Die bemerkenswerte Eigenartigkeit der DIRAC-Gleichung besteht darin, daß die grundlegenden Eigenschaften des Elektrons — sein Spin, sein magnetisches Moment und sogar die Bewegung des Elektrons im COULOMBschen Zentralfeld (KEPLER-Problem) — alle aus der Gleichung (202,8) zu erhalten sind, wobei hinsichtlich der Operatoren α nur deren aus (202,5) und (202,6) hervorgehende Eigenschaften zu berücksichtigen sind. Zum Studium des Verhaltens des Elektrons *in einem Feld* (speziell zur Ermittlung seines eigenen magnetischen Moments) hat man natürlich von der Gleichung (202,8) oder, was dasselbe ist,

[1]) Siehe z. B. W. A. FOCK: „Elemente der Quantenmechanik" (B. A. ФОК: Начала квантовой механики, Кубуч 1932. стр. 184—188), oder auch W. PAULI: „Handbuch der Physik", Bd. 24_I, S. 214 ff., Verlag Springer, Berlin 1933.

von (202,10), die das freie Elektron beschreiben, zu einer Gleichung, die auch das elektromagnetische Feld berücksichtigt, überzugehen, was wir im folgenden Paragraphen tun wollen.

Wir stellen fest, daß die Funktion ψ sowohl von den Koordinaten und der Zeit als auch von einer zusätzlichen Variablen, auf die die Operatoren α_i wirken, abhängen muß, denn der Operator der linken Seite der Gleichung (202,8) enthält nicht nur die Operatoren p_1, p_2, p_3, p_4, sondern auch die „Einheiten" $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4, die eigentlich auch Operatoren sind. Die Lösungen der Dirac-Gleichung haben noch eine wichtige Besonderheit, der wir uns jetzt zuwenden wollen. Wir sahen, daß sie aus der relativistischen Gleichung zweiter Ordnung durch „Aufspaltung" in Gleichungen erster Ordnung gewonnen wurde. Man kann auch sagen, daß das angewandte Verfahren ein symbolisches Wurzelziehen aus dem relativistischen Ausdruck des Quadrats der Energie

$$\frac{1}{c^2} E^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \mu_0^2 c^2 \tag{202,11}$$

darstellt.

Den Operator der linken Seite von (202,8) — den relativistischen Energieoperator — kann man als symbolisch geschriebene Quadratwurzel aus (202,11) ansehen. Die Quadratwurzel hat jedoch zwei Vorzeichen $\pm$. Die Untersuchung der Lösungen der Dirac-Gleichung für das freie Elektron führt zu dem Schluß, daß dies auch für die Energieeigenwerte des relativistischen Elektrons gilt. Es zeigt sich, daß die Dirac-Gleichung außer den Lösungen mit positiver Energie auch ebenso viele Lösungen mit negativer Energie haben muß. Wir wollen nicht vergessen, daß die Rede hier nicht von solchen negativen Energien ist, wie wir sie z. B. bei der nicht-relativistischen Lösung des Kepler-Problems fanden. Dort ist ein negatives Vorzeichen einfach die Folge einer willkürlichen Wahl des Nullniveaus der potentiellen Energie. Hier ist aber von der relativistischen *Gesamtenergie* mc^2 die Rede, so daß der negativen Energie $-mc^2$ eine negative Masse $-m$ entspricht.

Es ist aber klar, daß die Existenz negativer Energie nicht nur eine Eigentümlichkeit der Dirac-Gleichung, sondern der gesamten relativistischen Physik ist. In der Relativitätstheorie wird die Energie allgemein durch ihr Quadrat

$$E^2 = c^2 p^2 + \mu_0^2 c^4$$

definiert, und daher ist

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + \mu_0^2 c^4}.$$

In der klassischen Physik hat das doppelte Vorzeichen keinen Sinn, da zwischen der geringsten positiven und der größten negativen Energie (man erhält beide Werte für $p = 0$)

$$E = \pm \mu_0 c^2$$

der endliche Abstand $2\mu_0 c^2$ besteht. Da sich aber alle dynamischen Veränderlichen in der klassischen Physik stetig ändern, so ist ein Übergang von positiver zu negativer Energie nicht möglich. In der Quantentheorie gibt es eine solche Einschränkung im allgemeinen nicht, und daher bildete das Vorkommen negativer Energie anfangs eine Schwierigkeit in der Diracschen Theorie. Wir werden jedoch weiter unten sehen, daß gerade diese Tatsache zur Voraussage der Existenz positiver Elektronen (Positronen) führte.

§ 203. Die Existenz des magnetischen Eigenmoments und Spins des Elektrons

In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß die Existenz eines eigenen magnetischen Moments, das gleich einem Bohrschen Magneton ist, und des Spins des Elektrons automatisch aus der Dirac-Gleichung folgen.

Das magnetische Eigenmoment des Elektrons

Zum Beweis stellen wir zunächst die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld auf. Dazu brauchen wir zum Vergleich auch die relativistische Gleichung zweiter Ordnung, wie wir sie in § 201 aufstellten:

$$\left[-\frac{1}{c}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}+e\varphi\right)\right]^2\psi=$$
$$=\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2\psi+\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{e}{c}A_y\right)^2\psi+\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{e}{c}A_z\right)^2\psi+\mu_0^2c^2\psi. \qquad (201,6)$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen für die in diese Gleichung eingehenden Operatoren ein:

$$P_1=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x,\quad P_2=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{e}{c}A_y,$$
$$P_3=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{e}{c}A_z,\quad P_4=-\frac{1}{c}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}+e\varphi\right). \qquad (203,1)$$

Mit diesen Abkürzungen nimmt die Gleichung (201,6) folgende Gestalt an:

$$(P_4^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2-\mu_0^2c^2)\,\psi=0. \qquad (203,2)$$

Nun schreiben wir die Dirac-Gleichung für das freie Elektron hin:

$$(p_4+\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3+\alpha_4\mu_0c)\,\psi=0. \qquad (202,8)$$

[Bedeutungen der Operatoren p_1, p_2, p_3, p_4 siehe (202,1).] Zum Übergang zur Gleichung, die die Bewegung im elektromagnetischen Feld beschreibt, sind die Operatoren p_1, p_2, p_3, p_4 in (202,8) nach dem von uns schon mehrere Male angewandten Standardverfahren durch die entsprechenden Operatoren (203,1) P_1, P_2, P_3, P_4 zu ersetzen:

$$(P_4+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3+\alpha_4\mu_0c)\,\psi=0. \qquad (203,3)$$

Das ist die in symbolischer Form geschriebene Diracsche Grundgleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld. Es zeigt sich jedoch, daß im Unterschied zu den Gleichungen (202,8) und (202,2) die Gleichung (203,3) nicht identisch ist mit (203,2), d. h., die Lösungen von (203,3) sind nicht gleichzeitig Lösungen von (203,2). Um uns davon zu überzeugen, multiplizieren wir (203,3) von links her mit dem Operator

$$P_4-\alpha_1P_1-\alpha_2P_2-\alpha_3P_3-\alpha_4\mu_0c, \qquad (203,4)$$

wobei wir die im vorangegangenen Paragraphen festgestellten Eigenschaften der Operatoren α_1, α_2, α_3, α_4

$$\alpha_1^2=\alpha_2^2=\alpha_3^2=\alpha_4^2=1, \qquad (202,5)$$

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i\neq j) \qquad (202,6)$$

ausnutzen. Außerdem beachten wir, daß α und P kommutativ sind

$$\alpha_i P_j = P_j \alpha_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Wir erhalten nach Multiplikation

$$\left[P_4^2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (P_4 P_i - P_i P_4) - \sum_{i=1}^{3} P_i^2 - \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j P_i P_j + \alpha_j \alpha_i P_j P_i) - \mu_0^2 c^2\right] \psi = 0. \qquad (203{,}5)$$

In dem Operator in der eckigen Klammer treten außer den Gliedern

$$P_4^2 - \sum_{i=1}^{3} P_i^2 - \mu_0^2 c^2 \equiv P_4^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 - \mu_0^2 c^2,$$

die mit dem Operator der Gleichung (203,2) zusammenfallen, noch zwei Summen auf, nämlich

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i (P_4 P_i - P_i P_4) \qquad (203{,}6)$$

und

$$\sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j P_i P_j + \alpha_j \alpha_i P_j P_i). \qquad (203{,}7)$$

Diese Summen bilden die Veränderung der Gleichung (203,3) gegenüber (203,2).

Wir berechnen zuerst die zweite Summe. Beachten wir, daß gemäß (202,6) $\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i$ ist, so erhalten wir zunächst

$$\sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j P_i P_j + \alpha_j \alpha_i P_j P_i) = \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j (P_i P_j - P_j P_i). \qquad (203{,}7')$$

Als Beispiel berechnen wir eines der Glieder dieser Summe, und zwar für $i = 1$, $j = 2$. Wir betrachten die Produkte $P_1 P_2$ und $P_2 P_1$ und wenden aus Bequemlichkeitsgründen die Operatoren auf irgendeine beliebige Funktion ψ an:

$$P_1 P_2 \psi = \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x\right)\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y \psi\right) =$$

$$= -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c} A_x \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c} \psi \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c} A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{e^2}{c^2} A_x A_y \psi.$$

$$P_2 P_1 \psi = \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y\right)\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi}{dx} - \frac{e}{c} A_x \psi\right) =$$

$$= -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c} A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c} \psi \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c} A_x \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{e^2}{c^2} A_y A_x \psi.$$

Nach Subtraktion und Kürzungen erhalten wir

$$P_1P_2 - P_2P_1 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}\,\mathrm{rot}_z\,\mathfrak{A}.$$

Für das erste Glied der Summe (203,6) finden wir auf dieselbe Art

$$P_4P_1 - P_1P_4 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right).$$

Beachten wir weiter die bekannten Potentialausdrücke für die elektrische und magnetische Feldstärke[1]),

$$\mathfrak{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}; \quad \mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},$$

so erhalten wir endlich

$$P_1P_2 - P_2P_1 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}H_z,$$

$$P_4P_1 - P_1P_4 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}E_x.$$

Nach analoger Berechnung der übrigen Glieder der Summen (203,6) und (203,7′) nehmen diese folgende Form an:

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(P_4P_i - P_iP_4) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}(\alpha_1E_x + \alpha_2E_y + \alpha_3E_z),$$

$$\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j(P_iP_j - P_jP_i) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}(\alpha_2\alpha_3H_x + \alpha_3\alpha_1H_y + \alpha_1\alpha_2H_z).$$

Damit bekommt jetzt die Gleichung (203,5) die Form

$$(P_4^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 - \mu_0^2c^2)\,\psi =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}(\alpha_2\alpha_3H_x + \alpha_3\alpha_1H_y + \alpha_1\alpha_2H_z)\,\psi + \frac{h}{2\pi i}\frac{e}{c}(\alpha_1E_x + \alpha_2E_y + \alpha_3E_z)\,\psi. \quad (203{,}8)$$

Wir sehen, daß diese Gleichung zwei Glieder enthält, die in (203,2) nicht vorkommen.

Um uns den physikalischen Sinn dieser neuen Glieder klarzumachen, gehen wir zu einer Näherung über, die zulässig ist, wenn die relativistische Energie E hinreichend klein ist, so daß sie in der Form

$$E = E_1 + \mu_0c^2$$

dargestellt werden kann. Hierin ist E_1 die nicht-relativistische Energie (siehe Teil I, § 61).

[1]) Siehe: I. E. Tamm: „Grundlagen der Theorie der Elektrizität" (И. Е. Тамм: Основы теории электричества, § 94, Гостехиздат, 1949), oder auch F. Hund, „Einführung in die Theoretische Physik", Bd. II, Bibliographisches Institut, Leipzig 1951.

Wir berechnen die rechte Seite von (203,8) für den stationären Zustand. In diesem Falle tritt die Zeit in dem Faktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ auf:

$$P_4\psi = \frac{1}{c}\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\varphi\psi\right) = \frac{1}{c}(E - e\varphi)\,\psi.$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß

$$P_4^2 - \mu_0^2c^2 = \frac{1}{c^2}(E - e\varphi)^2 - \mu_0^2c^2 = \left(\frac{E_1 - e\varphi}{c} + 2\mu_0 c\right)\frac{E_1 - e\varphi}{c} \approx 2\mu_0(E_1 - e\varphi) \tag{203,9}$$

ist, wenn $E = E_1 + \mu_0 c^2$ und $E_1 \ll \mu_0 c^2$.

Die Summe $-(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$ ist gleich (siehe die analoge Rechnung in § 195)

$$-(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)\,\psi = \frac{h^2}{4\pi^2}\Delta\psi + \frac{eh}{\pi ci}\,\mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi. \tag{203,10}$$

Unter Benutzung der Formeln (203,9) und (203,10) können wir die linke Seite von (203,8) explizit aufschreiben. Nach Division durch $2\mu_0$ erhalten wir

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu_0}\Delta\psi + (E_1 - e\varphi)\,\psi + \frac{eh}{2\mu_0\pi ci}\,\mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi =$$

$$= \frac{eh}{4\pi\mu_0 ci}(\alpha_2\alpha_3 H_x + \alpha_3\alpha_1 H_y + \alpha_1\alpha_2 H_z)\,\omega + \frac{eh}{4\pi\mu_0 ci}(\alpha_1 E_x + \alpha_2 E_y + \alpha_3 E_z)\,\psi. \tag{203,11}$$

Diese Gleichung vergleichen wir mit der in § 195 gefundenen nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung (195,6) für die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld. Sie läßt sich leicht in die Form

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu_0}\Delta\psi + (E - e\varphi)\,\psi + \frac{eh}{2\mu_0\pi ci}\,\mathfrak{A}\operatorname{grad}\psi = 0 \tag{203,12}$$

bringen.

Wie auch zu erwarten war, unterscheidet sich die Gleichung (203,11) von (203,12) nur durch die beiden Glieder, deren physikalische Bedeutung wir feststellen wollen. Wir bezeichnen sie mit $U_m\psi$ und $U_e\psi$:

$$U_m = -i\frac{eh}{4\pi\mu_0 c}(\alpha_2\alpha_3 H_x + \alpha_3\alpha_1 H_y + \alpha_1\alpha_2 H_z), \tag{203,13}$$

$$U_e = -i\frac{eh}{4\pi\mu_0 c}(\alpha_1 E_x + \alpha_2 E_y + \alpha_3 E_z). \tag{203,14}$$

Da diese Operatoren in (203,11) mit ψ multipliziert werden, müssen sie irgendeine Energie darstellen. Es ist aber bekannt, daß die Energie eines Dipols mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{M}$ in einem Magnetfeld der Stärke $\mathfrak{H}$ gleich $(\mathfrak{M}\mathfrak{H})$ ist:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{H} = M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z. \tag{203,15}$$

Durch einen Vergleich mit (203,13) finden wir

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\, i a_2 a_3 \frac{eh}{4\pi\mu_0 c}, \\ M_y &= -\, i a_3 a_1 \frac{eh}{4\pi\mu_0 c}, \\ M_z &= -\, i a_1 a_2 \frac{eh}{4\pi\mu_0 c}. \end{aligned}\right\} \tag{203,16}$$

Wir führen nun neue Operatoren σ_x, σ_y, σ_z ein, die mit den Größen a_1, a_2, a_3 durch die Beziehungen

$$\sigma_x = -\, i a_2 a_3, \quad \sigma_y = -\, i a_3 a_1, \quad \sigma_z = -\, i a_1 a_2$$

verbunden sind. Dann erhalten die Formeln (203,16) die Gestalt

$$M_x = \sigma_x \frac{eh}{4\pi\mu_0 c}, \quad M_y = \sigma_y \frac{eh}{4\pi\mu_0 c}, \quad M_z = \sigma_z \frac{eh}{4\pi\mu_0 c}. \tag{203,17}$$

Beachten wir, daß $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 1$ ist, so erhalten wir

$$\sigma_x^2 = a_2^2 a_3^2 = 1$$

und analog

$$\sigma_y^2 = 1, \quad \sigma_z^2 = 1.$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Operatoren σ_x, σ_y, σ_z die beiden Eigenwerte ± 1 haben, so daß z. B.

$$M_z \psi = \frac{eh}{4\pi\mu_0 c} \sigma_z \psi = \pm \frac{eh}{4\pi\mu_0 c} \psi.$$

Somit ist die Projektion des magnetischen Eigenmoments des Elektrons auf eine Achse zahlenmäßig einem Bohrschen Magneton gleich, was zu beweisen war.

Wir haben also den Sinn des zusätzlich auftretenden Gliedes $U_m \psi$ gefunden. Nun enthält die Gleichung (203,11) aber noch ein zweites Zusatzglied, nämlich $U_e \psi$. So wie $U_m \psi$ dem magnetischen Moment des Elektrons entspricht, wird $U_e \psi$ einem elektrischen Moment entsprechen. Seine Entstehung wird aus folgenden Überlegungen verständlich: Ebenso wie bei der Bewegung einer elektrischen Ladung ein Magnetfeld entsteht, muß die Bewegung eines magnetischen Dipols ein elektrisches Moment hervorrufen. Auf die Notwendigkeit des Erscheinens eines solchen elektrischen Moments bei einer Bewegung eines magnetischen Dipols wies aus relativistischen Symmetrieüberlegungen noch vor Aufstellung der Dirac-Gleichung J. Frenkel im Zusammenhang mit der Elektronenspinhypothese hin. Nach der Relativitätstheorie ist das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ des Elektrons mit seinem magnetischen Moment $\mathfrak{M}$ durch die Formel $\mathfrak{p} = \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\, \mathfrak{M}\right]$ verknüpft und demzufolge $\frac{v}{c}$ mal kleiner als das magnetische Moment.

Der Spin des Elektrons

Die DIRAC-Gleichung erlaubt nicht nur, das Vorhandensein eines dem Elektron eigenen magnetischen Moments, sondern auch das eines ihm eigenen Impulsmoments zu beweisen. Das Schema des Beweises sei hier angegeben.

Die Projektion des gesamten Impulsmoments ist sowohl in der klassischen als auch in der Quantenmechanik eine Bewegungskonstante. In § 177 sahen wir, daß die Operatoren der Komponenten des Bahnimpulsmoments, z. B.

$$L_z = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

mit dem nicht-relativistischen Energieoperator kommutieren und daher in nicht-relativistischer Näherung Bewegungskonstanten sind. Eine analoge Überlegung zeigt aber, daß L_z (und ebenso L_x und L_y) *mit dem relativistischen Energieoperator*, wie ihn die linke Seite der DIRAC-Gleichung (203,3) darstellt, *nicht-kommutativ* ist. Der Operator

$$\frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - i\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi} = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_z\frac{h}{4\pi} \tag{203,18}$$

hingegen ist mit dem relativistischen Energieoperator kommutativ. Diese Tatsache deutet darauf hin, daß die Projektion des Bahnmoments allein keine Bewegungskonstante ist; die Summe der Projektionen von Bahnmoment und Spinmoment jedoch gehorcht dem Erhaltungssatz.[1]) Daraus folgt die Existenz eines mechanischen Eigenmoments des Elektrons neben dem Bahnmoment.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Quantenzahl der Projektion des mechanischen Moments des Elektrons zwei Werte: $\pm\frac{1}{2}$, annehmen kann. Zu diesem Zweck führen wir zunächst die Bezeichnung

$$J_z = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_z\frac{h}{4\pi}$$

ein. Da J_z und der Energieoperator kommutativ sind, hat J_z mit diesem gemeinsame Eigenfunktionen (siehe § 167). Eine beliebige Eigenfunktion des Energieoperators möge die Funktion ψ sein. Dann unterscheidet sich $J_z\psi$, wie wir in § 167 sahen, von ψ nur durch einen gewissen Zahlenfaktor C:

$$J_z\psi = C\psi. \tag{203,19}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

schreiben wir die Gleichung (203,19) um in die explizite Form

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{h}{4\pi}\sigma_z\psi = C\psi. \tag{203,20}$$

[1]) Siehe Anhang X.

Da ψ gleichzeitig auch Eigenfunktion des Energieoperators ist, entspricht diese einem gewissen stationären Zustand mit der Energie E. Daher geht die Zeit in den Ausdruck für ψ durch den Faktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ (siehe § 172) ein. Der von r, ϑ und φ abhängige Teil der Eigenfunktion kann in Form eines Produkts dreier Funktionen R, Θ, Φ, von denen jede nur von einer der Koordinaten abhängt, dargestellt werden. So hat dann die Eigenfunktion des Energieoperators die Form

$$\psi = R\Theta\Phi e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}.$$

Diese Funktion muß auch die Gleichung (203,20) befriedigen. Da diese Gleichung linear und von erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist, können wir den Ansatz

$$\Phi = e^{im\varphi}$$

machen. Dabei kann man sich ganz wie in § 179 leicht davon überzeugen, daß die Bedingung der Eindeutigkeit nur für ganzzahlige m erfüllt ist. Also suchen wir die Lösung der Gleichung (203,20) in der Form

$$\psi = R\Theta e^{im\varphi} e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}.$$

Setzen wir dies in (203,20) ein, so finden wir

$$\frac{h}{2\pi}\left(m + \frac{\sigma_z}{2}\right)\psi = C\psi,$$

woraus sich

$$\left(m - \frac{2\pi}{h}C\right)\psi = -\frac{1}{2}\sigma_z\psi$$

ergibt. Wenden wir dieselben Operatoren ein zweites Mal an, so erhalten wir

$$\left(m - \frac{2\pi}{h}C\right)^2\psi = \frac{1}{4}\sigma_z^2\,\psi$$

oder, da nach dem Vorangegangenen $\sigma_z^2 = 1$ ist,

$$\left(m - \frac{2\pi}{h}C\right)^2\psi = \frac{1}{4}\psi,$$

woraus sich schließlich

$$C = \left(m \pm \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$$

ergibt. Die Gleichung (203,19) hat jetzt die Form

$$J_z\psi = \left(m \pm \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}\psi.$$

Wir sehen, daß sich die Eigenwerte des Operators der Projektion des Gesamtimpulsmoments J_z in Einheiten $\frac{h}{2\pi}$ durch eine ganze Zahl m (positive, negative oder auch Null) plus oder minus $\frac{1}{2}$ ausdrücken lassen. Da wir schon wissen, daß m die Quantenzahl der Projektion des Bahnimpulsmoments ist, bedeutet $\pm\frac{1}{2}$ die Quantenzahl der Projektion des Elektronenimpulsmoments, d. h. des Spins. Somit kann die Projektion des Gesamtimpulsmoments die Werte

$$J_z = \left(m \pm \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi} \qquad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

annehmen, was wir ja auch beweisen wollten.

§ 204. Die Feinstrukturformel

Schon verschiedentlich erwähnten wir, daß das KEPLER-Problem mit Hilfe der DIRAC-Gleichung gelöst werden kann. Dabei erhält man nicht nur die übliche Reihenfolge der BALMERschen Energieniveaus, sondern auch etwas Neues. Die Termformel, die sich aus der DIRAC-Gleichung ergibt, lautet

$$T = \frac{RZ^2}{n^2} + \frac{\alpha^2 RZ^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right).$$

Auf die Bedeutung der im zweiten Glied auftretenden Größen α und j soll weiter unten eingegangen werden. Zunächst ist für uns wesentlich, daß in der Formel neben dem BALMER-Term $\frac{RZ^2}{n^2}$, den wir aus der SCHRÖDINGER-Gleichung erhalten, ein zweites, im Vergleich zum ersten kleines (die Konstante α^2 hat den Wert $5{,}32\cdot 10^{-5}$) Glied auftritt. Dieses zweite Glied ist jedoch sehr wichtig, da es die Feinstruktur der Spektrallinien zu deuten gestattet.

Das Korrekturglied in der DIRACschen Formel, der sogenannten Feinstrukturformel, ist, wenn auch nicht streng, so doch anschaulich, auch auf elementare Weise ohne die DIRAC-Gleichung herzuleiten. Wir wollen hier diese elementare Ableitung nicht nur ihrer Einfachheit wegen in großen Zügen wiedergeben, sondern auch deshalb, weil die dabei verwendete Methode — das sogenannte Vektormodell des Atoms — große praktische Bedeutung hat.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung liefert aus folgendem Grund nur den einfachen BALMER-Term: Bei der Lösung des KEPLER-Problems mit Hilfe dieser Gleichung werden zwei wesentliche Faktoren nicht berücksichtigt,

1. die relativistische Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit (die SCHRÖDINGER-Gleichung ist, wie schon oft unterstrichen, ihrem Wesen nach nicht-relativistisch);

2. die Existenz des Spins.

Jedem dieser beiden Faktoren entspricht ein Zusatzglied in der klassischen HAMILTON-Funktion des Problems:

1. Das Zusatzglied, das die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit berücksichtigt, ist auf folgende Besonderheit der relativistischen Bewegung zurückzuführen. Es

zeigt sich, daß die relativistische Bewegung eines Elektrons im Zentralfeld einer COULOMB-Kraft von komplizierter Natur ist[1]; man kann sie sich aus der Bewegung längs einer KEPLER-Ellipse und einer langsamen Drehung (Präzession) der Ellipse in ihrer Ebene zusammengesetzt denken. Die resultierende Bahn ist eine Rosette (Abb. 247). Dieser ebenen Präzession der Bahn entspricht auch das Zusatzglied in der HAMILTON-Funktion, die wir in der Form

$$H = H_0 + H_r$$

darstellen können, wobei H_0 die nicht-relativistische HAMILTON-Funktion, d. h.

$$\frac{1}{2\mu_0}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}$$

[siehe Teil I, § 57, Formel (57,13)], μ_0 die Ruhemasse und H_r eine gewisse Zusatzenergie, die der relativistischen Präzession entspricht, sind.

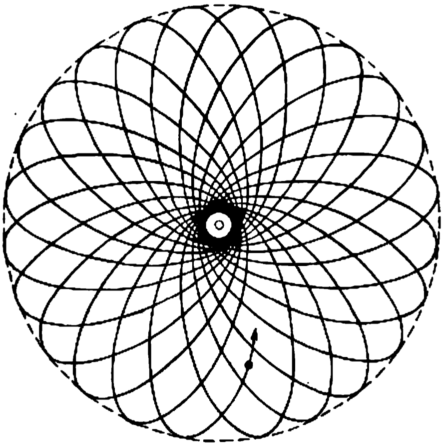


Abb. 247. Rosettenbahn des relativistischen Elektrons im COULOMB-Feld

2. Wegen der Existenz eines magnetischen Moments, das mit dem Spin verbunden ist, verhält sich das Elektron wie ein magnetischer Dipol, der sich in einem Magnetfeld, das durch seine Bewegung in der „Bahn" bedingt ist, befindet, d. h., das Elektron besitzt eine zusätzliche magnetische Wechselwirkungsenergie. Daher fordert die Berücksichtigung des Spins die Einführung eines weiteren Zusatzgliedes H_{ls} in die HAMILTON-Funktion. Die gesamte HAMILTON-Funktion besteht daher aus drei Gliedern

$$H = H_0 + H_r + H_{ls},$$

wobei auf das Glied H_0 der Hauptteil der Energie fällt und H_r und H_{ls} nur als kleine Störungen anzusehen sind. Bei der Lösung des Problems in nullter Näherung (siehe § 188) fallen die Zusatzglieder H_r und H_{ls} fort, und die SCHRÖDINGER-Gleichung $H_0\,\psi = E\psi$

[1] Siehe J. I. FRENKEL: „Theoretische Mechanik" (Я. И. Френкель: Теоретическая механика, стр. 48–52, 56–57, Гостехиздат, 1940) oder auch M. BORN: „Vorlesungen über Atommechanik", Bd. I, Verlag Springer, Berlin 1925.

liefert in nullter Näherung die BALMERschen Energieniveaus, denen die Terme

$$T_0 = \frac{RZ^2}{n^2}$$

entsprechen.

Die Berücksichtigung der Störungen ergibt in erster Näherung ein Korrekturglied zu diesem Term, das aus zwei Summanden besteht:

$$\Delta T = \Delta T_r + \Delta T_{ls}.$$

Die Berechnung der ersten, relativistischen Korrektur ΔT_r nach der Störungstheorie führt zu dem Ausdruck

$$\Delta T_r = \frac{R\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right). \tag{204,1}$$

Hierin ist l die Quantenzahl des „Bahnimpulsmoments" ($l = 0, 1, 2, \ldots$ für s-, p-, d-Elektronen), α eine die universellen Konstanten e, h und c enthaltende Konstante

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}. \tag{204,2}$$

Die Konstante α, die sogenannte Feinstrukturkonstante von SOMMERFELD (da sie zuerst von SOMMERFELD bei der Lösung des KEPLER-Problems in der BOHRschen Theorie unter Berücksichtigung der relativistischen Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit eingeführt wurde), hat eine wunderbare Eigenschaft — sie ist als Kombination der drei grundlegenden universellen Konstanten e, h und c eine *dimensionslose Zahl*. e^2 hat die Dimension [erg · cm], denn $\frac{e^2}{r}$ ist die potentielle Energie im COULOMB-Feld und wird in erg ausgedrückt, woraus folgt, daß [e^2] = [*Energie mal Länge*] ist, d. h. [erg · cm]. Die Dimension von hc ist [*Energie · Zeit · Geschwindigkeit*], d. h.

$$[hc] = \left[\frac{\text{erg} \cdot \text{sec} \cdot \text{cm}}{\text{sec}}\right] = [\text{erg} \cdot \text{cm}].$$

Somit hat hc dieselbe Dimension wie e^2, d. h. also, daß α eine dimensionslose Größe ist. Den Zahlenwert von α findet man aus den Zahlenwerten von e, h und c zu

$$\alpha = 7{,}30 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha^2 = 5{,}32 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{1}{\alpha} = 137{,}03.$$

Wir wollen nun die zweite Korrektur, die die Wechselwirkung zwischen Spin- und Bahnmoment berücksichtigt, betrachten. Wir finden sie aus folgenden halbklassischen Überlegungen.

Die zusätzliche Energie des Elektron-Magneten in einem durch seine Bahnbewegung erzeugten Magnetfeld kann mit gleichem Recht auf zweierlei Weise ausgedrückt werden, wobei man zu gleichen Zahlenwerten gelangt:

1. als potentielle Energie des magnetischen Dipols im Magnetfeld;
2. als kinetische Energie der LARMOR-Präzession (siehe Teil I, § 72).

Wir beschreiten den ersten Weg und werden die potentielle Energie, d. h. das skalare Produkt — $(\mathfrak{M}\mathfrak{H})$, berechnen, wobei $\mathfrak{M}$ das magnetische Eigenmoment des Elektrons und $\mathfrak{H}$ die Stärke des magnetischen Feldes, das durch seine Bewegung in der Bahn erzeugt wird, sind. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist wie folgt zu berechnen. Wir gehen vom „festen", an den Kern gebundenen Koordinatensystem zu einem mit dem Elektron bewegten System über. In diesem System ruht der Schwerpunkt des Elektrons, und der Kern bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, die zahlenmäßig gleich der Elektronengeschwindigkeit, ihr aber entgegengesetzt ist. Diese Bewegung erzeugt einen Strom der Stärke $Ze\mathfrak{v}$, und das Magnetfeld dieses Stroms ist nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz am Ort des Elektrons gleich

$$\mathfrak{H} = -\frac{Ze\,[\mathfrak{v}\mathfrak{r}]}{cr^3} = \frac{Ze\,[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]}{cr^3}\,. \tag{204,3}$$

Das Vektorprodukt $[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$ läßt sich leicht durch das Impulsmoment $\mathfrak{l}$ (das Impulsmoment eines einzelnen Elektrons wollen wir in Zukunft durch $\mathfrak{l}$, das Impulsmoment des ganzen Atoms durch $\mathfrak{L}$ bezeichnen) ausdrücken. So erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\mathfrak{l} = \mu\,[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] \tag{204,4}$$

die Beziehung

$$\mathfrak{H} = \frac{Ze}{\mu c r^3}\,\mathfrak{l}\,. \tag{204,5}$$

Die zusätzliche Energie eines magnetischen Dipols mit dem Moment $\mathfrak{M}$ ist aber in einem Magnetfeld der Stärke $\mathfrak{H}$ gleich

$$-(\mathfrak{M}\mathfrak{H}) = -\frac{Ze}{\mu c r^3}\,(\mathfrak{M}\mathfrak{l})\,. \tag{204,6}$$

Dieser Ausdruck ist auch, wie schon gesagt, gleich der kinetischen Energie der LARMOR-Präzession des Elektrons. Allerdings ist zu beachten, daß die Energie, die durch die Formel (204,6) gegeben ist, einer LARMOR-Präzession in einem Koordinatensystem entspricht, in dem der Elektronenschwerpunkt ruht. Zum Übergang zu einem Koordinatensystem, in dem der Kern oder genauer der Schwerpunkt des ganzen Atoms ruht, ist noch eine LORENTZ-Transformation auszuführen. Die zusätzliche Energie der magnetischen Wechselwirkung, die man als Endresultat erhält, ist, wie J. FRENKEL zeigte, gleich der Hälfte von (204,6), d. h. also

$$H_{ls} = -\frac{Ze}{2\mu c r^3}\,(\mathfrak{M}\mathfrak{l})\,. \tag{204,7}$$

Diese Zusatzenergie können wir als kleine Störung zum Hauptteil der HAMILTON-Funktion H_0 ansehen. Nach dem schon bekannten Satz der Störungstheorie (siehe § 188) ist die zusätzliche Energie, die durch die Störung bedingt ist, gleich dem *Mittelwert* des Störgliedes der HAMILTON-Funktion, gemittelt über den ungestörten Zustand, so daß

$$\Delta E_{ls} = \overline{H}_{ls}$$

ist. In Anbetracht dessen, daß alle in (204,7) auftretenden Größen außer r konstant

sind, ist nur über $\frac{1}{r^3}$ zu mitteln:

$$\Delta E_{ls} = -\frac{Ze}{2\mu c}\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)}(\mathfrak{M}\mathfrak{l}). \tag{204,8}$$

Da sich der Mittelwert über den ungestörten Zustand erstreckt, sind zu seiner Bildung die Eigenfunktionen des KEPLER-Problems zu benutzen, wie wir es in den speziellen Fällen in § 184 taten:

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \int \psi_{nl}^* \frac{1}{r^3} \psi_{nl}\, d\tau .$$

Das Ergebnis der Rechnung lautet

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{Z^3}{a_1^3 n^3 l \left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}, \tag{204,9}$$

wobei a_1 den ersten BOHRschen Radius bedeutet. Er ist nach (184,10)

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 \mu e^2}. \tag{204,10}$$

Wir wollen uns nun der Berechnung des in Formel (204,8) auftretenden skalaren Produkts $(\mathfrak{M}\mathfrak{l})$ zuwenden. Das Verhältnis zwischen dem magnetischen Moment $\mathfrak{M}$, das dem Spin entspricht, und seinem mechanischen Moment $\mathfrak{s}$ ist gleich $2 \cdot \frac{e}{2\mu c} = \frac{e}{\mu c}$ (§ 197); die Richtung von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{s}$ entgegengesetzt, da die Elektronenladung negativ ist:

$$\mathfrak{M} = -\frac{e}{\mu c}\mathfrak{s}. \tag{204,11}$$

Die Zahlenwerte der Spin- und Bahnmomente sind gleich

$$|\mathfrak{s}| = \sqrt{s(s+1)}\,\frac{h}{2\pi}, \tag{204,12}$$

$$|\mathfrak{l}| = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}. \tag{204,13}$$

Zur Abkürzung der Schreibweise wollen wir in den folgenden Zwischenrechnungen $\sqrt{s(s+1)}$ durch s^* und $\sqrt{l(l+1)}$ mit l^* bezeichnen. Setzen wir (204,9) und (204,11) in (204,8) ein, wobei wir a_1 durch (204,10) ersetzen und die RYDBERG-Konstante

$$R = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3 c}$$

sowie die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$$

einführen, so erhalten wir nach einfachen Umformungen

$$\Delta E_{l_s} = \frac{R\alpha^2 hcZ^4}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} l^* s^* \cos(\mathfrak{l}\mathfrak{s}). \tag{204,14}$$

Als letzter Schritt bleibt uns nun noch die Berechnung des Cosinus des Winkels zwischen dem Bahn- und dem Spinmoment, cos ($\mathfrak{l}\mathfrak{s}$). Dazu betrachten wir die Addition der Impulse $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$.

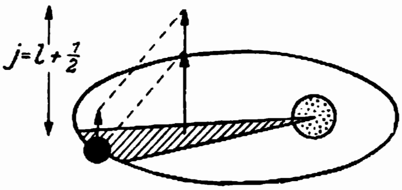


Abb. 248

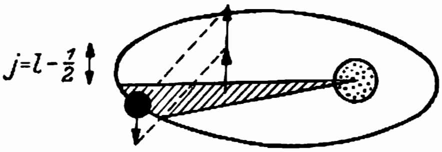


Abb. 249

Da mit dem Bahnimpuls $\mathfrak{l}$ ein Magnetfeld verbunden ist, stellen wir zunächst fest, daß der Vektor $\mathfrak{s}$ in diesem Feld (außer für den Fall $\mathfrak{l} = 0$, wenn das Feld nicht vorhanden ist) ausgerichtet sein muß, und daß dabei zwei Orientierungen mit den Projektionen $+\frac{h}{4\pi}$ und $-\frac{h}{4\pi}$ möglich sind. In der halbklassischen Bohrschen Theorie vollzieht sich die Addition der Impulse $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ überaus einfach: die Zahlenwerte der Impulse sind in der Bohrschen Theorie gleich $l\frac{h}{2\pi}$ und $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$; der Spinimpuls kann sich entweder parallel zu $\mathfrak{l}$ (Projektion $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, Abb. 248) oder antiparallel zu $\mathfrak{l}$ (Projektion $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, Abb. 249) einstellen. Diesen beiden Orientierungen entsprechen die Werte cos ($\mathfrak{l}\mathfrak{s}$) $= \pm 1$.

In der Quantenmechanik ist die Sache weit komplizierter. Das Impulsmoment hat hier keine bestimmte Richtung im Raum. Sein Zahlenwert ist nicht gleich $l\frac{h}{2\pi}$, sondern $\sqrt{l(l+1)}\frac{h}{2\pi}$, während die Projektion auf die Feldrichtung gleich $m_l\frac{h}{2\pi}$ ist, mit $m_l = +l, \ldots, 0, \ldots, -l$. Analoges gilt für den Spinimpuls. Sein Zahlenwert ist $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\frac{h}{2\pi}$ und seine Projektion auf die Feldrichtung $\pm\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. Daraus folgt, daß die Impulse $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ nie parallel oder antiparallel gerichtet sind, sondern daß sich der Winkel zwischen ihnen von 0 und π unterscheidet. Spezielle Untersuchungen zeigen, daß folgende halbklassische Überlegungen angebracht sind: $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ werden nach der üblichen Parallelogrammregel addiert. Man erhält als Resultierende den Vektor $\mathfrak{j}$, das Gesamt-Impulsmoment. Da aber die

Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ durch die ihnen entsprechenden Magnetfelder verbunden sind, präzessieren sie um $\mathfrak{j}$ wie zwei mechanische Gyroskope, die durch einen elastischen Faden verbunden sind, und um die Richtung ihres unveränderlichen Gesamt-Impulsmoments präzessieren (Abb. 250).

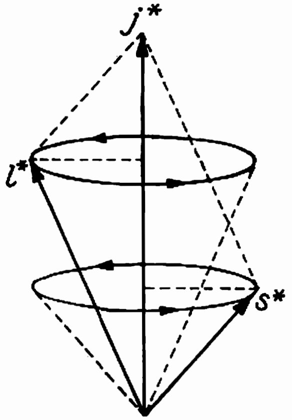


Abb. 250. Zum Vektormodell: Präzession der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ um den Vektor des Gesamtimpulsmoments $\mathfrak{j}$

In diese rein *klassische* Überlegung werden folgende, für die *Quanten*mechanik charakteristische Korrektionen aufgenommen. Erstens können die Winkel zwischen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ nicht beliebig sein, sie sind vielmehr durch die Forderung der räumlichen Quantelung von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ eingeschränkt. Der Vektor $\mathfrak{l}$ $\left(\text{vom Zahlenwert } \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}\right)$ kann mit $\mathfrak{j}$ nur solche Winkel bilden, daß seine Projektion auf die $\mathfrak{j}$-Richtung gleich $m_l \frac{h}{2\pi}$ ist, und der Vektor $\mathfrak{s}$ solche Winkel, daß seine Projektion auf die Feldrichtung $m_s \frac{h}{2\pi}$ wird, worin $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ist. Dadurch wird die Größe des Winkels $(\mathfrak{l}\mathfrak{s})$ auf eine Reihe diskreter Werte beschränkt. Zweitens ist das Gesamtimpulsmoment $\mathfrak{j}$ nicht gleich $j\,\frac{h}{2\pi}$, sondern $\sqrt{j(j+1)}\,\frac{h}{2\pi}$, wobei $j = l \pm \frac{1}{2}$ ist. Daher ist j die Quantenzahl des Gesamtimpulsmoments.

Diese Betrachtungsweise führt trotz ihrer offensichtlichen logischen Unvollkommenheit zu erstaunlich genauen Ergebnissen.

Unter Berücksichtigung des Gesagten können wir jetzt leicht $\cos(\mathfrak{l}\mathfrak{s})$ ausrechnen. Aus Abb. 250 finden wir nach dem bekannten Cosinussatz der Trigonometrie $\left[j^* = \sqrt{j(j+1)}\right]$

$$j^{*2} = l^{*2} + s^{*2} - 2l^*s^* \cos[\pi - (\mathfrak{l}\mathfrak{s})] = l^{*2} + s^{*2} + 2l^*s^* \cos(\mathfrak{l}\mathfrak{s})$$

und daraus

$$l^*s^* \cos(\mathfrak{l}\mathfrak{s}) = \frac{j^{*2} - l^{*2} - s^{*2}}{2} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}. \qquad (204{,}15)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (204,14) ein, so finden wir

$$\Delta E_{ls} = \frac{Ra^2hcZ^4}{n^3l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} \; \frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2}$$

und damit die Termkorrektur, die durch die Wechselwirkung Spin-Bahn bedingt ist:

$$\Delta T_{ls} = -\frac{\Delta E_{ls}}{hc} = -\frac{Ra^2Z^4}{n^3l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} \; \frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2}. \qquad (204{,}16)$$

Da j nach dem oben Dargelegten die Werte $l+\frac{1}{2}$ und $l-\frac{1}{2}$ annehmen kann, kann der zweite Faktor in (204,16) folgende beide Werte annehmen:

a) für $j = l + \frac{1}{2}$

$$\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2} = \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)-l^2-l-\frac{3}{4}}{2} = \frac{l}{2};$$

b) für $j = l - \frac{1}{2}$ finden wir analog

$$\frac{j(l+1)-l(j+1)-s(s+1)}{2} = -\frac{l+1}{2}.$$

Die entsprechenden Werte für ΔT_{ls} sind

$$\left.\begin{aligned} \Delta T_{ls} &= -\frac{Ra^2Z^4}{n^3 2\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} \quad \text{für } j = l+\frac{1}{2}, \\ \Delta T_{ls} &= \frac{Ra^2Z^4}{n^3 2l\left(l+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{für } j = l-\frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (204{,}17)$$

Um die gesamte Termkorrektur aufzufinden, muß man die Summe aus der relativistischen Korrektur ΔT_r nach Formel (204,1) und der Korrektur ΔT_{ls} nach (204,17) berechnen. Sie beträgt

a) für $j = l + \frac{1}{2}$

$$\Delta T = \Delta T_r + \Delta T_{ls} = \frac{Ra^2Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) - \frac{Ra^2Z^4}{2n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} = \frac{Ra^2Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{l+1} - \frac{3}{4n}\right);$$

b) für $j = l - \frac{1}{2}$ finden wir durch analoge Rechnung mit Hilfe der zweiten Formel (204,17)

$$\Delta T = \Delta T_r + \Delta T_{ls} = \frac{R\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{l} - \frac{3}{4n}\right)$$

Beide Formeln kann man vereinigen, wenn man beachtet, daß $j = l \pm \frac{1}{2}$ ist. Dann wird in beiden Fällen der Nenner des ersten Bruches in der Klammer $j + \frac{1}{2}$, und die ganze Formel hat dann die Form

$$\Delta T = \frac{R\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right). \tag{204,18}$$

Das ist die Feinstrukturformel, die wir am Anfang dieses Paragraphen angaben.

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß für s-Terme, für die j nur den einen Wert $\frac{1}{2}$ hat, die Korrektur auch nur einen Wert, und zwar

$$\Delta T = \frac{R\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(1 - \frac{3}{4n}\right)$$

besitzt. Daraus folgt, daß diese Korrektur die s-Terme nur verschiebt, sie jedoch nicht aufspaltet. Für die übrigen Terme $(p, d, f, \ldots)$ hat j je zwei Werte, $l \pm \frac{1}{2}$, und daher spaltet jedes diesen Termen entsprechende Niveau in zwei Unterniveaus auf. Da es ferner für die Hauptquantenzahl $n = 2$ zwei Niveaus, $2s$ und $2p$, gibt, für $n = 3$ drei Niveaus, $3s$, $3p$ und $3d$, usw., bewirkt die Aufspaltung für $n = 2$ das Auftreten dreier Unterniveaus (ein s-Term und zwei p-Terme), für $n = 3$ das Vorhandensein von fünf Unterniveaus, usw. Unter diesen Unterniveaus gibt es allerdings immer paarweise zusammenfallende. Bei ein und derselben Hauptquantenzahl und bei Nichtberücksichtigung der Feinstruktur hängen die Werte der Terme tatsächlich nur von der Hauptquantenzahl n und nicht von der Nebenquantenzahl l ab. Die Feinstrukturkorrekturformel wiederum hängt bei gegebenen n nur von j nicht aber von l ab. Da aber $j = l \pm \frac{1}{2}$ ist, hat z. B. für $n = 2$ j den Wert $\frac{1}{2}$ für s-Terme $(l = 0)$ und $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ für p-Terme $(l = 1)$; daher fallen für s-Terme und p-Terme die Unterniveaus $j = \frac{1}{2}$ zusammen. Genauso fallen für $n = 3$ die Unterniveaus $3p$, $j = \frac{3}{2}$, und $3d$, $j = \frac{3}{2}$, zusammen. Bei $n = 2$ (Grundterm der BALMER-Serie) erhält man also anstatt drei Unterniveaus nur zwei, für $n = 3$ anstatt fünf nur drei, usw. Weiter ist zu beachten, daß nach Formel (204,18) die Korrektur ΔT schnell mit steigender Hauptquantenzahl abnimmt (sie ist umgekehrt proportional zu n^3). Deswegen ist die Feinstruktur der Linien der BALMER-Serie praktisch durch die Duplizität des Grundniveaus $n = 2$ bestimmt.

In Abb. 251 ist die Struktur der He^+-Linie $\lambda = 4686$ Å wiedergegeben. Da nach Formel (204,18) die Aufspaltung Z^4 proportional ist, so ist im Falle des Heliums $(Z = 2)$ der Abstand zwischen den Komponenten 16 mal größer als beim Wasserstoff. Wie aus der Skizze ersicht-

lich, ist eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung vorhanden. Es gibt allerdings auch Abweichungen, die im nächsten Paragraphen behandelt werden sollen.

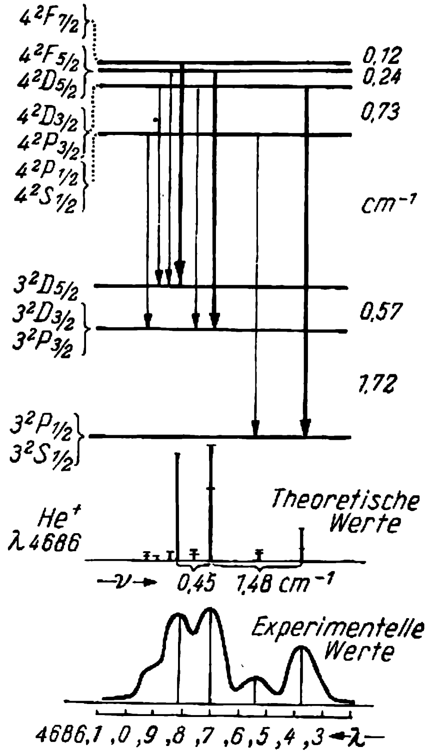


Abb. 251. Feinstruktur der Linie $\lambda = 4686$ Å des ionisierten Heliums Gegenüberstellung von Theorie und Beobachtung

§ 205. Verschiebung der Wasserstoff-Energieniveaus

Am Schluß des vorigen Paragraphen wurde erwähnt, daß gemäß Formel (204,18), die eine direkte Folgerung aus der Dirac-Gleichung ist, die Unterniveaus mit gleichen Quantenzahlen j und ein und derselben Hauptquantenzahl n zusammenfallen müssen. Der Hauptquantenzahl $n = 2$ (Grundterm der Balmer-Serie) entsprechen drei Unterniveaus, $2^2S_{\frac{1}{2}}$, $2^2P_{\frac{1}{2}}$ und $2^2P_{\frac{3}{2}}$ (bezüglich der Symbole siehe § 207). Zwei davon, nämlich $2^2S_{\frac{1}{2}}$ und $2^2P_{\frac{1}{2}}$, müssen zusammenfallen, da sie ein und dieselbe Quantenzahl $j = \frac{1}{2}$ haben. Der dritte Term $2^2P_{\frac{3}{2}}$ muß um 0,365 cm^{-1} höher liegen. Übergänge vom Niveau $n = 3$ nach $n = 2$ bedingen die Feinstruktur der roten H_α Linie der Balmer-Serie des Wasserstoffs. Die Struktur dieser Linie ist vielfach untersucht worden, die Ergebnisse der früheren Arbeiten widersprachen sich jedoch: ein Teil der Beobachter fand die Feinstrukturformel vollkommen bestätigt, andere deckten Abweichungen davon auf. Die Ursache dieser

Meinungsverschiedenheiten liegt in den experimentellen Schwierigkeiten der Erforschung der Beschaffenheit einer Gruppe sehr eng benachbarter und ziemlich breiter Linien, die sogar bei der Anwendung der feinsten optischen Verfahren auftreten. In den letzten Jahren (1947 bis 1950) wurden gänzlich neue Verfahren der sogenannten *Hochfrequenzspektroskopie* angewandt. Der Abstand zwischen den Unterniveaus mit der Hauptquantenzahl $n = 2$ liegt nicht mehr im optischen Gebiet, sondern in dem der Mikrowellen der Radiofrequenzen. So entspricht z. B. der Abstand zwischen den Unterniveaus $2^2P_{\frac{1}{2}}$ und $2^2P_{\frac{3}{2}}$ der Frequenz 10950 Megahertz (MHz) und der Wellenlänge $\lambda = 2{,}74$ cm. Die schon erwähnten Abweichungen von der Diracschen Formel, wie sie von einigen der früheren Forscher beobachtet wurden, bestanden in einer Verschiebung des Niveaus $2^2S_{\frac{1}{2}}$ gegen das Niveau $2^2P_{\frac{1}{2}}$ um 0,03 cm^{-1}. Diese Verschiebung entspricht einer Frequenz von ungefähr 1000 MHz, während bei dem heutigen hohen Stand der experimentellen Forschungstechnik auf dem Gebiete der Mikrowellen die Meßgenauigkeit bis auf 1 MHz gebracht werden kann, was für optische Verfahren vollkommen unerreichbar ist.

Lamb und Retherford wandten zur Aufdeckung der Verschiebung des Niveaus $2^2S_{\frac{1}{2}}$ folgende Methode an. Ein linearer Wasserstoffatomstrahl (siehe § 198) wurde einem Elektronenbeschuß ausgesetzt mit dem Ergebnis, daß ein Teil der Atome aus dem Grundzustand $1^2S_{\frac{1}{2}}$ in den angeregten $2^2S_{\frac{1}{2}}$ (Anregungsenergie 10,2 eV) überging. Der direkte, mit Strahlung verbundene Übergang aus diesem Zustand in den Grundzustand ist durch die Auswahlregel für die Quantenzahl l verboten, da diesem Übergang $\Delta l = 0$ entspricht, während nur Übergänge mit $\Delta l = \pm 1$ zugelassen sind (§ 193). Angeregte Atome verweilen also längere Zeit im Zustand $2^2S_{\frac{1}{2}}$ (sogenannte metastabile — relativ beständige — Atome; siehe § 235). Diesen Strom stark angeregter metastabiler Wasserstoffatome ließ man auf ein Wolframblech — den Detektor — fallen. Beim Auftreffen auf die Metallfläche gaben die Atome ihre Anregungsenergie an die Leitelektronen des Metalls ab, die dadurch einen Elektronenstrom bildeten. Die Stärke dieses Elektronenstroms war maßgebend für die Anzahl der auf das Blech auftreffenden metastabilen Atome.

Wird jedoch der Strom metastabiler Atome vor dem Auftreffen auf das Wolframblech der Wirkung des elektromagnetischen Feldes einer Radiofrequenzstrahlung unterworfen, so gehen unter dem Einfluß des Feldes bei passender Frequenz die metastabilen Atome in andere Zustände über. Fällt das Niveau $2^2S_{\frac{1}{2}}$ nicht mit dem Niveau $2^2P_{\frac{1}{2}}$ zusammen, sondern liegt um 0,03 cm^{-1} höher als dieses (was 1000 MHz entspricht), dann werden unter dem Einfluß des Feldes Übergänge zweierlei Art stattfinden. Bei einer Frequenz von ungefähr 10000 MHz ($10950 - 1000 \approx 10000$) gehen die Atome aus dem Zustand $2^2S_{\frac{1}{2}}$ in den Zustand $2^2P_{\frac{3}{2}}$ über, indem sie Energie aus dem Feld absorbieren; bei einer Frequenz von 1000 MHz gehen die metastabilen Atome $2^2S_{\frac{1}{2}}$ durch erzwungene Emission (negative Absorption, siehe Teil I, §§ 93 bis 94) in den Zustand $2^2P_{\frac{1}{2}}$ über.[1]) Aus den Zuständen $2P$ jedoch kehren die Atome so schnell in den Grundzustand zurück, daß sie noch vor Erreichen des Detektors ihre große überschüssige Energie verloren haben. Somit besteht die Wirkung elektromagnetischer Wellen im Auslöschen metastabiler Zustände, die Verminderung der Zahl metastabiler Atome aber macht sich durch das Fallen des Elektronenstroms im Detektor bemerkbar. Der Effekt ist bei Resonanz zwischen der Frequenz der Radiowellen und dem Abstand zwischen den Energieniveaus besonders ausgeprägt, so

[1]) Im Falle nicht zusammenfallender Niveaus $2^2S_{\frac{1}{2}}$ und $2^2P_{\frac{1}{2}}$ sind auch spontane Übergänge $2^2S_{\frac{1}{2}} \to 2^2P_{\frac{1}{2}}$ möglich. Da jedoch die Übergangswahrscheinlichkeit der 3. Potenz der Frequenz proportional ist, ist im Hinblick auf die Nähe der Niveaus die Wahrscheinlichkeit dieser Übergänge äußerst gering.

daß die Kurve der Abhängigkeit des Detektorstroms von der Radiofrequenz an Resonanzstellen Maxima aufweist.

Diese Maxima konnten tatsächlich beobachtet werden. Sie ermöglichten die Feststellung, daß

a) der Abstand zwischen den Unterniveaus $2^2P_{\frac{1}{2}}$ und $2^2P_{\frac{3}{2}}$ gerade 0,365 cm^{-1} beträgt, *wie es die* DIRAC-*Formel verlangt*;

b) das Niveau $2^2S_{\frac{1}{2}}$ gegen das Niveau $2^2P_{\frac{1}{2}}$ *im Gegensatz zur* DIRAC-*Formel*, nach der beide Niveaus zusammenfallen sollten, verschoben ist.

Diese Untersuchungsergebnisse fanden große Beachtung. Das Interesse daran ist durchaus verständlich, da das Problem mit der Frage nach den Eigenschaften der Elementarteilchen, zu denen das Elektron gehört, eng verbunden ist. Heute kann der Grund der *Verschiebung* als geklärt angesehen werden. Die theoretische Deutung würde jedoch weit über den Rahmen dieses Buches hinausgehen und kann darum hier nicht angegeben werden. Wir verweisen unsere Leser in der Fußnote auf einige Artikel, die sich mit dieser Frage beschäftigen[1]) und beschränken uns auf einige Bemerkungen.

Nach den heutigen Vorstellungen ist das physikalische „Vakuum" durchaus kein leerer geometrischer Raum, sondern vielmehr ein Raum, der mit bestimmten physikalischen Eigenschaften ausgestattet ist. So existieren im Vakuum „Nullpunktschwingungen" eines Feldes, die den Nullpunktschwingungen des linearen Oszillators analog sind. Diese Nullpunktschwingungen verursachen durch ihre Einwirkung auf das Elektron, daß dieses um eine gewisse mittlere Lage schwingt, wodurch sich seine mittlere potentielle Energie etwas verändert, was wiederum zu einer Niveauverschiebung führt.

Die Frage nach der Ursache der *Verschiebung* der Energieniveaus der Elektronen gehört zu den Fundamentalproblemen der Struktur des Elektrons, wie der Entstehung seiner Masse, der Natur des Feldes u. a. m. Alle diese Probleme gehen über den Rahmen der *Quantenmechanik* hinaus und sind Gegenstand der *Quanten-Elektrodynamik*, einem Gebiet, das sich erst am Anfang seiner Entwicklung befindet und auf dessen Wege vorläufig noch außerordentlich große Schwierigkeiten zu überwinden sind. Einige Vorstellung aus diesem Bereich erhält der Leser aus den in der Fußnote zu diesem Paragraphen angegebenen Artikeln.

§ 206. Die Dubletts der Alkalimetalle

Die in § 204 entwickelte Feinstrukturformel kann für den Fall der Alkalimetalle verallgemeinert werden. In § 185 sahen wir, daß die Spektren der Alkalimetalle mit dem Modell des Leuchtelektrons gedeutet werden können. Dabei zeigt sich die Störwirkung des „Atomrumpfs", der aus den übrigen $Z - 1$ Elektronen besteht, dadurch, daß die Terme nicht durch die BALMER-Formel $\frac{R}{n^2}$, sondern durch die RYDBERG-Formel $\frac{R}{(n-\sigma)^2} \equiv \frac{R}{n^{*2}}$ wiedergegeben werden. n^* ist die effektive Hauptquantenzahl. Schreibt man diese Formel in der Form $\frac{RZ_{\text{eff}}^2}{(n-\sigma)^2}$, so ist sie nicht nur für die neutralen Atome der Alkalimetalle ($Z_{\text{eff}} = 1$),

[1]) Siehe den Artikel von J. A. SMORODINSKI (Я. А. Смородинский: *Успехи физических наук*, т. XXXIX, 325, 1949) und auch den leichter verständlichen Aufsatz von F. WEISSKOPF (Ф. Вейскопф, *Успехи физических наук*, т. XLI, 165, 1950, Übers. aus Rev. Mod. Phys. 21, 1949, S. 305); desgleichen auch die unter der Redaktion von D. D. IWANENKO herausgegebene Artikelfolge: Сдвиг уровней атомных электронов, МЛ. 1950, oder D. IWANENKO, A. SOKOLOW, „Klassische Feldtheorie", Deutsche Ausgabe, Akademische Verlagsgesellschaft, Berlin 1953. (Д. Иваненко, А. Соколов: Классическая теория поля, Гостехиздат, 1949).

sondern auch für die Ionen mit einem Valenzelektron, z. B. Mg^+ ($Z_{eff} = 2$), Al^{++} ($Z_{eff} = 3$) usw. gültig. Weiter kann man die Korrektur anstatt im Nenner des BALMER-Terms mit demselben Erfolg auch im Zähler anbringen und statt der RYDBERG-Formel $\frac{RZ^2_{eff}}{(n-\sigma)^2}$ $\frac{R(Z-a)^2}{n^2}$ schreiben, worin n ebenso wie in der BALMER-Formel die Hauptquantenzahl ist. In dieser Gestalt wandten wir die Formel schon auf Röntgenterme im ersten Teil, § 37, an. Die Korrektur a hat einen klaren physikalischen Sinn: $(Z - a)$ ist die „effektive" Kernladung, und die Größe a charakterisiert demnach die Abschirmung der Kernladung durch die Rumpfelektronen. Diesen Hinweis kann man zur halbempirischen Verallgemeinerung der Feinstrukturformel für Alkalimetalle und ihnen äquivalenter Ionen benutzen. Die Feinstrukturformel (204,18) bekommt damit die Form

$$\Delta T = \frac{Ra^2 (Z-a)^4}{n^3} \left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right).$$

Hier erhält man nicht mehr zusammenfallende Unterniveaus, da schon die Terme s, p, d voneinander verschieden sind. Entsprechend den zwei möglichen Werten $j = l \pm \frac{1}{2}$ liefert jeder Term zwei Unterniveaus, die die Dublettstruktur der Spektrallinien der Alkalimetalle bedingen.

§ 207. Die Quantenzahl des Gesamtimpulsmoments

Das Wesentliche bei der Herleitung der Feinstrukturformel war, wie wir in § 204 sahen, die Addition der Impulsmomentvektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$. Diese Addition erfolgte nach den Regeln der Vektorrechnung unter Berücksichtigung der Quantelung der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ und ihrer Projektionen l_z und s_z auf die Feldrichtung. Der dadurch erhaltene Vektor $\mathfrak{j}$ stellt das Gesamtimpulsmoment des Atoms dar; sein Zahlenwert ist nach den üblichen Gesetzen der Quantenmechanik

$$|\mathfrak{j}| = \sqrt{j(j+1)} \frac{h}{2\pi} \equiv j^* \frac{h}{2\pi},$$

und die ihm entsprechende Quantenzahl j hat für jedes l die beiden Werte $l \pm \frac{1}{2}$.

Die Projektion des Vektors $\mathfrak{j}$ auf die Feldrichtung, j_z, ist gleich

$$j_z = m \frac{h}{2\pi},$$

wobei m gerade $2j + 1$ Werte annehmen kann: $j, j-1, \ldots, -j$. Das auf diesen Überlegungen basierende sogenannte Vektormodell des Atoms hat überragende praktische Bedeutung für die Spektroskopie. Es ermöglicht nicht nur die Deutung der Feinstruktur des Spektrums, sondern auch aller Details komplizierterer Linienaufspaltungen im Magnetfeld (anomaler ZEEMAN-Effekt) in erstaunlich guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

Wie wir im folgenden Kapitel sehen, läßt sich das Vektormodell für den Fall mehrerer Elektronen verallgemeinern, so daß sich auch die Besonderheiten derartiger Spektren erklären lassen.

Die Berücksichtigung des Elektronenspins forderte die Einführung einer neuen Quantenzahl zu den drei bisher von uns angewandten (n, l, m). Als diese vierte Quantenzahl wählen wir j, da das Gesamtimpulsmoment $\mathfrak{j}$ in Abwesenheit eines Feldes eine Bewegungskonstante ist.

Da $j = l \pm \frac{1}{2}$ und l eine ganze Zahl ist, hat j für Atome mit einem Valenzelektron halbzahlige Werte: für $l = 0$ ist $j = \frac{1}{2}$; für $l = 1$ ist $j = \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$; für $l = 2$ ist $j = \frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$; usw.

In der Spektroskopie ist es üblich, die verschiedenen Energiezustände der einzelnen Elektronen und des gesamten Atoms durch besondere Symbole zu kennzeichnen, aus denen alle Quantenzahlen ersichtlich sind. Für die einzelnen Elektronen wird die Hauptquantenzahl durch einen Zahlenkoeffizienten, die Quantenzahl des Bahnmoments durch einen diesem folgenden Buchstaben, $s, p, d, f, \ldots$ nach dem uns gut bekannten Schema, und die Quantenzahl j schließlich durch einen Index rechts unten bezeichnet. So bedeutet das Symbol $3s_{\frac{1}{2}}$ z. B. einen Energiezustand des Elektrons, in dem $n = 3$, $l = 0$ und $j = \frac{1}{2}$ ist.

Für Atome mit einem Leuchtelektron, d. h. für wasserstoffähnliche Atome und Atome der ersten Gruppe des Periodischen Systems, fallen die Energiezustände des Leuchtelektrons mit denen des Atoms zusammen. Nichtsdestoweniger ist es üblich, die Terme des Atoms statt mit kleinen Buchstaben mit großen, $S, P, D, F, \ldots$, zu bezeichnen. Die Quantenzahl j ist ebenso wie beim einzelnen Elektron durch einen Index rechts unten gegeben. Die kleine Ziffer links oben gibt die Multiplizität des Terms an, z. B. $^2P_{\frac{3}{2}}$, gelesen „Dublett P".

Die Angabe der Hauptquantenzahl eines Atoms mit mehreren Elektronen ist im allgemeinen nicht möglich, da die verschiedenen Elektronen unterschiedliche kleinste Hauptquantenzahlen haben können (z. B. haben von den drei Elektronen des Lithiums im Grundzustand zwei $n = 1$, das dritte jedoch $n = 2$). Für Atome mit einem Leuchtelektron wird mitunter die Hauptquantenzahl dieses Elektrons im Termsymbol des ganzen Atoms angegeben, z. B. $2^2S_{\frac{1}{2}}$. Hierzu sei noch erwähnt, daß, obwohl die S-Terme immer einfach sind, ihre Zugehörigkeit zum Dublettsystem der Niveaus ebenso wie bei den übrigen Termen gekennzeichnet wird.

Tabelle XXVII

	$j = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
$l = 0$	$^2S_{\frac{1}{2}}$			
1	$^2P_{\frac{1}{2}}$	$^2P_{\frac{3}{2}}$		
2		$^2D_{\frac{3}{2}}$	$^2D_{\frac{5}{2}}$	
3			$^2F_{\frac{5}{2}}$	$^2F_{\frac{7}{2}}$

Nach diesen Erläuterungen wird die Tabelle XXVII der Energiezustände der Atome mit einem Leuchtelektron ohne weiteres verständlich sein.

In § 193 haben wir festgestellt, daß Übergänge zwischen verschiedenen Termsystemen durch die Auswahlregel für l

$$\Delta l = \pm 1$$

beschränkt sind. Man muß aber bei der Aufstellung der möglichen Übergänge auch auf die Änderung der Quantenzahl j achten.

An Hand einer Analyse der Spektren wurde festgestellt, daß Übergänge nur zwischen solchen Zuständen stattfinden, bei denen j entweder ein und denselben Wert hat oder sich um ± 1 ändert:

$$\Delta j = 0, \ \pm 1. \tag{207,1}$$

Diese Regel resultiert aus folgenden Überlegungen: Da $j = l \pm s$ ist, muß $\Delta j = \Delta l \pm \Delta s$ sein. Im nächsten Kapitel wird an Hand ganz allgemeiner Betrachtungen (basierend auf dem sogenannten PAULI-Prinzip) gezeigt, daß die Änderung der Spinquantenzahl durch die Forderung $\Delta s = 0$ eingeschränkt ist. Anderseits existiert für l die Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$. So finden wir für j die Auswahlregel

$$\Delta j = \pm 1.$$

Es zeigt sich aber, daß auch Übergänge mit $\Delta j = 0$ vorkommen. Das ist aus folgendem ersichtlich: Wir nehmen an, daß ein Übergang einer Änderung $\Delta l = \pm 1$ entspricht. Durch eine Lageänderung von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ bleibe aber $\mathfrak{j}$ unverändert. Da die Forderungen $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta s = 0$ dabei erfüllt sind, haben wir als zweite Auswahlregel für j:

$$\Delta j = 0.$$

Somit sind also nur solche Übergänge möglich, bei denen

$$\Delta j = 0, \ \pm 1$$

ist.

Wir greifen jetzt ein typisches Beispiel für die Anwendung dieser Auswahlregeln heraus und betrachten das sogenannte „komplizierte" Dublett der ersten Nebenserie. Aus der Formel dieser Serie

$$\nu = 2p - md \quad (m = 3, 4, \ldots)$$

ist ersichtlich, daß sie durch Übergänge zwischen p $(l = 1)$- und d $(l = 2)$-Termen zustande kommt. Jeder dieser Terme der einen sowie der anderen Gruppe ist aber ein Doppelterm. So gilt für die p-Terme

$$j = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad j = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

und für die d-Terme

$$j = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{und} \quad j = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Sowohl in dem höheren als auch in dem niedrigeren Zustande finden wir also zwei Unterniveaus, und man könnte denken, daß vier Linien zu beobachten sind. Tatsächlich treten

aber nur drei Linien auf, wie sie auf dem Schema (unterer Teil der Abb. 252) gezeigt sind: zwei starke und eine schwache. Die vierte Linie, die in dem Schema punktiert gezeichnet ist, erscheint nicht. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, würde sie durch einen Übergang entstehen, bei dem sich j um $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=2$ ändert. Ein derartiger Übergang ist jedoch nach der Auswahlregel $j=0, \pm 1$ verboten, die Linie tritt daher nicht auf.

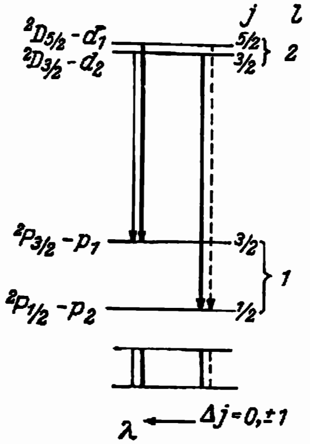


Abb. 252. Veranschaulichung der Auswahlregel für j am Beispiel des komplizierten Dubletts der ersten Nebenserie

§ 208. Der anomale ZEEMAN-Effekt

Alle Atome mit einem Leuchtelektron, also H, He^{+}, Li^{++}, Be^{+++}, usw. ebenso wie die neutralen Atome der ersten Gruppe des Periodischen Systems zeigen in einem schwachen Magnetfeld den anomalen oder zusammengesetzten ZEEMAN-Effekt. Beim normalen oder einfachen ZEEMAN-Effekt (Teil I, § 73) erscheinen bekanntlich drei Linien bei Beobachtung senkrecht zur Feldrichtung und zwei bei Beobachtung in Richtung des Feldes. Die Größe der Aufspaltung beim normalen ZEEMAN-Effekt ist durch die LORENTZ-Formel

$$\Delta\nu = \frac{e}{4\pi\mu c^2}\,|H|\,\mathrm{cm}^{-1} = 14{,}67\cdot 10^{-6}\,|H|\,\mathrm{cm}^{-1} \tag{208,1}$$

gegeben. Das Experiment zeigte, daß nur Linien ohne Feinstruktur (sogenannte Singuletts) eine solche Aufspaltung ergeben. Dubletts und Linien mit komplizierterer Aufspaltung (Tripletts usw.) dagegen zeigen den anomalen ZEEMAN-Effekt. Die Zahl der Komponenten ist größer und dabei gerade, außerdem ist die Größe der Aufspaltung nicht gleich der normalen LORENTZ-Aufspaltung.

Auf Abb. 253 sind drei Beispiele für den ZEEMAN-Effekt dargestellt: an einer einfachen Zinklinie der normale Effekt, am Natriumdublett der anomale Effekt (10 Komponenten), am Zinktriplett ebenfalls der anomale Effekt (18 Komponenten). Für die Größe der Aufspaltung beim anomalen Effekt gilt das bemerkenswerte Gesetz: *Die Größe der Aufspaltung*

beim anomalen ZEEMAN-*Effekt ist immer ein rationaler Bruch der normalen* LORENTZ-*Aufspaltung.* Drückt man die normale Aufspaltung (208,1) durch ν_L aus, so sind z. B. die Aufspaltungskomponenten der Hauptserie die folgenden:

$$^2S_{\frac{1}{2}} - {}^2P_{\frac{1}{2}}: \quad \pm\frac{2}{3}\nu_L, \quad \pm\frac{4}{3}\nu_L;$$

$$^2S_{\frac{1}{2}} - {}^2P_{\frac{3}{2}}: \quad \pm\frac{1}{3}\nu_L, \quad \pm\frac{3}{3}\nu_L, \quad \pm\frac{5}{3}\nu_L.$$

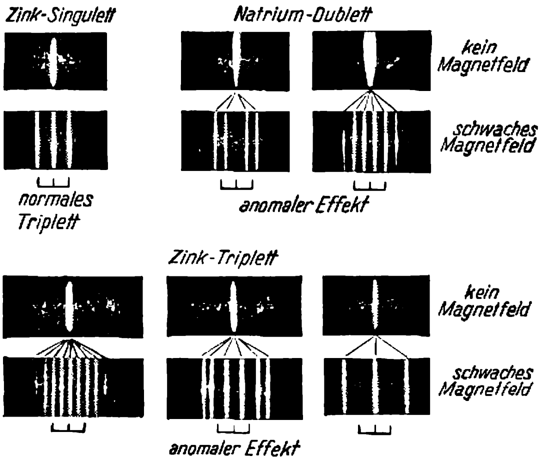


Abb. 253. Normaler und anomaler ZEEMAN-Effekt bei Beobachtung senkrecht zur Feldrichtung

Man sieht, daß der Nenner des Bruchs immer gleich 3 ist. Für die Aufspaltung des Tripletts der Hauptserie (z. B. des Zinktripletts in Abb. 253) ist der charakteristische Nenner 2, die Aufspaltungen sind dabei solche Brüche wie $\frac{1}{2}\nu_L$, $\frac{2}{2}\nu_L$ ($=\nu_L$), $\frac{3}{2}\nu_L$ usw.

§ 209. Theorie des anomalen ZEEMAN-Effekts. Schwaches Feld

Das Vektormodell erlaubt es, den Grund für das Auftreten des anomalen ZEEMAN-Effekts und aller seiner Besonderheiten zu deuten. Wir betrachten das Verhalten eines Atoms mit einem Valenzelektron im Magnetfeld. Wie wir schon in § 204 sahen, führen bei Abwesenheit eines Feldes die Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ infolge der zwischen ihnen stattfindenden magnetischen Wechselwirkung eine Präzession um die Richtung des Gesamtimpulsmoments $\mathfrak{j}$ aus. Bringt man ein solches Atom in ein Magnetfeld, so unterscheiden sich die auftretenden Erscheinungen je nachdem, ob es sich um ein starkes oder schwaches Feld handelt. Dabei sind die Begriffe „stark" und „schwach" in diesem Falle folgendermaßen definiert: Ist die durch das Feld hervorgerufene ZEEMAN-Aufspaltung klein im Vergleich zur natürlichen Multiplettaufspaltung, so bezeichnet man das Feld als schwach. Aus dieser Definition folgt, daß die zahlenmäßige Stärke eines „schwachen" Feldes in den verschiedenen Fällen sehr unterschiedlich sein kann. So ist z. B. für Wasserstofflinien infolge ihrer geringen Multiplett-

aufspaltung ein Feld von 8000 Oersted schon stark, während für Lithium erst ein Feld von mindestens 50000 Oersted als stark gelten kann.

Zunächst wollen wir die Wirkung eines schwachen Feldes betrachten. In diesem Falle ist die Wechselwirkung der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ untereinander beträchtlich größer als deren Wechselwirkung mit dem Feld. Es ist daher unzweckmäßig, $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ getrennt zu behandeln. Wir haben vielmehr ihre Summe, den Vektor $\mathfrak{j}$, zu betrachten. In einem äußeren Magnetfeld ist $\mathfrak{j}^2$, d. h. der Zahlenwert des Impulsmoments, eine Bewegungskonstante, der Vektor $\mathfrak{j}$ hingegen nicht, da seine Richtung wechselt. Mit dem mechanischen Moment $\mathfrak{j}$ ist ja ein diesem entsprechendes *magnetisches* Moment verknüpft, durch welches sich das Atom in einem äußeren Feld wie ein Kreisel und wie ein Magnet verhält. Das äußere Feld versucht, den Atom-Magneten in seiner Längsrichtung einzustellen, die Kreiseleigenschaft des Atoms verhindert dies jedoch. Da andererseits der Zahlenwert $|\mathfrak{j}|$ und seine Projektion auf die Feldrichtung (d. h. der Winkel zwischen $\mathfrak{j}$ und der Feldrichtung) erhalten bleiben, so ist die einzige Bewegung, die das Atom ausführen kann, die Präzession. Wegen der relativen Schwäche des äußeren Feldes $\mathfrak{H}$ gegenüber dem inneren Feld, das $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ aneinander koppelt, ist die Winkelfrequenz der Präzession von $\mathfrak{j}$ um die Richtung des Feldes $\mathfrak{H}$ wesentlich kleiner als die Winkelfrequenz der inneren Präzession von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ um $\mathfrak{j}$.

Die zusätzliche Energie, die das Atom im Feld erlangt, ist die potentielle Energie eines magnetischen Dipols mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{M}_j$ im Felde $\mathfrak{H}$, sie ist also gleich $-(\mathfrak{M}_j\mathfrak{H})$. Diese Zusatzenergie ist als kleine Störung anzusehen, demzufolge die entsprechende Änderung der Energieniveaus gleich dem Mittelwert $-\overline{(\mathfrak{M}_j\mathfrak{H})}$ ist, was von uns zu berechnen sein wird. Da sich weder die Feldstärke $\mathfrak{H}$ noch der Winkel zwischen $\mathfrak{M}_j$ und $\mathfrak{H}$ ändern, ist der Mittelwert $\overline{\mathfrak{M}_j}$ für den ungestörten Zustand, d. h. unter der Annahme, daß kein äußeres Feld vorhanden ist, zu berechnen.

Zu diesem Zweck bilden wir zunächst die entsprechenden Vektorsummen, wobei wir zur Vereinfachung der Zeichnung die Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{M}_l$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{M}_s$ in eine Richtung legen,

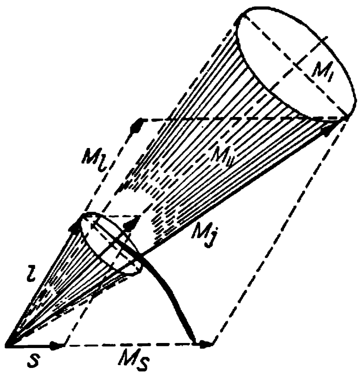


Abb. 254

obwohl die Vektoren der magnetischen Bahn- und Spin-Momente wegen des negativen Vorzeichens der Elektronenladung den entsprechenden Vektoren des mechanischen Moments entgegengerichtet sind. In Abb. 254 ist das von uns zu benutzende Vektormodell dargestellt: Die Addition der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ ergibt den Vektor $\mathfrak{j}$. Die

Vektoren $\mathfrak{M}_l$ und $\mathfrak{M}_s$ sind aus dem erwähnten Grunde entsprechend den Richtungen der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ gezeichnet. Die Richtung des Vektors $\mathfrak{M}_j$ fällt jedoch nicht mit der Richtung $\mathfrak{j}$ zusammen. Der Grund dafür liegt darin, daß die Verhältnisse $\frac{|\mathfrak{M}_l|}{|\mathfrak{l}|}$ und $\frac{|\mathfrak{M}_s|}{|\mathfrak{s}|}$ nicht einander gleich sind; der zweite Bruch ist vielmehr doppelt so groß wie der erste:

$$\frac{|\mathfrak{M}_l|}{|\mathfrak{l}|} = \frac{e}{2\mu c}, \quad \frac{|\mathfrak{M}_s|}{|\mathfrak{s}|} = 2\frac{e}{2\mu c}.$$

Da wir den Mittelwert von $\mathfrak{M}_j$ *ohne* äußeres Feld und damit unter der Bedingung, daß die Richtung des Gesamtimpulsmoments j konstant ist, berechnen, nimmt die Präzession von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ um die $\mathfrak{j}$-Richtung auch den Vektor $\mathfrak{M}_j$ mit. Er muß auch um diese Richtung präzessieren (genauer gesagt, um seine Verlängerung).

Wir zerlegen jetzt den Vektor $\mathfrak{M}_j$ in seine Komponenten parallel und senkrecht zu $\mathfrak{j}$ und bezeichnen diese mit $M_{||}$ und $M_{\perp}$. Der Mittelwert von $\mathfrak{M}_j$ ist gleich der Summe der Mittelwerte $\overline{M}_{||} + \overline{M}_{\perp}$. Wegen der Konstanz des Winkels zwischen $\mathfrak{M}_j$ und $\mathfrak{j}$ ist der Mittelwert $\overline{M}_{||}$ einfach gleich $M_{||}$ und der Mittelwert $\overline{M}_{\perp}$ für ein Zeitintervall, das groß gegen die Periode der schnellen inneren Präzession ist, gleich Null, da wegen der Präzession von $\mathfrak{M}_j$ für jeden Wert $M_{\perp}$ im Verlauf dieses Zeitraums ein gleich großer Wert entgegengesetzten Vorzeichens existiert. Somit ist also

$$\overline{M}_j = M_{||},$$

und unser Problem ist auf die Berechnung von $M_{||}$ zurückgeführt.

Aus Abb. 254 ist ersichtlich, daß

$$M_{||} = M_l \cos(\mathfrak{l}\mathfrak{j}) + M_s \cos(\mathfrak{s}\mathfrak{j}) = \frac{e}{2\mu c}\frac{h}{2\pi}\left\{l^* \cos(\mathfrak{l}\mathfrak{j}) + 2s^* \cos(\mathfrak{s}\mathfrak{j})\right\} \tag{209,1}$$

ist. Die Größe des Cosinus ist ebenso wie bei der Berechnung des $\cos(\mathfrak{l}\mathfrak{s})$ (siehe Abb. 250) aus dem Cosinussatz der Trigonometrie zu bestimmen:

$$\cos(\mathfrak{l}\mathfrak{j}) = \frac{l^{*2} + j^{*2} - s^{*2}}{2l^* j^*}, \quad \cos(\mathfrak{s}\mathfrak{j}) = \frac{s^{*2} + j^{*2} - l^{*2}}{2s^* j^*}.$$

Setzen wir diese Werte in (209,1) ein, so erhalten wir

$$M_{||} = \frac{e}{2\mu c}\frac{h}{2\pi}\frac{3j^{*2} + s^{*2} - l^{*2}}{2j^*} = \frac{eh}{4\pi\mu c} j^* \frac{3j^{*2} + s^{*2} - l^{*2}}{2j^{*2}} = \frac{eh}{4\pi\mu c} g j^*, \tag{209,2}$$

worin die Bezeichnung

$$g = \frac{3j^{*2} + s^{*2} - l^{*2}}{2j^{*2}} = 1 + \frac{j^{*2} + s^{*2} - l^{*2}}{2j^{*2}}$$

eingeführt wurde. Ersetzen wir l^*, s^*, j^* durch ihre Werte, so ergibt sich

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \tag{209,3}$$

Somit ist schließlich

$$\overline{M_{j^*}} = M_{||} = gj^* M_0 = g\sqrt{j(j+1)}\, M_0, \tag{209,4}$$

worin M_0 das BOHRsche Magneton ist. Wir sehen, daß in der Formel (209,4) ein neuer Faktor g, der durch (209,3) gegeben ist, auftritt. Dieser Faktor, der sogenannte LANDÉ-Faktor, spielt in der Theorie des anomalen ZEEMAN-Effekts eine entscheidende Rolle.

Der LANDÉ-Faktor läßt sich für alle Zustände der Einelektronenatome $\left(s \text{ immer gleich } \frac{1}{2}\right)$ vorausberechnen. Die nachstehende Tabelle von g-Werten wird uns später nützlich sein.

Tabelle XXVIII

Der LANDÉ-Faktor für Atome mit einem Leuchtelektron

		$j = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
^2S	$l = 0$	2			
^2P	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$		
^2D	2		$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	
^2F	3			$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{7}$

Wir wenden uns nun der Berechnung der Änderung der Energieniveaus unter der Wirkung eines äußeren Feldes $\mathfrak{H}$ zu. Nach dem Gesagten ist

$$\Delta E = -(\mathfrak{M}_j \mathfrak{H}) = -M_{||}|\mathfrak{H}|\cos(\mathfrak{j}\mathfrak{H}) = g\,\frac{eh}{4\pi\mu c}|\mathfrak{H}|\, j^* \cos(\mathfrak{j}\mathfrak{H}) = gM_0|\mathfrak{H}|\, j^* \cos(\mathfrak{j}\mathfrak{H}). \tag{209,5}$$

Diese Niveauänderung hat gequantelte Werte, da infolge der räumlichen Quantelung das Produkt $j^* \cos(\mathfrak{j}\mathfrak{H})$, das gleich der magnetischen Quantenzahl m ist, nur diskrete Werte

$$m = j,\quad (j-1),\quad \ldots,\quad -(j-1),\quad -j, \tag{209,6}$$

insgesamt $2j + 1$, annehmen kann. Die Niveauänderung in einem äußeren Magnetfeld ist also gleich

$$\Delta E = gmM_0|\mathfrak{H}|. \tag{209,7}$$

Unter Beachtung von (209,6) sehen wir, daß im Magnetfeld jedes Energieniveau in $2j + 1$ eng benachbarte Niveaus zerfällt. So spaltet das Niveau $^2S_{\frac{1}{2}}$ in zwei Unterniveaus auf, das Niveau $^2P_{\frac{1}{2}}$ ebenfalls in zwei, das Niveau $^2P_{\frac{3}{2}}$ in vier, usw.

Wir berechnen jetzt die im Magnetfeld ausgestrahlten Frequenzen. Nach der Frequenzbedingung muß sein

$$h(\nu + \Delta\nu) = (E_1 + \Delta E_1) - (E_2 + \Delta E_2).$$

Beachten wir, daß $E_1 - E_2 = h\nu$ ist, worin ν die Frequenz ohne Feld darstellt, so erhalten wir

$$h\Delta\nu = \Delta E_1 - \Delta E_2 = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\, M_0|\mathfrak{H}| = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\,\frac{eh}{4\pi\mu c}|\mathfrak{H}|.$$

Zur Angabe von $\Delta\nu$ in cm^{-1} dividieren wir durch hc:

$$\Delta\nu = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\,\frac{e}{4\pi\mu c^2}\,|\mathfrak{H}|\,.$$

Nehmen wir als Einheit der Aufspaltung die normale LORENTZ-Aufspaltung

$$\nu_L = \frac{e}{4\pi\mu c^2}\,|\mathfrak{H}|\ \mathrm{cm}^{-1}$$

an, dann ist in diesen Einheiten

$$\Delta\nu = m_1 g_1 - m_2 g_2\,. \qquad (209{,}8)$$

Das aber ist die Aufspaltungsformel des anomalen ZEEMAN-Effekts.

Bei Berechnung der Aufspaltung nach Formel (209,8) ist zu berücksichtigen, daß wir nicht zwei beliebige Unterniveaus miteinander kombinieren dürfen: Die Übergangsmöglichkeiten sind durch die Auswahlregel für die magnetische Quantenzahl, $\Delta m = 0, \pm 1$, eingeschränkt (§ 193). Zur Veranschaulichung berechnen wir die Aufspaltung des Dubletts am oberen Ende der Hauptserie des Natriums (der D-Linie), das aus den Linien

$$\lambda = 5895{,}930\ \text{Å}\,,\quad {}^2P_{\frac{1}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}\,,$$

$$\lambda = 5889{,}963\ \text{Å}\,,\quad {}^2P_{\frac{3}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$$

besteht. Zunächst finden wir die Aufspaltung der einzelnen Niveaus, d. h. die Werte der Produkte mg, danach berechnen wir die Differenzen $m_1 g_1 - m_2 g_2$ für die Übergänge, die die Auswahlregeln $\Delta m = 0, \pm 1$ erfüllen. Die Werte für den LANDÉ-Faktor entnehmen wir der Tabelle XXVIII. Die berechneten Werte von mg sind in Tabelle XXIX wiedergegeben.

Tabelle XXIX

${}^2S_{\frac{1}{2}}$		$l = 0$,	$j = \frac{1}{2}$,	$g = 2$
$m =$	$+\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$
$mg =$	$+1$			-1
${}^2P_{\frac{1}{2}}$		$l = 1$,	$j = \frac{1}{2}$,	$g = \frac{2}{3}$
$m =$	$+\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$
$mg =$	$+\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{3}$
${}^2P_{\frac{3}{2}}$		$l = 1$,	$j = \frac{3}{2}$,	$g = \frac{4}{3}$
$m =$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$mg =$	$+\frac{6}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{6}{3}$

Nun kann man die Linienaufspaltung[1]) ermitteln.

1. Linie D_1: $^2P_{\frac{1}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$, $\lambda = 5895{,}930$ Å

$$\begin{array}{ll}
\text{Anfangszustand} & \left\{\begin{array}{l} m = +\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} \\ mg = +\frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{3} \end{array}\right. \\
 & \qquad\quad \swarrow\!\!\searrow \\
\text{Endzustand} & mg = +1 \qquad -1 \\
\hline
\text{Aufspaltung} & \Delta\nu = +\frac{4}{3},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{4}{3}.
\end{array}$$

Dies wird oft kürzer in der folgenden Form dargestellt:

$$\Delta\nu = \frac{+4,\ +2,\ -2,\ -4}{3}.$$

2. Linie D_2: $^2P_{\frac{3}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$, $\lambda = 5889{,}963$ Å

$$\begin{array}{ll}
\text{Anfangszustand} & \left\{\begin{array}{l} m = +\frac{3}{2},\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2} \\ mg = +\frac{6}{3},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{6}{3} \end{array}\right. \\
 & \qquad \searrow\ \downarrow\ \swarrow\!\!\searrow\ \downarrow\ \swarrow \\
\text{Endzustand} & \qquad\quad +1 \qquad -1 \\
\hline
\text{Aufspaltung} & \Delta\nu = \frac{+5,\ +3,\ +1,\ -1,\ -3,\ -5}{3}.
\end{array}$$

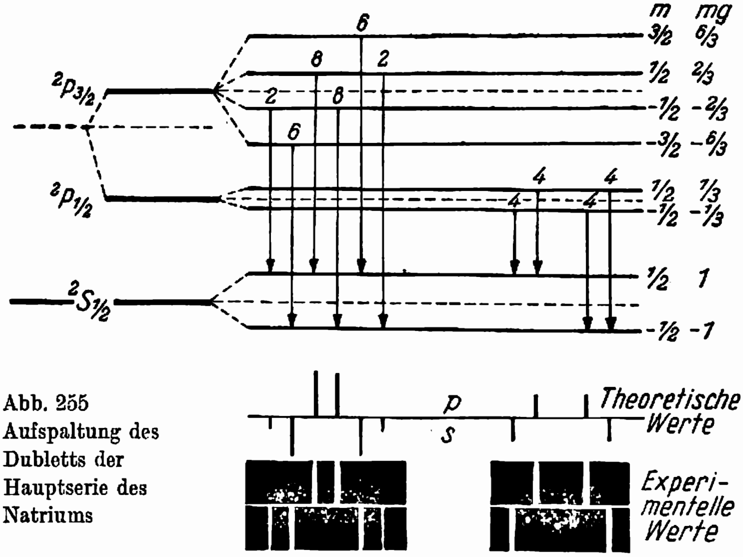


Abb. 255 Aufspaltung des Dubletts der Hauptserie des Natriums

[1]) Durch die Pfeile sind die Übergänge, die die Auswahlregeln befriedigen, gekennzeichnet.

Wie wir sehen, ergeben beide Linien $4 + 6 = 10$ Komponenten. Auf Abb. 255 sind die Niveauschemata und ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment wiedergegeben.

§ 210. Theorie des anomalen Zeeman-Effekts. Starkes Feld

Im Jahre 1912 entdeckten Paschen und Back eine interessante und wichtige Erscheinung. Es zeigte sich, daß in sehr starken Feldern der anomale Zeeman-Effekt wieder zum normalen wird: Das komplizierte Bild der Aufspaltungen geht in das normale Lorentz-Triplett über. Diese Erscheinung wird magnetooptische Umwandlung oder Paschen-Back-Effekt genannt. Auch dafür gibt das Vektormodell eine sehr einfache Erklärung.

Stark nennen wir in diesem Falle ein Feld, das eine Aufspaltung hervorruft, die die natürliche Multiplettaufspaltung beträchtlich übertrifft (siehe § 209). Es ist leicht zu sehen, daß wir die Größe der Aufspaltung ohne weiteres als Maß der Wechselwirkungsenergie ansehen können. In einem starken Feld übersteigt also die Energie der Wechselwirkung zwischen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ und dem Feld beträchtlich die gegenseitige Wechselwirkungsenergie. In diesem Falle hat es keinen Sinn, von einem Vektor $\mathfrak{j}$ zu sprechen, da jeder der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ sich in erster Näherung unabhängig vom anderen verhält. Die Störungsenergie eines stationären Zustands mit dem Niveau E ist jetzt einfach die Summe

$$\Delta E = -\,[\overline{(\mathfrak{M}_l \mathfrak{H})} + \overline{(\mathfrak{M}_s \mathfrak{H})}]\,.$$

Nach dem von uns mehrfach angewandten Satz der Störungstheorie ist die Mittelung über den ungestörten Zustand auszuführen. Ein solcher ist in diesem Fall der Zustand, der durch die Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$, zwischen denen eine Kopplung fehlt, beschrieben ist. Dann sind beide Impulse l und s Bewegungskonstanten. Auch ihre Projektionen auf die z-Achse, l_z und s_z, sind konstant. Darum bleiben auch die Winkel zwischen $\mathfrak{l}$ und der z-Achse (Feldrichtung) und zwischen $\mathfrak{s}$ und der z-Achse unverändert. Infolge der Störung, die durch das äußere Feld hervorgerufen wird, präzessiert jeder der Vektoren unabhängig vom andern um die Feldrichtung. Dabei ist aber die Winkelfrequenz der Präzession von $\mathfrak{s}$ doppelt so groß wie die von $\mathfrak{l}$. Wegen dieser Präzession ist der Mittelwert $\overline{\mathfrak{M}_l}$ gleich dem Mittelwert der Projektion von $\mathfrak{M}_l$ auf die Feldrichtung, da der Mittelwert der senkrechten Komponente über einen gegenüber der Periode der Präzession hinreichend großen Zeitraum gleich Null ist, d. h. also

$$\overline{M_l} = M_{lz} = -\,m_l \frac{eh}{4\pi\mu c} = -\,m_l M_0$$

und analog für das magnetische Moment des Spins

$$\overline{\mathfrak{M}_s} = M_{sz} = -\,2m_s \frac{eh}{4\pi\mu c} = -\,2m_s M_0\,.$$

Wir finden somit

$$-\,\overline{(\mathfrak{M}_l \mathfrak{H})} = -\,(\overline{\mathfrak{M}_l} \mathfrak{H}) = m_l M_0 |\mathfrak{H}|$$

und

$$-\,\overline{(\mathfrak{M}_s \mathfrak{H})} = -\,(\overline{\mathfrak{M}_s} \mathfrak{H}) = 2m_s M_0 |\mathfrak{H}|\,,$$

so daß

$$\Delta E = (m_l + 2m_s)\, M_0 |\mathfrak{H}|$$

ist.

Die magnetische Quantenzahl m_l kann $2l+1$ ganzzahlige Werte

$$m_l = l,\ l-1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ -(l-1),\ -l$$

annehmen. Die magnetische Spinquantenzahl kann die beiden Werte

$$m_s = +\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2}$$

besitzen. Die Energiedifferenz zwischen zwei Niveaus ist deshalb in erster Näherung gleich

$$(E_1 + \Delta E_1) - (E_2 + \Delta E_2) = h(\nu + \Delta\nu),$$

woraus

$$h\Delta\nu = \Delta E_1 - \Delta E_2 = (\Delta m_l + 2\Delta m_s)\, M_0 |\mathfrak{H}|$$

folgt. Die Aufspaltung $\Delta\nu$, gemessen in cm^{-1}, wird zu

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E_1 - \Delta E_2}{hc} = (\Delta m_l + 2\Delta m_s)\frac{e}{4\pi\mu c}|\mathfrak{H}|\ \text{cm}^{-1}. \tag{210.1}$$

Das Auswahlprinzip für m_l verlangt

$$\Delta m_l = 0,\ \pm 1.$$

Die Änderung von m_s wird durch das Spinerhaltungsgesetz beschränkt; Übergänge sind nur zwischen Zuständen mit gleichen Projektionen des Spins möglich, d. h.

$$\Delta m_s = 0.$$

Deshalb ergibt (210,1) schließlich

$$\Delta\nu = 0,\ \pm\Delta\nu_L,$$

d. h. das normale LORENTZ-Triplett.

Bei genauerer Berechnung der Aufspaltung muß man seine Aufmerksamkeit auf die Wechselwirkung der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ richten. Die Energie dieser Wechselwirkung ist von derselben Größenordnung wie die Energie der Wechselwirkung, die die natürliche (in diesem Falle Dublett-) Linienaufspaltung hervorruft (siehe § 204). Da diese Aufspaltung im Vergleich zur Aufspaltung in einem starken magnetischen Kraftfeld gering ist, ergibt die Berücksichtigung der Wechselwirkung der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ die Feinstruktur der Aufspaltung im PASCHEN-BACK-Effekt.

XVI. ATOME MIT MEHREREN ELEKTRONEN

§ 211. Das Heliumspektrum. Parhelium und Orthohelium

Bis jetzt hatten wir es entweder mit Atomen und Ionen mit einem einzigen Elektron (wasserstoffähnliche Atome) oder mit den Atomen der Alkalimetalle und ihnen ähnlichen Ionen zu tun, dessen gesamtes Spektrum durch die Bewegung eines Valenzelektrons bedingt ist. Jetzt gehen wir zur Betrachtung von Systemen mit mehreren Elektronen über. Da uns das Spektrum die meisten Anhaltspunkte über den Bau der Elektronenhülle liefert, wollen wir zuerst die Spektren von Atomen mit zwei und dann mit mehreren Elektronen behandeln.

Die einfachsten Vertreter der Zweielektronensysteme sind das neutrale Helium und die ihm analogen Ionen (Li^+, Be^{++}, B^{+++}, usw.). Die bemerkenswerteste Besonderheit des Heliumspektrums besteht darin, daß es die gleichen Serien wie die Atome der Alkalimetalle enthält, nur ist *jede Serie doppelt* vorhanden. Es gibt zwei Hauptserien mit verschiedenen Grenzen, zwei scharfe, zwei diffuse Serien usw. Diese zweiten Serien unterscheiden sich jedoch durch ihre Struktur von den ersten. Während die Linien in dem einen Fall immer einfach sind (Singuletts), besteht im zweiten Fall jede Linie aus 3 Komponenten; sie sind, wie man in der Spektroskopie sagt, Tripletts.

Die bekannteste Spektrallinie des Heliums, die gelbe D_3-Linie — die Linie, mit deren Hilfe das Helium zuerst in den Sonnenprotuberanzen entdeckt wurde (18. August 1868) — ist in Wirklichkeit ein Triplett mit folgenden Wellenlängen:

λ	Relative Intensität
5875,963 Å	1
5875,643 Å	3
5875,601 Å	5

Wie man aus der Tabelle sieht, beträgt der Abstand zwischen den beiden letzten Linien in der Wellenlängenskala insgesamt nur 0,042 Å; dadurch hat man diese Linien lange Zeit für eine einzige Linie und die charakteristische D_3-Linie für ein Dublett gehalten. Das Triplett D_3 ist das erste Glied der ersten Triplett-Nebenserie. Die Triplett-Hauptserie des Helium liegt im infraroten Teil des Spektrums. Dagegen liegen die entsprechenden Singulett-Serien hauptsächlich im Ultraviolett und die Singulett-Hauptserie sogar im äußersten ultravioletten Teil des Spektrums.

Angesichts dieses starken Unterschieds in der Struktur der Spektrallinien und ihres doppelten Auftretens wurde anfangs die Hypothese ausgesprochen, daß das Helium in Wirklichkeit ein Gemisch zweier Elemente sei, von denen eines die Triplettserien und speziell die D_3-Linie

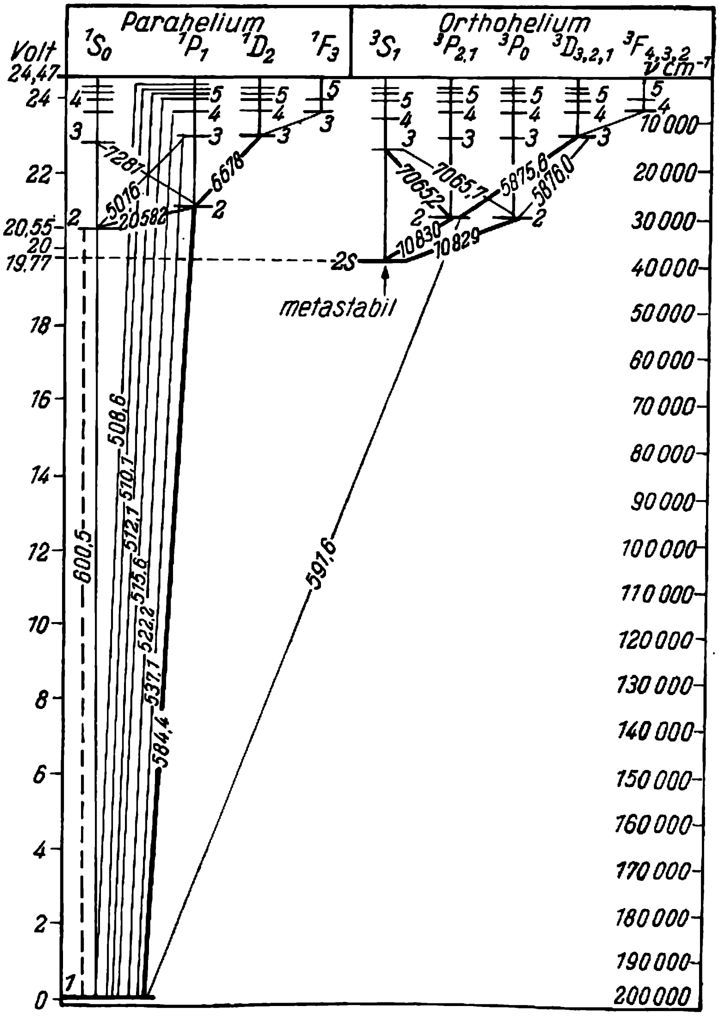


Abb. 256. Energieniveauschema des Heliumatoms

liefert. Es wurde Orthohelium genannt. Das andere, das die Singulettserien liefert, wurde Parahelium oder kürzer Parhelium genannt.

Diese Hypothese wurde scheinbar dadurch bestätigt, daß keine Kombinationen zwischen Systemen mit Singulett- und Triplett-Energieniveaus bekannt waren. Jedes Seriensystem (Singuletts und Tripletts) war in sich abgeschlossen.

Diese Hypothese erwies sich jedoch als falsch. Die Duplizität der Serien rührt davon her, daß in allen Zweielektronensystemen die Energieniveaus zwei Systeme bilden, das System der einfachen und das System der dreifachen Niveaus. Der Grund für die Ab-

geschlossenheit der Serien ist eine besondere Auswahlregel, das sogenannte Interkombinationsverbot, nach dem Triplettniveaus nur mit Tripletts und Singulettniveaus nur mit Singuletts kombinieren.

In Abb. 256 ist das Energieniveauschema des Heliumatoms angegeben. Die möglichen Übergänge sind eingezeichnet. Man sieht dort im besonderen, daß das Interkombinationsverbot keine völlig starre Auswahlregel ist, denn es existiert als (allerdings einzige) Ausnahme eine Linie mit der Wellenlänge 591,6 Å (fernes Ultraviolett), die durch Kombination des $^3P_{1,2}$-Triplett- und $^1S_0$-Singulettniveaus entsteht.

Es wäre falsch, zu glauben, daß diese Besonderheiten der Spektren eine unbedeutende Einzelheit seien, die nur für spezielle Untersuchungen der Spektroskopie interessant sei. Sie bekunden in Wirklichkeit außerordentlich wichtige Besonderheiten der Systeme mit mehreren Elektronen. Gerade deshalb haben wir uns etwas länger bei ihnen aufgehalten.

§ 212. Austauschentartung

Jene besondere Eigenschaft, die Systeme aus mehreren Elektronen besitzen, erklären wir zunächst an Hand eines stark schematisierten Beispiels zweier Elektronen, die sich in einem einfachen Feld befinden. Unsere beiden Elektronen sollen sich in einem Potentialkasten, so wie wir ihn in Bd. I, § 147, betrachtet haben, aufhalten (Abb. 257). Wir numerieren vorübergehend die Elektronen und bezeichnen das eine mit 1 und das andere mit 2. Ihre Koordinaten seien x_1 und x_2. Der Hamilton-Operator für zwei Teilchen sieht allgemein folgendermaßen aus (§ 187):

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}(\Delta_1 + \Delta_2) + U_1 + U_2 + U_{12},$$

wobei U_1 und U_2 die potentiellen Energien jedes Elektrons in seinem Feld sind; U_{12} bezeichnet die potentielle Energie ihrer Wechselwirkung, d. h. die Coulombsche Abstoßung $\frac{e^2}{r}$.

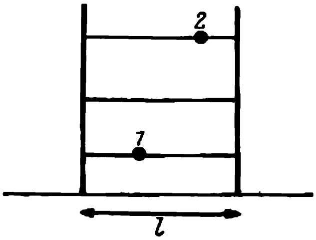


Abb. 257. Zwei Elektronen im Potentialkasten

Die Schrödinger-Gleichung $H\psi = E\psi$ schreibt sich deshalb in der Form

$$(\Delta_1 + \Delta_2)\,\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U_1 - U_2 - U_{12})\,\psi = 0\,. \tag{212,1}$$

Die Funktion ψ hängt von den Koordinaten beider Teilchen ab:

$$\psi = \psi\,(x_1,\; x_2)\,.$$

Der Operator Δ_1 wirkt nur auf die Koordinate x_1 und der Operator Δ_2 auf die Koordinate x_2. Im gegebenen Falle ist also

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Was die potentielle Energie betrifft, so ist U_1 eine Funktion von x_1 allein, U_2 nur von x_2, während U_{12} sowohl von x_1 als auch von x_2 abhängt. Die Gleichung (212,1) kann bei Berücksichtigung der Wechselwirkungsenergie $U_{12} = \frac{e^2}{r_{12}}$ nicht gespaltet werden, deshalb muß man zu ihrer Lösung die Störungstheorie anwenden. In der nullten Näherung setzen wir $U_{12} = 0$ und erhalten

$$\frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U_1(x_1) - U_2(x_2)]\,\psi(x_1, x_2) = 0. \qquad (212,2)$$

Diese Gleichung ist leicht zu spalten. Wir suchen ihre Lösung in Form eines Produktes zweier Funktionen

$$\psi(x_1, x_2) = \psi^{(1)}(x_1) \cdot \psi^{(2)}(x_2).$$

Wenn wir mit diesem Ansatz in (212,2) eingehen, erhalten wir

$$\psi^{(2)}(x_2)\frac{d^2}{dx_1^2}\psi^{(1)}(x_1) + \psi^{(1)}(x_1)\frac{d^2}{dx_2^2}\psi^{(2)}(x_2) + \\ + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U_1(x_1) - U_2(x_2)]\,\psi^{(1)}(x_1)\cdot\psi^{(2)}(x_2) = 0.$$

Wir teilen durch $\psi^{(1)}(x_1) \cdot \psi^{(2)}(x_2)$ und stellen die Glieder um:

$$\left[\frac{1}{\psi^{(1)}(x_1)}\frac{d^2}{dx_1^2}\psi^{(1)}(x_1) - \frac{8\pi^2 m}{h^2}U_1(x_1)\right] + \left[\frac{1}{\psi^{(2)}(x_2)}\frac{d^2}{dx_2^2}\psi^{(2)}(x_2) - \frac{8\pi^2 m}{h^2}U_2(x_2)\right] = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}E.$$

Die erste Klammer hängt nur von x_1, die zweite nur von x_2 ab, und ihre Summe ist eine Konstante. Deshalb muß jede Klammer für sich eine Konstante sein. Wir bezeichnen diese Konstanten mit $-\frac{8\pi^2 m}{h^2}E^{(1)}$ bzw. $-\frac{8\pi^2 m}{h^2}E^{(2)}$ und erhalten zwei Gleichungen

$$\frac{d^2}{dx_1^2}\psi^{(1)}(x_1) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E^{(1)} - U_1)\,\psi^{(1)}(x_1) = 0, \qquad (212,3)$$

$$\frac{d^2}{dx_2^2}\psi^{(2)}(x_2) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E^{(2)} - U_2)\,\psi^{(2)}(x_2) = 0 \qquad (212,4)$$

und sehen, daß

$$E^{(1)} + E^{(2)} = E,$$

d. h., daß die Energie des Systems gleich der Summe der Energien seiner Teile ist. Letzteres ist ein triviales Ergebnis; es war schon zu erwarten, da nach unserer Voraussetzung keine Wechselwirkung zwischen den Elektronen besteht.

Wir erhielten zwei Gleichungen (212,3) und (212,4), die mit der Gleichung (147,1) in Bd. I, § 147 zusammenfallen. Es ist auch offensichtlich, daß die Randbedingungen in beiden Fällen gleich sind. Deshalb sind alle Ergebnisse, die wir in § 147 gefunden haben, auch auf unsere Gleichungen anwendbar. Folglich haben die Funktionen $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ die Form

$$\psi^{(1)}_{n_{x_1}} = \sin n_{x_1} \frac{\pi x_1}{l},$$

$$\psi^{(2)}_{n_{x_2}} = \sin n_{x_2} \frac{\pi x_2}{l},$$

wobei l die Länge des Kastens ist. Die Eigenwerte der Energie beider Elektronen sind entsprechend

$$E^{(1)}_{n_{x_1}} = n^2_{x_1} \frac{h^2}{8ml^2}$$

$$E^{(2)}_{n_{x_2}} = n^2_{x_2} \frac{h^2}{8ml^2},$$

worin n_{x_1} und n_{x_2} ganze Zahlen sind. Die Eigenfunktion des Systems lautet

$$\psi = \psi^{(1)}(x_1) \cdot \psi^{(2)}(x_2) = \sin n_{x_1} \frac{\pi x_1}{l} \cdot \sin n_{x_2} \frac{\pi x_2}{l} \qquad (212,5)$$

und die ihr entsprechende Energie

$$E = E_1 + E_2 = \frac{h^2}{8ml^2}(n^2_{x_1} + n^2_{x_2}). \qquad (212,6)$$

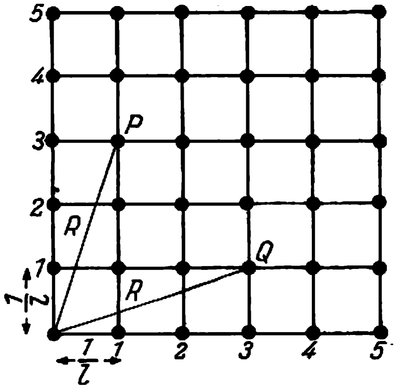


Abb. 258. Veranschaulichung der möglichen Zustände des Systems zweier Elektronen

Wenn wir diese Resultate mit denen vergleichen, die wir in § 152 für ein Elektron im dreidimensionalen Potentialkasten gefunden haben, dann gewinnen wir leicht folgende Einsicht: Das Problem des *Zwei*teilchensystems im eindimensionalen Potentialkasten ist dem *eines* Teilchens im *zweidimensionalen* Potentialkasten, und zwar in einem quadratischen Kasten

der Seitenlänge l äquivalent. Analog zu unserem Vorgehen in § 152 können wir uns jetzt zur Veranschaulichung der möglichen Zustände des Systems ein ebenes quadratisches Netz mit der Seite $\frac{1}{l}$ denken (Abb. 258). Wir sehen, daß jedem Knotenpunkt dieses Netzes ein (und nur ein) Zustand entspricht.

Z. B. entspricht dem Zustand, in dem sich das erste Elektron auf dem ersten Niveau ($n_{x_1} = 1$) und das zweite auf dem dritten ($n_{x_2} = 3$) befindet, der Punkt P mit den Koordinaten $\frac{1}{l}$ und $\frac{3}{l}$. Dieser Zustand wird durch die Funktion

$$\psi_1 = \sin \frac{\pi x_1}{l} \sin 3 \frac{\pi x_2}{l}$$

beschrieben; die zugehörige Energie ist

$$E = \frac{h^2}{8ml^2}(1^2 + 3^2) = \frac{h^2}{8ml^2} R^2,$$

wobei R der Radiusvektor ist, der vom Koordinatenursprung nach P führt.

Bis jetzt haben wir anscheinend nichts Neues erhalten, und einige Resultate sind geradezu trivial. Jedoch gibt es auch etwas Neues und dabei sehr Wesentliches. Stellen wir uns vor, daß wir die Plätze unserer Elektronen vertauscht hätten, so daß sich jetzt das zweite Elektron auf dem ersten Niveau und das erste auf dem dritten Niveau befindet. Der Zustand dieses Systems wird durch die Gleichung

$$\psi_2 = \sin 3 \frac{\pi x_1}{l} \sin \frac{\pi x_2}{l}$$

dargestellt und repräsentiert sich in unserem Netz durch den Punkt Q. Da beide Zustände durch verschiedene Punkte dargestellt werden, handelt es sich um *verschiedene Zustände*. Ihnen entspricht jedoch die *gleiche* Energie, da R in beiden Fällen den gleichen Wert hat. Daraus folgt, daß eine Entartung vorliegt, und zwar eine zweifache Entartung: die Funktionen

$$\psi(x_1, x_2) = \psi^{(1)}(x_1)\, \psi^{(2)}(x_2),$$
$$\psi(x_2, x_1) = \psi^{(1)}(x_2)\, \psi^{(2)}(x_1)$$

sind verschiedene Eigenfunktionen, ihnen entspricht jedoch ein und dieselbe Energie. Dies kommt auch bei den anderen Kombinationen der Quantenzahlen n_{x_1} und n_{x_2} vor; ausgenommen ist der niedrigste Zustand des Systems, d. h. der Fall $n_{x_1} = n_{x_2} = 1$, und auch diejenigen Zustände, für die $n_{x_1} = n_{x_2}$ ist. Diese Zustände sind, wie man leicht sieht, nicht entartet. Die oben behandelte Entartung heißt Permutations- oder Austauschentartung.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß eine analoge Permutations- oder Austauschentartung nicht nur bei Systemen aus zwei Teilchen stattfindet. Wenn wir ein System dreier Teilchen im eindimensionalen Potentialkasten betrachten, dann stehen wir vor einer Aufgabe, die formal genau wie die Bewegung eines Teilchens im dreidimensionalen Potentialkasten mit $l_1 = l_2 = l_3 = l$ zu behandeln ist. Wie in § 152 gezeigt wurde, erhält man hier auch eine Entartung von höherer Ordnung. Bei der Behandlung eines Teilchens im dreidimensionalen Kasten trug diese Entartung formalen Charakter. Beim mathematisch äquivalenten Problem dreier identischer Teilchen gewinnt sie einen klaren physikalischen Sinn.

Das gleiche gilt auch für Systeme aus n Teilchen. Das Gitter, mit dessen Hilfe wir die Eigenfunktionen anschaulich darstellen können, muß man sich jetzt im n-dimensionalen Raum vorstellen. Jedem Satz von Quantenzahlen, der die Eigenfunktion für eine bestimmte Verteilung der Elektronen auf die Niveaus darstellt, entspricht ein bestimmter Knotenpunkt dieses gedachten Gitters. Bei Umstellung eines jeden Paares von Quantenzahlen erhält man einen anderen Knotenpunkt, die Energie ändert sich jedoch nicht.

Es ist ferner offensichtlich, daß auch das von uns gewählte spezielle Feld keine wesentliche Bedeutung hat; wichtig ist nur, daß für alle identischen Teilchen die gleichen Bedingungen bestehen: die Austauschentartung hängt nicht von der Art des Feldes, jedoch von der Symmetrie der SCHRÖDINGER-Gleichung in bezug auf die Teilchennummern ab.

Wir sprechen jetzt folgenden Satz als grundlegendes Prinzip aus: Die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für ein System identischer Teilchen muß folgender Tatsache Rechnung tragen: Der Zustand, in dem das Elektron 1 die Koordinate x_1 und das Elektron 2 die Koordinate x_2 haben, und der Zustand, in dem das Elektron 1 die Koordinate x_2, das Elektron 2 die Koordinate x_1 haben, ist *ein und derselbe Zustand.*

Dieses Prinzip der Identität der Mikroteilchen spielt in der Quantenmechanik und besonders in der Quantenstatistik eine sehr wichtige Rolle. Es kennzeichnet eine der eigenartigsten Besonderheiten der Mikroteilchen, die ihr Verhalten gegenüber dem Verhalten der makroskopischen Teilchen auszeichnet. Tatsächlich lassen sich makroskopische Körper, z. B. zwei Kugeln, voneinander unterscheiden, wenn man sie mit irgendeinem Kennzeichen versieht, z. B. mit Nummern. Da man nun die Bahnkurve der makroskopischen Körper verfolgen kann, können wir feststellen, ob sich Kugel 1 oder Kugel 2 an einem gegebenen Ort befindet. Die Numerierung hat hier einen bestimmten Sinn. Ganz anders ist es im Quantengebiet. Betrachten wir z. B. den Zusammenstoß zweier Mikroteilchen. Sogar wenn jedes Teilchen zu einem gewissen Zeitpunkt $t = 0$ vor dem Zusammenstoß lokalisiert gewesen wäre, so würden sich doch später die Wellenpakete, die die Bewegung der Teilchen darstellen, überdecken, womit eine Unterscheidung der Teilchen jeglichen Sinn verliert.

Wir können jetzt den *Permutationsoperator* P einführen. Seine Wirkung auf die ψ-Funktion besteht darin, daß er die Plätze der Teilchen vertauscht. Da die Funktionen, die die beiden möglichen Verteilungen der Teilchen beschreiben, gleich sein müssen, so ist

$$u(x_1, x_2) = Pu(x_2, x_1). \tag{212,7}$$

Wenn wir in $u(x_2, x_1)$ die Koordinate des ersten Elektrons an Stelle des zweiten einsetzen, und umgekehrt, so erhalten wir $u(x_1, x_2)$:

$$u(x_2, x_1) = Pu(x_1, x_2).$$

Wir setzen dies in (212,7) ein und finden

$$u(x_1, x_2) = P^2 u(x_1, x_2),$$

d. h. $P^2 = 1$ und $P = \pm 1$. Also ist

$$u(x_1\ x_2) = \pm\, u(x_2, x_1).$$

Diejenige Wellenfunktion, die sich bei Vertauschung der Koordinaten nicht ändert, bezeichnet man als symmetrisch; diejenige Funktion, die bei einer Vertauschung der Koordinaten *nur ihr Vorzeichen* ändert, wird als antisymmetrisch bezeichnet. Diese *beiden* Funktionen drücken die

Tatsache der Identität gleicher Teilchen aus folgendem Grund aus: Physikalischen Sinn hat nicht die Wellenfunktion selbst, sondern das Quadrat ihres absoluten Betrages. Man sieht aber, daß die Quadrate der absoluten Beträge beider Funktionen, sowohl der symmetrischen als auch der antisymmetrischen, sich bei einer Vertauschung der Teilchen nicht ändern. Beide sagen also nur aus, daß im gegebenen Zustand *ein* Teilchen die Koordinate x_1 und *ein* Teilchen die Koordinate x_2 besitzt, nicht aber, daß dem Teilchen Nummer 1 bzw. dem Teilchen Nummer 2 die Koordinaten x_1 bzw. x_2 oder umgekehrt zukommen.

Dieser Paragraph sollte nur zur Klärung des Begriffs Austauschentartung dienen. Deshalb wollen wir keine weiteren Rechnungen durchführen und nicht nach der ersten Näherung suchen. Das soll im nächsten Paragraphen am Beispiel zweier Elektronen im Coulomb-Feld, d. h. am Beispiel des Heliumatoms, geschehen. Wir werden dort unter anderem sehen, daß die Störungstheorie automatisch zu zwei Eigenfunktionen führt, die die geforderten Symmetrieeigenschaften besitzen, und zwar erhalten wir eine symmetrische und eine antisymmetrische Funktion.

§ 213. Das Heliumproblem

In § 189 haben wir schon den Grundzustand des Heliums als Beispiel für die Anwendung der Störungstheorie auf ein nicht entartetes Problem betrachtet. Hier wollen wir das Problem des Heliumatoms für den allgemeinen Fall untersuchen, in dem sich seine Elektronen in beliebigen Zuständen befinden können. Die Schrödinger-Gleichung für das Heliumatom und ihm ähnliche Ionen hat folgende Gestalt [siehe § 189, Gleichung (189,2)]:

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}}\right)\psi = 0\,. \tag{213,1}$$

Hier bedeuten Δ_1 und Δ_2 dreidimensionale Laplace-Operatoren, die entsprechend auf die Koordinaten des ersten und zweiten Elektrons wirken; die Kernladung setzen wir allgemein $+Ze$, damit die Lösung nicht nur für das neutrale Heliumatom ($Z = 2$), sondern auch für die ihm ähnlichen Ionen gültig ist; $\frac{e^2}{r_{12}}$ ist die Wechselwirkungsenergie der Elektronen (elektrostatische Abstoßung).

Die ersten Schritte des Lösungsweges sind uns schon bekannt. Die Gleichung (213,1) ist wegen des Gliedes $\frac{e^2}{r_{12}}$ nicht separierbar. Deshalb muß man die Störungstheorie anwenden. In der nullten Näherung vernachlässigen wir die potentielle Energie der Wechselwirkung $\frac{e^2}{r_{12}}$ und erhalten eine Gleichung, die bezüglich der Koordinaten beider Elektronen völlig symmetrisch ist:

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2}\right)\psi = 0\,. \tag{213,2}$$

Wie zu erwarten war, sind aus diesem Grunde hier alle Ergebnisse des vorigen Paragraphen anwendbar. Zur Spaltung der Gleichung (213,2) suchen wir eine Lösung in Form eines Produkts aus zwei Funktionen auf:

$$\Psi_1 = \psi_l(1)\;\psi_k(2)\,. \tag{213,3}$$

Mit den Zahlen 1 und 2 ist die Gesamtheit aller Koordinaten jedes Elektrons bezeichnet.

Wenn man diesen Ansatz in die Gleichung (213,2) einsetzt, spaltet sie sich in zwei Gleichungen; diese beiden Gleichungen sind SCHRÖDINGER-Gleichungen des KEPLER-Problems für zwei verschiedene stationäre Zustände, und zwar den ersten und k-ten (wir haben diese Zustände in der Funktion (213,3) vollkommen willkürlich gewählt). Deshalb sind die Funktionen ψ_1 (1) und ψ_k (2) die schon bekannten Eigenfunktionen des KEPLER-Problems (§ 183), so daß die Eigenfunktion Ψ_1 der nullten Näherung bekannt ist. Dasselbe gilt auch für die Energieeigenwerte

$$E^0 = E_1^0 + E_k^0;$$

E_1^0 und E_k^0 sind die BALMER-Energieniveaus des Einelektronenproblems.

Aus Gründen, die ausführlich im vorigen Paragraphen behandelt wurden, sind die Eigenfunktionen Ψ_1 wegen der Gleichartigkeit der Elektronen entartet. In der nullten Näherung gibt es außer dieser Austauschentartung noch eine uns von der Lösung des KEPLER-Problems her bekannte Entartung bezüglich der Winkelkoordinaten (§ 184). Diese letztere Entartung wird uns jedoch hier nicht interessieren; wir berücksichtigen sie nicht, um das Problem nicht zu komplizieren.

Wegen der zweifachen Entartung entspricht dem Eigenwert E_0 nicht nur die Eigenfunktion Ψ_1, sondern auch die Funktion

$$\Psi_2 = \psi_1(2)\,\psi_k(1) \tag{213,4}$$

und auch eine beliebige Linearkombination aus (213,3) und (213,4)

$$u = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2. \tag{213,5}$$

Wir setzen voraus, daß diese Funktionen schon untereinander und mit den übrigen Funktionen orthogonalisiert und auf 1 normiert sind. Hier stehen wir jedoch folgender Schwierigkeit gegenüber. Die Störungstheorie muß uns als erste Näherung Eigenfunktionen liefern, die bei Annäherung der Störung an Null stetig in die Funktion der nullten Näherung übergehen. Daraus folgt, daß auch umgekehrt von der nullten Näherung nur solche Funktionen ausgewählt werden müssen, für die der beschriebene kontinuierliche Übergang gewährleistet ist. Jedoch entspricht ein und demselben Eigenwert der Energie eine unendliche Menge von Eigenfunktionen, solange die Koeffizienten α und β aus (213,5) willkürlich sind. Deshalb bleibt es vorerst ungewiß, welche Funktionen man aus (213,5) als nullte Näherung nehmen soll. Wir werden jedoch sehen, daß diese Schwierigkeit in der Störungstheorie bei Berücksichtigung der Entartung überwunden werden kann und die richtigen Funktionen der nullten Näherung sich automatisch ergeben.

Die Wechselwirkungsenergie der Elektronen $\frac{e^2}{r_{12}}$, die wir in der nullten Näherung vernachlässigt hatten, werden wir als Störung betrachten. Mit der Bezeichnung

$$s = \frac{e^2}{r_{12}} \tag{213,6}$$

können wir die SCHRÖDINGER-Gleichung für unsere Zwecke in der Form

$$(H^0 + s)\,\psi = E\psi \tag{213,7}$$

schreiben. Man darf voraussetzen, daß sich die Eigenfunktionen und Eigenwerte dieser Gleichung von den Eigenfunktionen und Eigenwerten der nullten Näherung nur durch

kleine Korrekturen φ und ε unterscheiden:

$$\psi = u + \varphi\,, \quad E = E^0 + \varepsilon\,.$$

Wenn wir dies in (213,7) einsetzen, erhalten wir

$$(H^0 + s)(u + \varphi) = (E^0 + \varepsilon)(u + \varphi)\,.$$

Multiplizieren wir aus und vernachlässigen die Produkte der Korrekturen $s\varphi$ und $\varepsilon\varphi$ als kleine Größen von höherer Ordnung, so erhalten wir

$$H^0 u + H^0 \varphi + s u = E^0 u + E^0 \varphi + \varepsilon u\,.$$

Da u die Lösung der nullten Näherung ist, so ist $H^0 u$ identisch $E^0 u$, und man kann diese Glieder streichen. Nach einer Umordnung der Glieder erhalten wir

$$(H^0 - E^0)\,\varphi = -\,(s - \varepsilon)\,u\,. \tag{213,8}$$

Die linke Seite hat aber gerade dieselbe Gestalt wie die Gleichung der nullten Näherung $(H^0 - E^0)\ \psi = 0$. Deshalb wird die homogene Form der Gleichung (213,8) durch die Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 befriedigt.

Wir benutzen jetzt einen Satz über inhomogene Gleichungen, der der Störungstheorie zugrunde liegt (§ 188). Diesen Satz formulieren wir dem gegebenen Fall der Entartung entsprechend folgendermaßen: Damit die inhomogene Gleichung überhaupt eine von Null verschiedene Lösung hat, muß ihre rechte Seite zu den beiden entarteten Lösungen der entsprechenden homogenen Gleichung orthogonal sein. Daraus ergeben sich zwei Beziehungen:

$$\int \Psi_1^* (s - \varepsilon)\, u\, d\tau = 0\,, \quad \int \Psi_2^* (s - \varepsilon)\, u\, d\tau = 0\,, \tag{213,9}$$

wobei $d\tau$ das Volumenelement des sechsdimensionalen Konfigurationsraumes

$$d\tau = dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2$$

ist. Wenn wir den Ausdruck $u = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ in (213,9) einsetzen, erhalten wir zwei Beziehungen, aus denen man α und β bestimmen kann:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \int \Psi_1^* (s - \varepsilon)\, \Psi_1\, d\tau + \beta \int \Psi_1^* (s - \varepsilon)\, \Psi_2\, d\tau = 0\,, \\ \alpha \int \Psi_2^* (s - \varepsilon)\, \Psi_1\, d\tau + \beta \int \Psi_2^* (s - \varepsilon)\, \Psi_2\, d\tau = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{213,10}$$

Die Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 sind als Produkte von Eigenfunktionen des Wasserstoffs orthogonal; wir setzen voraus, daß sie schon normiert seien. Das liefert drei Bedingungen:

$$\int \Psi_1^* \Psi_2\, d\tau = 0\,, \quad \int \Psi_1^* \Psi_1\, d\tau = 1\,, \quad \int \Psi_2^* \Psi_2\, d\tau = 1\,. \tag{213,11}$$

Die Beziehungen (213,10) kann man damit vereinfachen. So ergibt sich z. B.

$$\begin{aligned} \alpha \int \Psi_1^* (s - \varepsilon)\, \Psi_1\, d\tau + \beta \int \Psi_1^* (s - \varepsilon)\, \Psi_2\, d\tau = \alpha \int \Psi_1^* s\, \Psi_1\, d\tau - \alpha\varepsilon \int \Psi_1^* \Psi_1\, d\tau\, + \\ + \beta \int \Psi_1^* s\, \Psi_2\, d\tau - \beta\varepsilon \int \Psi_1^* \Psi_2\, d\tau = \alpha \left(\int \Psi_1^* s\, \Psi_1\, d\tau - \varepsilon \right) + \beta \int \Psi_1^* s \Psi_2\, d\tau. \end{aligned} \tag{213,12}$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \int \Psi_1^* s \Psi_1 \, d\tau &= \varepsilon_{11}, \quad \int \Psi_1^* s \Psi_2 \, d\tau = \varepsilon_{12}, \\ \int \Psi_2^* s \Psi_2 \, d\tau &= \varepsilon_{22}, \quad \int \Psi_2^* s \Psi_1 \, d\tau = \varepsilon_{21} \end{aligned}\right\} \tag{213,13}$$

ein. Dann führen wir unter Beachtung von (213,11) und (213,12) die Ausdrücke (213,10) in

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\varepsilon_{11} - \varepsilon) + \beta\varepsilon_{12} &= 0, \\ \alpha\varepsilon_{21} + \beta(\varepsilon_{22} - \varepsilon) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{213,14}$$

über. Diese Gleichungen stellen ein System linearer homogener Gleichungen für α und β dar. Damit sie eine von Null verschiedene Lösung haben, muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{213,15}$$

verschwinden. Wenn man die Ausdrücke (213,13) betrachtet, kann man leicht zeigen, daß die Beziehungen $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$ und $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ bestehen. Tatsächlich gehen die Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 durch Vertauschung der Lagen der Elektronen auseinander hervor; sie sind symmetrisch in bezug auf die Koordinaten beider Elektronen. Auch $s = \frac{e^2}{r_{12}}$ ist bezüglich der Koordinaten beider Elektronen symmetrisch. Wenn bei einer Integration über das Element $d\tau = dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2$ beide Elektronen in gleicher Weise berücksichtigt werden und die Integration in beiden Fällen über alle möglichen Werte der Koordinaten erstreckt wird, dann unterscheiden sich ε_{11} und ε_{22} sowie ε_{12} und ε_{21} nur durch die Bezeichnungen der Veränderlichen voneinander und deshalb sind sie entsprechend einander gleich. Wir beachten dies bei der Ausrechnung der Determinante (213,15) und erhalten

$$(\varepsilon_{11} - \varepsilon)^2 - \varepsilon_{12}^2 = 0,$$

woraus sich

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon = \pm\, \varepsilon_{12} \tag{213,16}$$

ergibt. Wir setzen dies in die erste der Gleichungen (213,14) ein und finden

$$\alpha \pm \beta = 0$$

und folglich

$$u = \alpha(\Psi_1 \pm \Psi_2) = \alpha\left\{\psi_1(1)\,\psi_k(2) \pm \psi_1(2)\,\psi_k(1)\right\}.$$

Der Koeffizient α kann jetzt leicht aus der Normierungsbedingung für u berechnet werden:

$$1 = \int u^* u \, d\tau = \alpha^2 \int (\Psi_1^* + \Psi_2^*)(\Psi_1 + \Psi_2)\, d\tau = 2\alpha^2,$$

es folgt $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also ist

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 \pm \Psi_2),$$

oder, wenn man jede der beiden Kombinationen gesondert aufschreibt,

$$u_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\psi_1(1)\,\psi_k(2) + \psi_1(2)\,\psi_k(1)\}, \tag{213,17}$$

$$u_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\psi_1(1)\,\psi_k(2) - \psi_1(2)\,\psi_k(1)\}. \tag{213,18}$$

Diese zwei Funktionen sind aus den Funktionen der nullten Näherung in dem Sinne ausgewählt, daß die Funktionen der ersten Näherung stetig in die Funktionen (213,17) und (213,18) übergehen.

Wir sehen ferner, daß die gefundenen Eigenfunktionen auch die geforderten Symmetrieeigenschaften besitzen. In der Tat ändert sich die Funktion u_S (213,17) bei Umstellung der Teilchen nicht, sie ist symmetrisch, dagegen ändert die Funktion u_A (213,18) bei Umstellung der Teilchen ihr Vorzeichen, sie ist antisymmetrisch. Beide Funktionen befriedigen das Prinzip der Identität der Mikroteilchen.

Jetzt können wir auch die Energieeigenwerte finden, die den erhaltenen zwei Eigenfunktionen u_S und u_A entsprechen. Wegen $E = E^0 + \varepsilon$ erhalten wir bei Beachtung von (213,16)

$$E = E^0 + \varepsilon_{11} \mp \varepsilon_{12} = (E_1^0 + E_k^0) + \varepsilon_{11} \mp \varepsilon_{12}$$

oder den Funktionen u_S und u_A entsprechend

$$E_S = E_1^0 + E_k^0 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}, \tag{213,19}$$

$$E_A = E^0 + E_k^0 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}. \tag{213,20}$$

Als Ergebnis der durchgeführten Rechnung erkennen wir, daß bei Berücksichtigung der Wechselwirkung der Elektronen durch $\frac{e^2}{r_{12}}$ die Störungstheorie automatisch zu zwei Eigenfunktionen führt, und zwar zu einer symmetrischen und zu einer antisymmetrischen, denen zwei *verschiedene* Eigenwerte entsprechen, d. h., die Entartung wird aufgehoben.

§ 214. Die Energie in erster Näherung

Wir wenden uns jetzt den Energiewerten der ersten Näherung E_S und E_A zu. Die Formeln (213,19) und (213,20) zeigen, daß sich E_S und E_A durch zwei Summanden ε_{11} und ε_{12} von der Energie der nullten Näherung $E^0 = E_1^0 + E_k^0$ unterscheiden. Stellen wir ihre physikalische Bedeutung fest. Der erste Summand ε_{11} kann in der Form

$$\varepsilon_{11} = \int \psi_1^*(1)\,\psi_k^*(2) \frac{e^2}{r_{12}} \psi_1(1)\,\psi_k(2)\,d\tau = \iint \frac{e\psi_1^*(1)\,\psi_1(1) \cdot e\psi_k^*(2)\,\psi_k(2)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2, \tag{214,1}$$

$$d\tau_1 = dx_1\,dy_1\,dz_1, \quad d\tau_2 = dx_2\,dy_2\,dz_2$$

geschrieben werden. Die Ausdrücke $e\psi_1^*(1)\,\psi_1(1) = \varrho_1$ und $e\psi_k(2)\,\psi_k^*(2) = \varrho_2$ sind aber die räumlichen Ladungsdichten der beiden Elektronen (siehe § 170). Man kann also

den Ausdruck ε_{11} in der Gestalt

$$\varepsilon_{11} = \iint \frac{\varrho_1 \varrho_2^*}{r_{12}} \, d\tau_1 \, d\tau_2 \tag{214,2}$$

als Energie der COULOMBschen Wechselwirkung der beiden über den ganzen Raum „verschmierten" Elektronen ansehen. Das Integral, das man aus (214,1) erhält, wenn man darin e^2 streicht, wird COULOMB-Integral genannt und mit C bezeichnet:

$$C = \int \frac{d\tau}{r_{12}} \, \psi_1^*(1) \, \psi_1(1) \, \psi_k^*(2) \, \psi_k(2) \,. \tag{214,3}$$

Das Integral ε_{12} aber ist eigenartig. Man kann es in der Form

$$\varepsilon_{12} = \iint \frac{e\psi_1^*(1) \, \psi_k(1) \cdot e\psi_1(2) \, \psi^*(2)}{r_{12}} \, d\tau_1 \, d\tau_2 = \iint \frac{\varrho_{1k}^{(1)} \varrho_{1k}^{*(2)}}{r_{12}} \, d\tau_1 \, d\tau_2 \tag{214,4}$$

schreiben, wobei $\varrho_{1k}^{(1)}$ und $\varrho_{1k}^{*(2)}$ durch

$$\varrho_{1k}^{(1)} = e\psi_1^*(1) \, \psi_k(1) \,, \quad \varrho_{1k}^{*(2)} = e\psi_1(2) \, \psi_k^*(2)$$

gegeben sind. Dabei kann man $\varrho_{1k}^{(1)}$ und $\varrho_{1k}^{(2)}$ auch als Ladungsdichten ansehen, die jedoch für solche Zustände berechnet sind, wo sich jedes Elektron gewissermaßen zum Teil auf dem ersten, zum Teil auf dem k-ten Niveau befindet. Die Energie ε_{12} läßt deshalb keine anschauliche Deutung zu. Das Integral

$$A = \int \frac{d\tau}{r_{12}} \, \psi_1^*(1) \, \psi_k(1) \, \psi_1(2) \, \psi_k^*(2) \tag{214,5}$$

wird *Austausch*integral genannt. Multipliziert mit e^2 erhält man daraus dimensionsmäßig eine Energie, die auch *Austausch*energie heißt. Die Bezeichnung rührt von dem Versuch einer anschaulichen Deutung der Entstehung dieser Energie ε_{12} her. Man sagt oft, daß die Elektronen, von denen sich eines auf dem ersten Niveau, das andere auf dem k-ten (oder überhaupt auf einem anderen Niveau) befindet, ununterbrochen ihre Plätze vertauschen.

In Wirklichkeit ist die Bedeutung des Integrals A eine andere. Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir die physikalische Bedeutung des Gliedes $e^2 A$, d. h. die „Austausch"-Energie, etwas genauer. Nach der Störungstheorie ist die Korrektur zur Energie der nullten Näherung gleich dem Mittelwert des Störgliedes, der durch Mittelung über den ungestörten Zustand gewonnen wird. Als Störung tritt im betrachteten Fall die COULOMBsche potentielle Energie der Wechselwirkung beider Elektronen auf; der ungestörte Zustand muß aber, um das Prinzip der Identität der Elektronen nicht zu verletzen, durch eine symmetrische oder antisymmetrische Linearkombination

$$u_{S,A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \psi_1(1) \, \psi_k(2) \pm \psi_1(2) \, \psi_k(1) \right\} \tag{213,17—18}$$

beschrieben werden. Wir suchen jetzt den uns interessierenden Mittelwert der COULOMBschen potentiellen Energie

$$\overline{\left(\frac{e^2}{r_{12}}\right)} = \int u_{S,A} \frac{e^2}{r_{12}} u_{S,A}^* \, d\tau \,. \tag{214,6}$$

Wir rechnen $u_{S,A} \cdot u^*_{S,A}$ aus:

$$u_{S,A} \cdot u^*_{S,A} = \frac{1}{2} \{ \psi_1(1)\, \psi_k(2) \pm \psi_1(2)\, \psi_k(1) \} \cdot \{ \psi_1^*(1)\, \psi_k^*(2) \pm \psi_1^*(2)\, \psi_k^*(1) \} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ |\, \psi_1(1)\, \psi_k(2)\,|^2 + |\, \psi_1(2)\, \psi_k(1)\,|^2 \pm \psi_1^*(1)\, \psi_k(1) \cdot \psi_k^*(2)\, \psi_1(2) \pm$$

$$\pm \psi_1(1)\, \psi_k^*(1) \cdot \psi_1^*(2)\, \psi_k(2) \} . \qquad (214,7)$$

Da in (214,6) die Integration über $d\tau = d\tau_1\, d\tau_2$ erstreckt wurde, werden die ersten beiden Glieder beim Einsetzen von (214,7) in (214,6) einander gleich; dies ergibt sich aus dem auf S. 204 über ε_{11} und ε_{22} Gesagten. Desgleichen sind die folgenden zwei Glieder untereinander gleich, und man erhält nach Kürzen der 2 und bei Beachtung der Bezeichnungen (214,3) und (214,5)

$$\overline{\left(\frac{e^2}{r_{12}}\right)} = e^2 (C \pm A) . \qquad (214,8)$$

Dies zeigt, daß das Austauschglied nur deshalb auftritt, weil wir die Funktionen u_S und u_A zur Erfüllung des Prinzips der Identität gleichartiger Mikroteilchen benutzt haben. Wir erläutern das noch näher. Wir setzen anfangs über den Zustand unseres Systems aus zwei Elektronen voraus, daß sich ihre Wellenfunktionen nicht überdecken. Das bedeutet, daß ψ_1 dort ein Maximum hat, wo ψ_k praktisch gleich Null ist, und umgekehrt. Man sieht leicht, daß für diesen Fall gilt

$$\psi_1^*(1)\, \psi_k(1) \approx \psi_k^*(1)\, \psi_1(1) \approx 0 ,$$

$$\psi_1^*(2)\, \psi_k(2) \approx \psi_k^*(2)\, \psi_1(2) \approx 0 .$$

Im Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte (214,7) verschwinden die beiden letzten Glieder, d. h. gerade die Glieder, welchen der Austauschanteil der Zusatzenergie entspricht. Auf diese Weise erhalten wir als Ergebnis unserer Integration unter dieser Bedingung nur das erste Glied der Summe, d. h. nur die gewöhnliche Coulomb-Energie:

$$\overline{\left(\frac{e^2}{r_{12}}\right)} = e^2 C .$$

So überzeugen wir uns aufs neue, daß das Erscheinen des Austauschintegrals und des ihm entsprechenden Austauschgliedes im Energieausdruck eine direkte Folge des Prinzips der Identität gleichartiger Teilchen ist.

Wir unterstreichen deshalb noch einmal, daß die Korrektur der Energie bei der ersten Näherung, die durch die algebraische Summe

$$e^2 (C \pm A)$$

dargestellt wird, der Mittelwert der Coulombschen Energie der Wechselwirkung ist, den man nach den Gesetzen der Quantenmechanik berechnet. Die Behauptung, daß es eine besondere „Austausch"-Energie gäbe, ist also falsch: es existiert keine spezifische Austauschenergie; die Zusatzenergie (214,8), die durch eine zweigliedrige Summe dargestellt wird, ist die Energie der elektrostatischen Wechselwirkung der Elektronen, die nach den Gesetzen der Quantenmechanik (nicht der klassischen Mechanik) berechnet wird.

Nichtsdestoweniger ist das „Austausch"-Glied der Summe $e^2 A$ charakteristisch, weil gerade bei ihm die *Quanten*eigenschaften der Mikroteilchen deutlich zutage treten. Aus

diesem Grunde hat sich die Aufteilung der mittleren COULOMBschen Energie $\overline{\frac{e^2}{r_{12}}}$ in einen eigentlichen COULOMBschen und einen Austauschanteil zur Klärung einer Reihe physikalischer Erscheinungen als fruchtbar erwiesen. So hat es sich z. B. gezeigt, daß mit diesen Austauschwechselwirkungen der Elektronen die ferromagnetischen Erscheinungen zu erklären sind[1]).

Im übrigen darf man nicht außer acht lassen, daß das Austauschintegral nicht nur bei der Mittelung der COULOMBschen Wechselwirkung, sondern auch beliebiger anderer Wechselwirkungen auftritt. In der Tat führt die Mittelung über symmetrische und antisymmetrische Eigenfunktionen $\int u_{S,A}\, U_{12}\, u^*_{S,A}\, d\tau$, woher die potentielle Energie der Wechselwirkung U_{12} auch immer stamme, unbedingt zu einem Glied, in dem das Austauschintegral enthalten ist. So erweist es sich z B., daß man die charakteristischen Eigenschaften (wie die sogenannte Sättigung) der Kräfte, die die Elementarteilchen im Atomkern zusammenhalten, gerade durch den Austauscheffekt erklären kann, obgleich sie nicht elektrischer Natur sind.

Die Formeln (213,19) und (213,20) zeigen, daß im symmetrischen Zustand das Austauschglied mit dem Pluszeichen steht, dagegen steht im Falle des antisymmetrischen Zustands das Minuszeichen. Man kann außerdem zeigen, daß es immer (d. h. bei beliebigem k) positiv ist. Daraus folgt, daß der antisymmetrische Zustand tiefer liegt, d. h., er ist stabiler als der symmetrische. Der „Austausch"-Anteil der Energie ε_{12} ist nun gerade das Maß für diese Stabilität.

Wir wollen nun aber zum Heliumatom zurückkehren. Wir haben uns davon überzeugt, daß durch die Wechselwirkung seiner Elektronen zwei Zustände auftreten, die durch ihre Energie merklich voneinander unterschieden sind. Wir haben noch die Existenz zweier verschiedenartiger Reihenfolgen seiner Niveaus zu erklären, die der Singuletts und die der Tripletts. Bei dieser Erklärung spielt die Berücksichtigung des Elektronenspins, den wir bis jetzt vernachlässigt haben, eine wesentliche Rolle. Bevor wir jedoch zur Betrachtung dieser Frage übergehen, müssen wir uns mit einem der wichtigsten Prinzipien der Atomphysik, dem sogenannten *Ausschließungs- oder* PAULI-*Prinzip* vertraut machen. Das werden wir im nächsten Paragraphen tun.

Übung:

Die Austauschenergie zweier Elektronen, von denen sich eins im $1s$-, das andere im $2p$-Zustand befindet, ist gleich 0,136 R cm^{-1}, wobei R die RYDBERG-Konstante ist. Man drücke diese Energie in erg und eV aus und vergleiche sie:

a) mit der Energie der magnetischen Wechselwirkungen der Elektronenspins, wobei man die Elektronen als magnetische Dipole betrachte, die sich in der Entfernung 10^{-8} cm befinden;

b) mit der Energie der magnetischen Wechselwirkungen Spin-Bahnmoment, welche durch Formel (204,17) gegeben sind.

Man überzeuge sich so von der gewaltigen Größe der Austauschenergie gegenüber der Energie der magnetischen Wechselwirkung.

---

[1]) Siehe z. B.: J. I. FRENKEL: „Einführung in die Theorie der Metalle" (Я. И. Френкель: Введение в теорию металлов, изд 2., Гостехиздат, 1950) oder auch R. BECKER und W. DÖRING: „Ferromagnetismus"; Verlag Springer, Berlin 1939.

§ 215. Das PAULI-Prinzip

In den letzten drei Paragraphen haben wir gesehen, daß die Zustände des Systems entweder durch symmetrische oder antisymmetrische Funktionen der Koordinaten beschrieben werden müssen, um das Prinzip der Identität der Teilchen zu erfüllen. Wenn wir, wie früher, die Gesamtheit aller Koordinaten der Teilchen mit den Zahlen 1 bzw. 2 bezeichnen, dann können wir die Eigenschaften dieser Funktionen zweier Teilchen durch die Gleichungen

$$u_S(1,2) = u_S(2,1),$$
$$u_A(1,2) = -u_A(2,1)$$

beschreiben.

Erinnern wir uns an die Gestalt dieser Funktionen. Sie sahen folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{aligned} u_S &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_i(1)\,\psi_k(2) + \psi_i(2)\,\psi_k(1)\}, \\ u_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_i(1)\,\psi_k(2) - \psi_i(2)\,\psi_k(1)\}. \end{aligned}\right\} \tag{215,1}$$

Wir möchten noch bemerken, daß die antisymmetrische Funktion als Determinante dargestellt werden kann:

$$u_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \psi_i(1) & \psi_i(2) \\ \psi_k(1) & \psi_k(2) \end{vmatrix}. \tag{215,2}$$

Für das Folgende ist es wesentlich, zu bemerken, daß in den Formeln (215,1) und (215,2) die Indizes i und k die Nummer der stationären Zustände bezeichnen, in denen sich jedes Elektron befindet. Wie uns schon bekannt ist, haben im Falle des Elektrons im Zentralfeld drei Größen in den stationären Zuständen bestimmte Werte, die Energie, der Drehimpuls und seine Projektion auf eine Achse. Diese Größen werden durch die Quantenzahlen n, l, m charakterisiert, so daß dem Index i das Tripel der Quantenzahlen n_i, l_i, m_i, dem Index k das Tripel n_k, l_k, m_k entspricht.

Die Überlegungen, die wir für Systeme mit zwei Teilchen entwickelt haben, behalten ihre Gültigkeit auch für Systeme mit n identischen Teilchen, worauf in § 212 hingewiesen wurde. Man kann dann ein solches System in erster Näherung (ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung) als Gesamtheit von n Einzelsystemen betrachten, wobei die Energie E des gesamten Systems gleich der Summe der Energien der Einzelsysteme ist

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n. \tag{215,3}$$

Der Zustand des Systems läßt sich auch durch das Produkt

$$\Psi = \psi_i(1)\,\psi_k(2)\ldots\psi_p(n) \tag{215,4}$$

beschreiben, wobei eine Austauschentartung zu verzeichnen ist: Beim Platzwechsel eines beliebigen Teilchenpaares ändert sich die Funktion Ψ; zwei Zustände, in denen ein beliebiges Elektronenpaar seine Plätze wechselt, werden im $3n$-dimensionalen Raum durch *verschiedene* Punkte dargestellt (s. § 212). Die Energie bleibt jedoch die gleiche.

Da insgesamt $n!$ Permutationen möglich sind, entspricht die Energie (215,3) $n!$ Funktionen von der Form (215,4). Wegen dieser Entartung muß der Zustand des Systems

durch lineare Superpositionen von Ψ-Funktionen beschrieben werden:

$$u = \sum_i c_i \Psi_i. \tag{215,5}$$

Man kann $n!$ solcher Linearkombinationen bilden, darunter ist eine symmetrische und eine antisymmetrische in bezug auf die Koordinaten eines *beliebigen Teilchenpaares*. Die symmetrische Funktion erhält man, wenn alle c_i gleich 1 sind:

$$u_S = \frac{1}{\sqrt{n!}} \{\psi_1(1)\,\psi_2(2)\ldots\psi_p(n) + \psi_1(2)\,\psi_2(1)\ldots\psi_p(n) + \ldots\}, \tag{215,6}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ nur zur Normierung der Funktionen hinzugefügt ist. Man sieht leicht, daß die Funktion (215,6) wirklich symmetrisch ist; die Umstellung zweier beliebiger Teilchen ändert nur die Reihenfolge der Glieder dieser Summe, nicht jedoch ihre Größe. Die antisymmetrische Wellenfunktion findet man durch Bildung der Determinante aus den Funktionen der einzelnen Teilchen $\psi_1(1)$, $\psi_2(1)$, $\psi_1(2)$, $\psi_2(2)$ usw.

$$u_A = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1), \psi_1(2), \ldots, \psi_1(n) \\ \psi_2(1), \psi_2(2), \ldots, \psi_2(n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(1), \psi_n(2), \ldots, \psi_n(n) \end{vmatrix}. \tag{215,7}$$

Daß diese Funktion in bezug auf die Koordinaten aller Teilchen antisymmetrisch ist, sieht man aus folgendem: die Umstellung zweier Teilchen (z. B. 1 und 2) kommt der Vertauschung der entsprechenden zwei Spalten der Determinante gleich; dabei ändert bekanntlich die Determinante ihr Vorzeichen, nicht aber ihren Betrag.

In Übereinstimmung mit dem in § 213 Gesagten muß die Wellenfunktion des Teilchensystems entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein, um dem Prinzip der Identität der Mikroteilchen Rechnung zu tragen. Wie sich herausstellt, existieren in der Natur auch zwei Teilchensorten. Die eine, z. B. die Photonen, ist dadurch ausgezeichnet, daß sich ihre Systeme durch symmetrische Funktionen beschreiben lassen; die andere, z. B. Elektronen, Protonen, Neutronen, wird durch antisymmetrische Funktionen beschrieben. Die Teilchen der ersten Art werden Bose-Teilchen, die der zweiten Fermi-Teilchen genannt, und zwar deshalb, weil sich die Gesamtheit der ersten mit der Bose-Statistik, die der zweiten mit der Fermi-Statistik beschreiben läßt[1]). Die Erfahrung zeigt, daß das Kriterium zur Unterscheidung dieser Teilchen ihr Spin ist; die Bose-Teilchen besitzen einen ganzzahligen Spin (einschließlich des Spins Null), die Fermi-Teilchen haben den Spin $\frac{1}{2}$.

Wenn ein Teilchen aus mehreren Fermi-Teilchen $\left(\text{von denen jedes den Spin } \frac{1}{2} \text{ besitzt}\right)$ besteht, so gehört es zu den Bose- oder Fermi-Teilchen, je nachdem, ob es eine gerade oder ungerade Teilchenzahl enthält. Im ersten Fall ist der Gesamtspin ganz-, im zweiten

[1]) Siehe z. B. W. G. Lewitsch: „Einführung in die statistische Physik" (В. Г. Левич: Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1950), und auch E. Schrödinger: „Statistische Thermodynamik", Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1952.

halbzahlig. Als Beispiel mögen die Atomkerne dienen, die aus Protonen und Neutronen, d. h. aus FERMI-Teilchen, bestehen (ausführlicher in § 239).

Die Elektronen sind FERMI-Teilchen: ihr Spin ist gleich $\frac{1}{2}$. Deshalb formuliert man als Verallgemeinerung der experimentellen Tatsachen den Satz: *Die Elektronensysteme werden in der Natur nur in solchen Zuständen angetroffen, die durch antisymmetrische Wellenfunktionen beschrieben werden.* Diese These nennt man das PAULI-Prinzip oder das Ausschließungsprinzip. Sie wurde von W. PAULI (in anderer Form) schon vor der Aufstellung der Quantenmechanik formuliert.

Aus dem PAULI-Prinzip in der angeführten quantenmechanischen Formulierung kann man sofort eine sehr wichtige Folgerung ziehen, die eigentlich zu allererst aufgefunden wurde: *In einem bestimmten Quantenzustand kann sich maximal ein Elektron befinden* Es würde, wenn sich zwei Elektronen in ein- und demselben Quantenzustand befänden. in der Tat bedeuten, daß $\psi_k(q) = \psi_l(q)$ für $k \neq l$ sein müßte. Da aber die Zustände des Systems durch antisymmetrische Funktionen beschrieben werden, sind in diesem Fall zwei Spalten der Determinante (215,7) untereinander gleich, und eine solche Determinante, ist bekanntlich identisch Null.[1]) Folglich ist $u_A \equiv 0$, und das bedeutet, daß der Zustand nicht existiert.

Die Wellenfunktion, die durch die Determinante (215,7) dargestellt wird, beschreibt den Zustand des Elektronensystems nicht vollständig, da sie aus Wellenfunktionen einzelner Elektronen, die nur von den Koordinaten abhängen, zusammengesetzt ist. Dagegen muß die Wellenfunktion sowohl von den Koordinaten als auch von den Spins abhängen.

Wenn die Wechselwirkung zwischen dem Bahn- und Spinmoment klein ist, dann kann man die vollständige Wellenfunktion als Produkt einer Funktion, die nur von den Koordinaten der Teilchen abhängt, mit einer Funktion, die nur von den Spins abhängt, darstellen:

$$\Psi(1, 2, \ldots, n, s_1, \ldots, s_n) = u(1, 2, \ldots, n)\, \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad (215,8)$$

wobei unter den Zahlen 1, 2, ..., n die Gesamtheiten aller Lagekoordinaten und unter $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die Spinvariablen („Spinkoordinaten") zu verstehen sind. Die so erhaltene vollständige Wellenfunktion wird die SCHRÖDINGER-Gleichung befriedigen, wenn ihr Koordinatenanteil $u(q_1 \ldots q_f)$ diese Gleichung befriedigt. Dies folgt daraus, daß in den Energieoperator, der in der SCHRÖDINGER-Gleichung angewandt wird, keine Operatoren eingehen, die auf die Spinvariablen s_i wirken.

Das PAULI-Prinzip fordert, daß die vollständige Wellenfunktion (215,8) sowohl in bezug auf die Lagekoordinaten als auch in bezug auf die Veränderlichen des Spins antisymmetrisch ist. Beide Funktionen u und φ können jedoch jede für sich sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein. In Übereinstimmung mit dem PAULI-Prinzip muß nur ihr Produkt eine antisymmetrische Funktion sein. Es ist offensichtlich, daß die Funktion symmetrisch ist, wenn u und φ gleichzeitig symmetrisch oder antisymmetrisch sind:

$$\Psi_S^{(1)} = u_S\, \varphi_S, \quad \Psi_S^{(2)} = u_A\, \varphi_A, \qquad (215,9)$$

denn die Umstellung der Teilchen bedeutet sowohl eine Umstellung der Koordinaten der Funktion u als auch eine Umstellung der Spinvariablen in φ. Wenn dabei beide Funk-

[1]) Die Vertauschung zweier gleicher Spalten verändert die Determinante nicht. Andererseits muß aber die Determinante bei Vertauschung zweier Spalten ihr Vorzeichen ändern. Beide Forderungen können nur dann erfüllt werden, wenn die Determinante identisch Null ist.

tionen entweder nicht ihr Vorzeichen oder aber gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern, dann ändert sich Ψ_S nicht, d. h., Ψ_S ist symmetrisch in bezug auf eine Umstellung der Teilchen.

Wenn eine der Funktionen, z. B. u, antisymmetrisch und die andere, φ, symmetrisch oder umgekehrt u symmetrisch und φ antisymmetrisch ist, dann ist analog ihr Produkt eine Funktion, die in bezug auf die Vertauschung der Teilchen antisymmetrisch ist. Folglich gibt es zwei Möglichkeiten für die Aufstellung der vollständigen antisymmetrischen Wellenfunktion:

$$\Psi_A^{(1)} = u_A \varphi_S; \quad \Psi_A^{(2)} = u_S \varphi_A . \tag{215,10}$$

Im nächsten Paragraphen werden wir am Beispiel des Zwei-Elektronen-Systems des Heliums die Bildung solcher vollständigen Wellenfunktionen und ihre Symmetrie ausführlich erörtern.

Die antisymmetrische Spinfunktion φ_A $(s_1, \ldots, s_n)$ kann man näherungsweise ebenso wie u_A in Form einer Determinante, die aus den Spinfunktionen der einzelnen Elektronen gebildet wird, darstellen. Daraus folgt, daß die vollständige antisymmetrische Wellenfunktion, unabhängig davon, ob sie sich in der Form $\Psi_A^{(1)}$ oder $\Psi_A^{(2)}$ darstellen läßt, gleich Null sein muß, wenn im System zwei Elektronen vorhanden sind, die sich im gleichen Quantenzustand befinden, der durch ein vollständiges System von Quantenzahlen, d. h. insgesamt vier Quantenzahlen n, l, j, m oder n, l, m_l, m_s, beschrieben wird. *Es kann also im Atom nicht mehr als ein Elektron mit einem bestimmten Wert aller vier Quantenzahlen existieren.* Darin besteht die elementare Formulierung des PAULI-Prinzips.

§ 216. Singulett- und Triplettzustände des Heliums

Wir wenden uns jetzt der ausführlichen Betrachtung des Heliumatoms unter Beachtung des PAULI-Prinzips zu. Diese Betrachtung wird auf der einen Seite die allgemeinen Überlegungen, die wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben, erläutern; auf der anderen Seite wird sie erlauben, eine Erklärung für die am Anfang dieses Kapitels ausgesprochene Behauptung der Existenz zweier nicht kombinierender Termsysteme beim Helium, des Singulett- und des Triplettsystems, zu geben.

Wie schon im letzten Paragraphen gezeigt wurde, tritt die vollständige Eigenfunktion als Produkt der Koordinaten- (oder anders gesagt, der Bahn-) und Spinfunktionen auf. Wir beginnen mit der Bestimmung der symmetrischen und antisymmetrischen *Spin*funktionen eines Zwei-Elektronen-Systems. Jedes Elektron kann sich in bezug auf den Spin in zwei Zuständen befinden: mit der Projektion parallel zum Feld, $\sigma_z = +\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, und mit der Projektion antiparallel zum Feld, $\sigma_z = -\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. Wir bezeichnen die Spinfunktion im ersten Falle mit φ^+, im zweiten mit φ^-. Im Falle zweier Elektronen haben wir folgende Möglichkeiten der gegenseitigen Orientierung der Spin-Projektionen:

$$\uparrow\uparrow, \quad \uparrow\downarrow, \quad \downarrow\uparrow, \quad \downarrow\downarrow .$$

Ihnen entsprechen folgende Funktionen:

$$\varphi^+(1)\,\varphi^+(2), \quad \varphi^+(1)\,\varphi^-(2), \quad \varphi^-(1)\,\varphi^+(2), \quad \varphi^-(1)\,\varphi^-(2) .$$

Daraus kann man vier Kombinationen bilden, die die Forderung der Symmetrie (Index S)

oder Antisymmetrie (Index A) erfüllen

$$\left.\begin{aligned}\varphi_S^{(1)} &= \varphi^+(1)\,\varphi^+(2)\,,\\ \varphi_S^{(2)} &= \varphi^+(1)\,\varphi^-(2) + \varphi^-(1)\,\varphi^+(2)\,,\\ \varphi_S^{(3)} &= \varphi^-(1)\,\varphi^-(2)\,,\\ \varphi_A &= \varphi^+(1)\,\varphi^-(2) - \varphi^-(1)\,\varphi^+(2)\,.\end{aligned}\right\} \qquad (216{,}1)$$

Von diesen vier Funktionen sind drei symmetrisch ($\varphi_S^{(1)}$, $\varphi_S^{(2)}$, $\varphi_S^{(3)}$) und eine antisymmetrisch (φ_A). Um die vollständigen Funktionen zu erhalten, bilden wir das Produkt aus den Koordinaten- (Bahn-) Funktionen u_S und u_A mit jeder Spinfunktion (216,1). Man erhält acht solcher Produkte:

1. $u_S\,\varphi_S^{(1)}$ — symmetrisch	5. $u_A\,\varphi_S^{(1)}$ — antisymmetrisch
2. $u_S\,\varphi_S^{(2)}$ „	6. $u_A\,\varphi_S^{(2)}$ „
3. $u_S\,\varphi_S^{(3)}$ „	7. $u_A\,\varphi_S^{(3)}$ „
4. $u_S\,\varphi_A$ — antisymmetrisch	8. $u_A\,\varphi_A$ — symmetrisch.

Es sind also von acht Funktionen vier symmetrisch (1 — 3 und 8), und die ihnen entsprechenden Zustände existieren nicht; die übrigen vier (4 — 7) sind antisymmetrisch. Wir müssen jetzt untersuchen, welche Zustände durch diese antisymmetrischen Funktionen beschrieben werden. Vor allem bemerken wir, daß von den vier antisymmetrischen Funktionen die Funktion (4) das Produkt der symmetrischen Bahnfunktion u_S mit der antisymmetrischen Spinfunktion φ_A ist. Die Funktionen (5), (6) und (7) sind jedoch Produkte der antisymmetrischen Bahnfunktion u_A mit den drei symmetrischen Spinfunktionen $\varphi_S^{(1-3)}$.

Wir schreiben jetzt diese vier antisymmetrischen Funktionen in expliziter Form auf. Sie sehen folgendermaßen aus:

$$4.\quad u_S\,\varphi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_i(1)\,\psi_k(2) + \psi_i(2)\,\psi_k(1)\right\}\left\{\varphi^+(1)\,\varphi^-(2) - \varphi^+(2)\,\varphi^-(1)\right\}.$$

$$5.\quad u_A\,\varphi_S^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_i(1)\,\psi_k(2) - \psi_i(2)\,\psi_k(1)\right\}\varphi^+(1)\,\varphi^+(2).$$

$$6.\quad u_A\,\varphi_S^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_i(1)\,\psi_k(2) - \psi_i(2)\,\psi_k(1)\right\}\left\{\varphi^+(1)\,\varphi^-(2) + \varphi^+(2)\,\varphi^-(1)\right\},$$

$$7.\quad u_A\,\varphi_S^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_i(1)\,\psi_k(2) - \psi_i(2)\,\psi_k(1)\right\}\varphi^-(1)\,\varphi^-(2).$$

Wir betrachten zuerst die drei letzten Funktionen. Der Funktion (5) entspricht die Spinkombination $\uparrow\uparrow$, die Summe der Projektionen beträgt

$$m_{sz}^{(1)} + m_{sz}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Analog ist die Summe der Projektionen für die Funktion (7) gleich -1. Für die Funktion (6) ist $m_{sz}^{(1)} + m_{sz}^{(2)} = 0$. Man sieht, daß für die Zustände, die durch die Funktionen (5) und (7) beschrieben werden, die Gesamtspinquantenzahl $s_1 + s_2 = s$ gleich 1 ist. Wir haben aber allen Grund anzunehmen, daß auch im Zustand (6) die Gesamtquantenzahl s gleich 1 ist. Dieser Zustand ist tatsächlich durch die gleiche Symmetrie wie die Zustände (5) und (7) sowohl in bezug auf die Bahnfunktion u_A als auch bezüglich der Spinfunktion φ_S gekennzeichnet; er ist antisymmetrisch hinsichtlich der Lagekoordinaten und symmetrisch in den Spin-„Koordinaten". Da die Projektion des Gesamtspins im Zustand (5) gleich 1, im Zustand (7) gleich -1 ist, und der Zustand (6) in jeder Hinsicht die gleiche Symmetrie wie die Zustände (5) und (7) besitzt, ist natürlich anzunehmen, daß der Unterschied des Zustands (6) von den Zuständen (5) und (7) nur in der Orientierung des Gesamtspins besteht: seine Projektion auf die Achse ist im Zustand (6) gleich Null. Somit bilden die drei Zustände (5), (6) und (7) eine Gruppe, die durch die Gesamtspinquantenzahl $s = 1$ gekennzeichnet ist. Dies ist der Triplettzustand.

Was den Zustand (4) betrifft, so bleibt nur eine Möglichkeit übrig: seine Gesamtspinquantenzahl $s = s_1 + s_2$ muß Null sein. Der Zustand (4) ist der Singulettzustand.

Wir gehen jetzt weiter und betrachten konkret die verschiedenen möglichen Zustände der zwei Elektronen des Heliums. Diese beiden Elektronen mögen $1s$-Elektronen sein. Das bedeutet, daß die drei Quantenzahlen n, l, m_l bei ihnen gleich sind ($n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$). Der Zustand des Atoms gehört zum S-Typ wegen

$$L = l_1 + l_2 = 0\,.$$

Der Triplett-S-Zustand ist aber nicht möglich. Unsere Funktionen (5) — (7) lassen dies automatisch erkennen: für $i = k$ werden die ersten Klammern der Funktionen (5), (6) und (7) gleich Null, und deshalb sind die Funktionen selbst gleich Null. Der Grund für den Ausschluß des Triplettzustands kann hier auch leicht veranschaulicht werden. Dieser Zustand verletzt das Pauli-Prinzip: Da drei Quantenzahlen beider Elektronen übereinstimmen, müssen sich die vierten Quantenzahlen unterscheiden, d. h., wenn $m_{sz}^{(1)} = +\frac{1}{2}$ ist, dann muß $m_{sz}^{(2)} = -\frac{1}{2}$ sein oder umgekehrt. In beiden Fällen ist die Gesamtspinquantenzahl Null. Es handelt sich um einen Singulett-Zustand (wir können ihn mit dem Symbol $1s1s\,{}^1S_0$ bezeichnen). Das Experiment bestätigt dies vollkommen, denn wenn im ${}^1S_0$-Zustand das gesamte mechanische Moment (Bahn- plus Spindrehimpuls) gleich Null ist, dann ist auch das magnetische Moment gleich Null: das Heliumatom muß im Normalzustand diamagnetisch sein und darf keine Zeeman-Aufspaltung zeigen, was tatsächlich den Experimenten entspricht.

Jetzt möge sich ein Elektron im $1s$-Zustand und das andere im $2s$-Zustand befinden. Bei solchen Elektronen unterscheiden sich die Hauptquantenzahlen, dagegen stimmen die Quantenzahlen l und m_l wie früher überein und sind gleich Null. Wir wenden uns den Wellenfunktionen (4) — (7) zu. Wegen $i \neq k$ sind alle vier Funktionen von Null verschieden, d. h., es existiert sowohl der Singulett- als auch der Triplettzustand. Der Singulettzustand ist $1s2s\,{}^1S_0$, im Triplettzustand dagegen ist die Gesamtspinquantenzahl gleich 1. Vom Standpunkt der anschaulichen Formulierung des Pauli-Prinzips hängt die Existenzmöglichkeit des Triplettzustands, d. h. die Möglichkeit des Zusammenfallens der Quantenzahlen der Spinprojektionen davon ab, ob die Hauptquantenzahlen der Elektronen verschieden sind, so daß eine der vier Quantenzahlen der Elektronen von Anfang an schon ver-

schieden ist. Also entsprechen der Elektronenkombination $1s2s$ die beiden Zustände $1s2s\ {}^1S_0$ und $1s2s\ {}^3S_1$. Der Triplettzustand ${}^3S_1$ unterscheidet sich vom Singulettzustand ${}^1S_0$ nicht nur wesentlich durch seine Energie, sondern auch durch die Tatsache, daß das Heliumatom im Triplettzustand paramagnetisch ist und den normalen ZEEMAN-Effekt zeigt.

Etwas anders verhält es sich bei der Elektronenkombination $1s2p$. Hier ist ebenfalls $i \neq k$, und deshalb sind die vier Funktionen wie früher von Null verschieden. Außerdem ist das Bahnmoment von Null verschieden, weil dem $2p$-Elektron gerade $l = 1$ entspricht. Deshalb wird sich das Atom im P-Zustand befinden. Von den vier Funktionen (1) — (4) entspricht die Funktion (1) $S = 0$ und liegt dem Singulett-Zustand ${}^1P_0$ zugrunde, während für die drei anderen $S = 1$ und $m_{sz} = +1, 0, -1$ gilt. Da jetzt das von Null verschiedene Bahnmoment eine Vorzugsrichtung im Raum auszeichnet, sind die drei Zustände ${}^3P_0$, ${}^3P_1$ und ${}^3P_2$ energetisch verschieden. Analoge Überlegungen sind, wie man leicht einsieht, auf beliebige Kombinationen von Elektronenzuständen $1s3p$, $1s3d$ usw. anwendbar. In allen Fällen erscheinen zwei Termgruppen, der einfache und der dreifache (Triplett-) Term. Dadurch wird die Existenz zweier Termsysteme klar.

Zustände, in denen die Spins parallel sind, heißen *Orthozustände*, dagegen solche mit antiparallelen Spins *Parazustände*. So ist der Triplettzustand ein Orthozustand (Orthohelium), der Singulettzustand dagegen ein Parazustand (Parhelium). Wir sahen, daß der ortsabhängige Teil der Eigenfunktion beim Triplettzustand antisymmetrisch ist, während er im Singulettzustand symmetrisch ist. Deshalb geht in dem Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie

$$\overline{\left(\frac{e^2}{r_{12}}\right)} = e^2 (C \pm A) \tag{216,2}$$

das Austauschglied mit dem Minuszeichen in den Orthozustand und mit dem Pluszeichen in den Parazustand ein. Daraus folgt, daß der Orthozustand energetisch tiefer liegt.

Betrachten wir jetzt die Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge zwischen Triplett- und Singulettniveaus. In § 193 sahen wir, daß die Wahrscheinlichkeit des Übergangs zwischen den Zuständen ψ_m und ψ_n von den Matrixelementen x_{mn}, y_{mn}, z_{mn} abhängt, die die Form

$$x_{mn} = \int x \psi_m^* \psi_n \, d\tau$$

haben. Diese Matrixelemente stellen quantenmechanische Analoga des *Dipolmoments* dar.

Für ein System aus zwei Teilchen lautet das Matrixelement

$$x_{mn} = \int (x_1 + x_2)\, \psi_m^* \psi_n \, d\tau; \quad d\tau = d\tau_1 \, d\tau_2,$$

weil das elektrische Moment des Teilchensystems gleich der Summe der elektrischen Momente der einzelnen Teilchen ist.

Es möge einer der kombinierten Zustände ein Singulett- und der andere ein Triplettzustand sein. Betrachten wir die Formeln (4) — (7) auf Seite 213, so können wir uns davon überzeugen, daß der Teil der Eigenfunktion, der nur von den Lagekoordinaten abhängt, für den Singulettzustand symmetrisch, für den Triplettzustand jedoch antisymmetrisch ist. Für den gegebenen Fall ist also

$$x_{mn} = \int (x_1 + x_2)\, u_S u_A \, d\tau .$$

Es ist offensichtlich, daß sich der Wert des Integrals bei Umstellung der Elektronen nicht ändern darf, da eine Umstellung einer Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gleichkommt. Andererseits wechselt das Produkt $u_S u_A$ bei einer Umstellung der Elektronen sein Vorzeichen, da die Funktionen u_S symmetrisch und u_A antisymmetrisch sind. Beide Forderungen können nur dann befriedigt werden, wenn das Integral gleich Null ist. Analog kann man zeigen, daß auch die Matrixelemente y_{mn} und z_{mn} gleich Null sind. Daraus folgt aber, daß die Wahrscheinlichkeit für den optischen Übergang zwischen Singulett- und Triplettzuständen gleich Null ist. Dadurch wird die Existenz zweier abgeschlossener Termsysteme vollständig erklärt.

Zum Schluß ist es noch notwendig, auf die Ursache hinzuweisen, die eine Übertretung des Kombinationsverbots Singulett — Triplett (des sogenannten „Interkombinationsverbots") zuläßt. Man kann auf die schwache Heliumlinie 591,6 Å verweisen, die beim Übergang $^3P_1 - {}^1S_0$ auftritt. In den Spektren der Elemente der zweiten Gruppe des Periodischen Systems gibt es auch ähnliche Interkombinationslinien $^3P_1 - {}^1S_0$, die bei diesen Elementen nicht schwach, sondern sehr intensiv sind.

Die Möglichkeit einer Verletzung des Interkombinationsverbots kann erklärt werden, wenn man bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten nicht nur die Eigenfunktionen der Koordinaten (wie wir es oben taten), sondern auch die der Spins berücksichtigt. Die oben angestellten Überlegungen sind nur dann streng gültig (für Dipolstrahlung), wenn man die Wechselwirkung zwischen Bahn- und Spinmomenten vernachlässigen kann. Nur unter diesen Bedingungen ist die vollständige Eigenfunktion, die von drei Lagekoordinaten und drei „Koordinaten" des Spins abhängt, in Form eines Produkts aus Koordinaten- und Spinfunktion darstellbar. Deshalb führt die verschwindende Übergangswahrscheinlichkeit, die man mit den Koordinatenfunktionen allein ausgerechnet hat, zum strengen Interkombinationsverbot.

Aber bereits beim Helium zeigt sich eine schwache Wechselwirkung zwischen Spin- und Bahnmomenten. Diese Wechselwirkung nimmt mit der Anzahl der Elektronen im Atom zu. Deshalb liefert in diesen Fällen die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten allein mit den Eigenfunktionen der Koordinaten keine völlig strengen Auswahlregeln.

§ 217. Die Spektren der Atome der zweiten Gruppe des Periodischen Systems

Wir wenden uns jetzt den Atomen der zweiten Gruppe des Periodischen Systems der Elemente zu. Zu ihnen gehören die Erdalkalimetalle

4 Be, 12 Mg, 20 Ca, 38 Sr, 56 Ba, 88 Ra

und auch

30 Zn, 48 Cd, 80 Hg.

Als Beispiel ist in Abb. 259 ein Überblick der wichtigsten Serien und das Energieniveauschemata des neutralen Magnesiums gegeben. Wir sehen hier das gleiche Bild wie beim Helium: Es gibt zwei Niveausysteme, das Singulett- und das Triplettsystem. Ihre Kombinationen ergeben erstens die Singulettserien: die Hauptserie $^1P_1 - {}^1S_0$ ($\lambda = 2852$ Å, 2025 Å, usw.); die zweite (scharfe) Nebenserie $^1S_0 - {}^1P_1$ ($\lambda = 11828$ Å, 5711 Å, usw.) und die erste (diffuse) Nebenserie $^1D_2 - {}^1P_1$ ($\lambda = 8806$ Å, 5528 Å, usw.). Analoge Serien existieren auch im Triplettsystem: die Hauptserie $^3P_{2,1,0} - {}^3S_1$ ($\lambda = 15023$ Å, 15032 Å usw.); die zweite

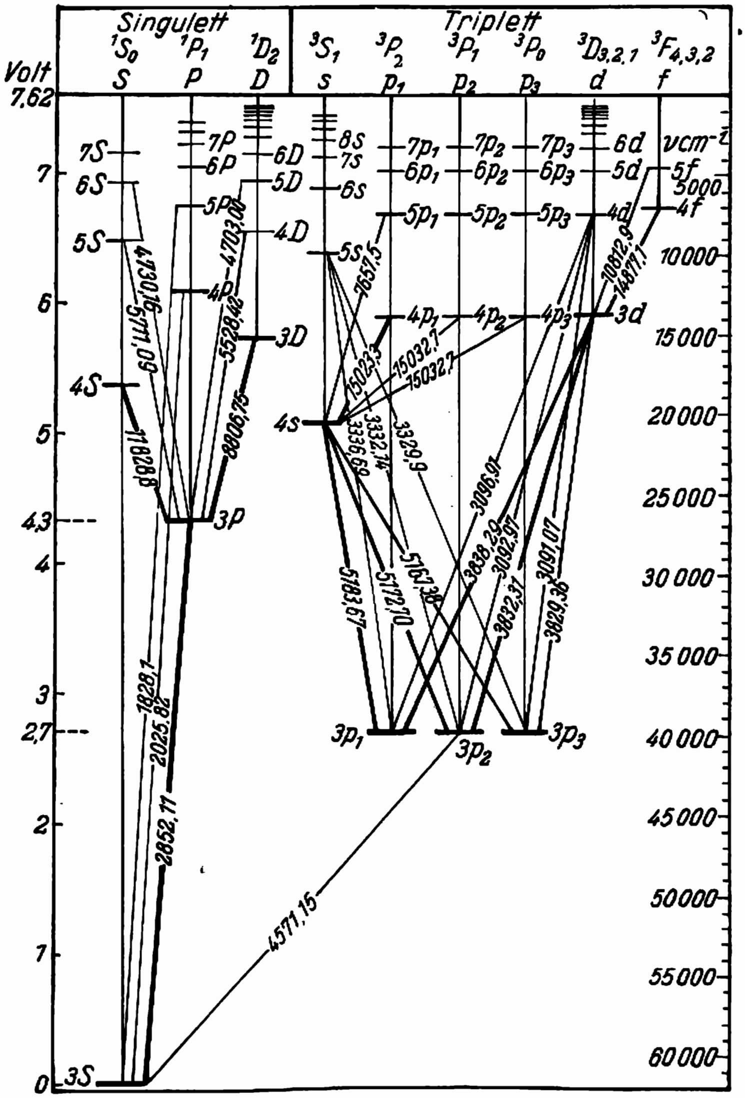


Abb. 259

Schema der Energieniveaus und Überblick über die wichtigsten Serien des neutralen Magnesiums

Nebenserie $^3S_1 - {}^3P_{2,1,0}$ ($\lambda = 5183$ Å, 5172 Å usw.) und die erste (diffuse) Nebenserie $^3D_{3,2,1} - {}^3P_{2,1,0}$ ($\lambda = 3838$ Å, 3832 Å usw.). Als Ausnahme vom Interkombinationsverbot erscheint die blaue Linie $\lambda = 4571{,}15$ Å, die beim Übergang $^3P_1 - {}^1S_0$ auftritt. Diese Linie ist insofern bemerkenswert, als zu ihrer Anregung eine Energie von nur 2,7 eV nötig ist. Wenn man Magnesiumdampf mit monochromatischem Licht der Wellenlänge 4571,15 Å bestrahlt, dann absorbiert das Atom dieses Licht und geht aus dem Grundzustand $^1S_0$ in den angeregten $^3P_1$ über; bei Rückkehr in den Grundzustand wird diese Wellenlänge wieder ausgesandt. Die Linie 4571,15 Å ist also eine *Resonanzlinie*. Beim Magnesium (und anderen zweiwertigen Atomen) gibt es jedoch noch eine zweite Resonanzlinie, $\lambda = 2852{,}11$ Å (Ultraviolett), die im Singulettsystem beim Übergang $^1P_1 - {}^1S_0$ auftritt. Es dürfte nicht überflüssig sein, hier zu vermerken, daß von den drei nahen Interkombinationsübergängen $^3P_2 - {}^1S_0$, $^3P_1 - {}^1S_0$, $^3P_0 - {}^1S_0$ nur $^3P_1 - {}^1S_0$ existiert. Der Übergang $^3S_1 - {}^1S_0$ existiert ebenfalls nicht. Eine Begründung dafür wird später gegeben werden. Ein ähnliches Aussehen haben die Atomspektren der anderen Elemente der zweiten Gruppe. In Abb. 260 sind einige Tripletts dieser Spektren als Beispiele wiedergegeben.

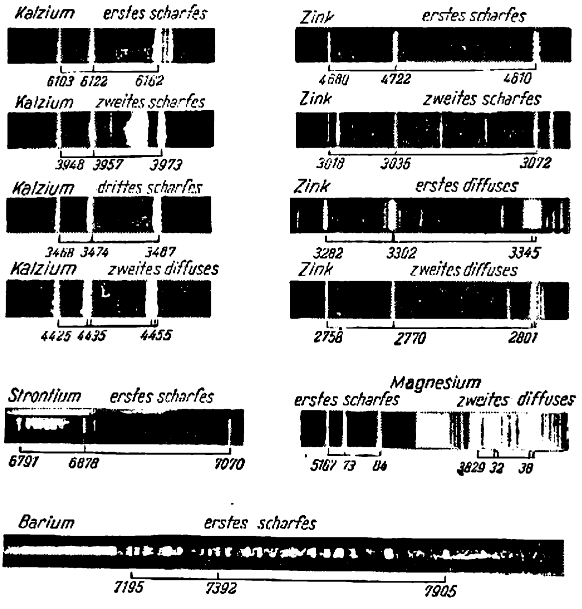


Abb. 260. Beispiele für Tripletts der scharfen und diffusen Serien

Zur Deutung der Spektren der Atome mit zwei Valenzelektronen ist es zweckmäßig, ein Vektormodell zu benutzen, das dem für die einwertigen Atome der ersten Gruppe (Alkalien) eingeführten analog ist. Bei den Atomen der zweiten Gruppe bilden $Z - 2$ Elektronen eine Edelgashülle [beim Beryllium ($Z = 4$) ist das die Hülle des Heliums, beim Magnesium ($Z = 12$) die Hülle des Neons usw.]. Das Gesamtmoment einer solchen Hülle

ist, wie aus einer ganzen Reihe von Eigenschaften der Edelgase folgt, gleich Null.[1]) Deshalb sind die Spektraleigenschaften der Atome der zweiten Gruppe durch das Vorhandensein der letzten zwei *Valenz*elektronen bedingt.

Das Vektormodell für Atome mit zwei Valenzelektronen besteht aus vier Vektoren: aus zwei Bahnmomenten $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ und zwei Spinmomenten $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$. Bei Abwesenheit eines äußeren Feldes oder in einem schwachen Magnetfeld werden diese vier Vektoren untereinander kombiniert; dabei ergibt sich der Vektor des Gesamtimpulsmoments des Atoms $\mathfrak{J}$, dessen Betrag und Richtung konstant sind. Es ist jedoch noch notwendig, die Reihenfolge bei der Kombination der Vektoren des Bahn- und Spinmoments festzulegen. Werden zuerst die Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ jedes Elektrons und dann die erhaltenen Vektoren $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ zum Vektor $\mathfrak{J}$ zusammengesetzt, oder sollen erst $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{l}$ für die verschiedenen Elektronen und dann die erhaltenen Vektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{L}$ zum Vektor $\mathfrak{J}$ summiert werden?

Es ist einzusehen, daß die Reihenfolge der Summation eine Frage der Größe der Bindungsenergie, d. h. eine Frage nach der stärkeren Kopplung ist: Es überwiegt entweder die Kopplung der Spins verschiedener Elektronen untereinander und der Bahnmomente untereinander, oder die Kopplung Spin — Bahn für jedes Elektron. Beide Varianten des Vektormodells sind in Abb. 261 dargestellt. Beide geben dieselbe Zahl möglicher Zustände; die entsprechenden Zustände sind aber verschieden, und nur der Vergleich mit den Ergebnissen, die durch die Analyse von Spektren gefunden wurden, kann eine Antwort auf diese Frage geben. Eine solche Analyse, die man an Hand eines umfangreichen experimentellen Materials angestellt hat, zeigte, daß im allgemeinen die Spektren aller komplizierten Atome in den meisten Fällen die Kopplung Spin — Spin und nicht Spin — Bahn zeigen. Deshalb bezeichnet man diese Kopplung als normale Kopplung.

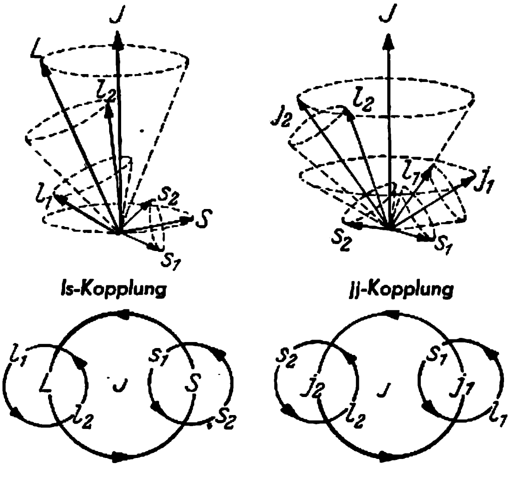


Abb. 261. Zwei Kopplungsarten: die normale Kopplung *ls* und die Kopplung *jj*

[1]) Beim Helium folgt dies unmittelbar aus seiner uns schon bekannten Struktur: im Grundzustand befinden sich beide Elektronen im Zustand 1s, und die Projektionen ihrer Spins sind antiparallel.

Wir betrachten zuerst die Addition der Vektoren $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$. Der Betrag dieser Vektoren ist

$$\sqrt{l_1(l_1+1)}\frac{h}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{l_2(l_2+1)}\frac{h}{2\pi}.$$

Ihre Addition wird nach der Parallelogrammregel durchgeführt. Da aber der Summenvektor $\mathfrak{L}$ auch der Quantenimpulsvektor ist, dürfen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ nur so aneinandergesetzt werden, daß der resultierende Vektor $\mathfrak{L}$ gleich

$$|\mathfrak{L}| = \sqrt{L(L+1)}\frac{h}{2\pi}$$

ist. Dabei ist mit $\mathfrak{l}_1 > \mathfrak{l}_2$

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \ldots, l_1 - l_2. \tag{217,1}$$

Betrachten wir ein Beispiel. Es sei $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, d. h.

$$|\mathfrak{l}_1| = \sqrt{12}\frac{h}{2\pi}, \quad |\mathfrak{l}_2| = \sqrt{6}\frac{h}{2\pi}.$$

Nach (217,1) sind die möglichen Werte von L

$$L = 5, 4, 3, 2, 1,$$

so daß

$$|\mathfrak{L}| = \sqrt{30}\frac{h}{2\pi}, \quad \sqrt{20}\frac{h}{2\pi}, \quad \sqrt{12}\frac{h}{2\pi}, \quad \sqrt{6}\frac{h}{2\pi}, \quad \sqrt{2}\frac{h}{2\pi}$$

ist.

Eine einfache graphische Darstellung erlaubt eine schnelle Konstruktion aller dieser Werte. Wir markieren auf beiden Koordinatenachsen die möglichen Werte des Bahn-

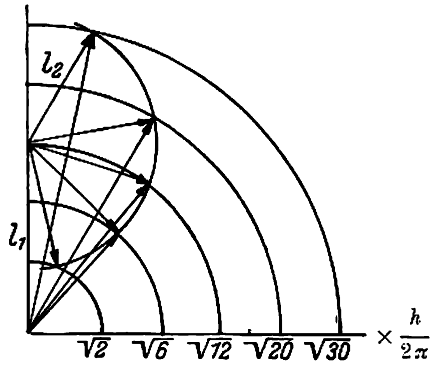


Abb. 262. Addition der Bahnimpulse

impulses in der Einheit $\frac{h}{2\pi}$, d. h. $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, ..., und schlagen um den Koordinatenursprung Kreisbögen mit diesen Radien (Abb. 262). Um jetzt alle möglichen Vektoren zu erhalten

(die Summen aus $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ in unserem Beispiel), beschreiben wir von der Ordinate $\sqrt{12}$ aus einen Halbkreis mit dem Radius $\sqrt{6}$. Die Radiusvektoren, die vom Koordinatenursprung zu den Schnittpunkten dieses Halbkreises mit den vorher gezeichneten Bögen führen, stellen alle für unseren Fall möglichen Vektoren der Summe $\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2$ dar.

Bei der Addition der Spinvektoren $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$,

$$|\mathfrak{s}_1| = |\mathfrak{s}_2| = \sqrt{s(s+1)}\frac{h}{2\pi},$$

erhalten wir auch eine Vektorsumme $\mathfrak{S}$:

$$|\mathfrak{S}| = \sqrt{S(S+1)}\frac{h}{2\pi},$$

wobei es für die Werte von S allerdings nur zwei Möglichkeiten gibt:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{und} \quad S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

d. h.

$$|\mathfrak{S}| = \sqrt{2}\frac{h}{2\pi} \quad \text{oder} \quad 0.$$

Schließlich ergibt die Addition von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ das Gesamtimpulsmoment $\mathfrak{J}$ des Atoms, dessen Wert durch die Formel

$$|\mathfrak{J}| = \sqrt{J(J+1)}\frac{h}{2\pi}$$

festgelegt ist, wobei die Quantenzahl J wie bei der Addition von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ folgende Werte annimmt:

$$J = L + S, \quad L + S - 1, \quad \ldots, \quad L - S.$$

Da S im Falle zweier Elektronen nur die beiden Werte

$$S = 0 \quad \text{oder} \quad S = 1$$

annimmt, so sind die möglichen Werte von J für jedes L:

$$J = L \quad \text{oder} \quad J = L + 1, \quad L, \quad L - 1.$$

Wenn sich beide Elektronen im s-Zustand ($l_1 = l_2 = 0$) mit ein und derselben Hauptquantenzahl (z. B. $2s2s$ beim Beryllium, $3s3s$ beim Magnesium usw.) befinden, dann ist 0 der einzig mögliche Wert von S, da solche Elektronen nach dem Pauli-Prinzip unbedingt antiparallele Spinprojektionen haben müssen. Deshalb ist Null auch der einzig mögliche Wert von J. Wir erhalten so nur einen einfachen (Singulett-) Term $^1S_0$.

Betrachten wir nun irgendeine andere Kombination, z. B. $3s3p$ (für Magnesium, siehe Abb. 259). Hier ist $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, deshalb hat L nur einen Wert, nämlich $L = 1$, S jedoch hat wie früher zwei Werte 0 und 1. Deshalb sind für J folgende Werte möglich:

$$J = 1, \quad J = 2, \quad 1, \quad 0.$$

Die entsprechenden Terme sind

$$^1P_1;\quad ^3P_2,\quad ^3P_1,\quad ^3P_0.$$

Eine größere Mannigfaltigkeit der Terme liefert eine Kombination von p- ($l_1 = 1$) und d- ($l_2 = 2$) Elektronen. Für diesen Fall werden die möglichen Werte von L und die entsprechenden Terme

$$L = 3,\ 2,\ 1.$$
$$\text{Term: } F,\ D,\ P.$$

Für jeden Term sind zwei Wertegruppen für J möglich:

a) $J = L$ ($S = 0$) – Singulett-Terme;

b) $J = L + 1,\ L,\ L - 1$ ($S = 1$) – Triplett-Terme.

Alle möglichen Terme sind in Tabelle XXX aufgeführt.

Das Vektormodell erlaubt die wegen ihrer Einfachheit bemerkenswerte Intervallregel in den Triplettspektren zu begründen. Im letzten Beispiel erhielten wir folgende Termgruppen:

$$^3P_0,\ ^3P_1,\ ^3P_2;\quad ^3D_1,\ ^3D_2,\ ^3D_3;\quad ^3F_2,\ ^3F_3,\ ^3F_4.$$

Tabelle XXX

	Singuletts ($S = 0$)			Tripletts ($S = 1$)				
J	1	2	3	0	1	2	3	4
$L = 1$	$^1P_1$			$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$		
$L = 2$		$^1D_2$			$^3D_1$	$^3D_2$	$^3D_3$	
$L = 3$			$^1F_3$			$^3F_2$	$^3F_3$	$^3F_4$

Wenn wir die Differenzen von benachbarten Termen, d. h. die Aufspaltungsintervalle ausrechnen, dann stellen sie sich folgendermaßen dar:

$$\frac{^3P_0 - {}^3P_1}{^3P_1 - {}^3P_2} = 1:2;\quad \frac{^3D_1 - {}^3D_2}{^3D_2 - {}^3D_3} = 2:3;\quad \frac{^3F_2 - {}^3F_3}{^3F_3 - {}^3F_4} = 3:4.$$

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele zur Illustration dieser Regel aufgeführt.

Tabelle XXXI

Theoretisches Verhältnis der Intervalle 2:1				Theoretisches Verhältnis der Intervalle 3:2			
Element. Konfiguration	$^3P_0 - {}^3P_1$	$^3P_1 - {}^3P_2$	Beob. Verhältnis	Element. Konfiguration	$^3D_1 - {}^3D_2$	$^3D_2 - {}^3D_3$	Beob. Verhältnis
Ca $3d\,3d$	13,5	26,9	2,0	Ca $3d\,4s$	13,6	21,7	1,6
Ca $3s\,4p$	52,3	105,9	2,0	Ca $3d\,4p$	26,7	40,0	1,5
Sr $5s\,5p$	187,0	394,6	2,1	Zn $4s\,4d$	3,4	4,6	1,4
Mg $3s\,3p$	20,0	40,9	2,0	Cd $5s\,5d$	11,7	18,2	1,6
Zn $4s\,4p$	190,0	389,0	2,0	Cd $4s\,4d$	3,8	5,6	1,5

Die Begründung dieser bemerkenswerten Regel findet man in speziellen Handbüchern der theoretischen Spektroskopie.[1])

§ 218. Einige Gesetzmäßigkeiten in den komplizierten Spektren

Das Vektormodell erlaubt mit erstaunlicher Genauigkeit sehr feine Besonderheiten der komplizierten Atomspektren vorauszusagen. Speziell werden die komplizierten Bilder der Linienaufspaltung in schwachen und starken Magnetfeldern (Zeeman- und Paschen-Back-Effekt) vollständig erklärt. Wir haben hier nicht die Möglichkeit, auf Einzelheiten einzugehen, und führen zur Illustration nur einige einfache Gesetzmäßigkeiten an, die in komplizierten Spektren zu beobachten sind.

1. *Die Verschiebungsregel.* Diese Regel sagt folgendes aus: *Das Spektrum und die Energieniveaus des Atoms mit der Atomnummer Z sind dem Spektrum und den Energieniveaus des einfach ionisierten Atoms mit der Atomnummer $Z+1$ analog.* Wir sind schon des öfteren Beispielen für diese Gesetzmäßigkeit begegnet. Wir erinnern uns, daß die Spektren H und He^+, He und Li^+ usw. einander vollkommen analog sind. Diese Regel gilt auch für die Spektren der komplizierteren Atome.

2. *Die Regel über den Wechsel der Multiplizität* wird folgendermaßen formuliert: *Die Spektralterme aufeinanderfolgender Elemente des Periodischen Systems haben abwechselnd gerade und ungerade Multiplizität.* Wir wissen bereits, daß die Alkalimetalle (I. Gruppe des Periodischen Systems) Dublett-Terme, die Erdalkalimetalle (II. Gruppe des Periodischen Systems) aber Singulett- und Triplett-Terme besitzen. Das ist ein Beispiel dieser sehr allgemeinen Regel, die unmittelbar aus dem Vektorschema folgt.

Das Vektormodell für mehrere Elektronen wird auf folgende Weise konstruiert: Im Atom seien n Elektronen vorhanden. Jedes besitzt ein Bahnmoment $\mathfrak{l}$ und ein Spinmoment $\mathfrak{s}$. Bei normaler Kopplung werden die Bahn- und Spinmomente einzeln addiert:

$$\mathfrak{L} = \sum_i \mathfrak{l}_i, \quad \mathfrak{S} = \sum_i \mathfrak{s}_i.$$

Die Summe aus $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ ergibt das Gesamtmoment $\mathfrak{J}$ des Atoms:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{L} + \mathfrak{S}.$$

Bei der Summation der $\mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{s}_i$ müssen die Quantelungsregeln beachtet werden, die wir schon bei der Summation zweier Momente kennengelernt haben. Insbesondere wird die Quantenzahl des Gesamtspins S ganz- oder halbzahlig, je nachdem, ob eine gerade oder ungerade Anzahl von Elektronen vorhanden ist: bei einem Elektron wird $S = \frac{1}{2}$, für zwei Elektronen $S = 0$ oder 1, für drei Elektronen $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ oder $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, für vier Elektronen $S = 0$, 1 oder 2 usw. Das Gesamtmoment $\mathfrak{J}$ ist

$$|\mathfrak{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

[1]) Siehe: S. E. Frisch: „Spektroskopische Bestimmung der Kernmomente" (С. Э. Фриш: Спектроскопическое определение ядерных моментов, Гостехиздат, 1948) und G. Herzberg: „Atomspektren und Atomstruktur", S. 198. Verlag Steinkopf, Dresden und Leipzig, 1936.

mit
$$J = L + S;\quad L + S - 1,\quad \ldots,\quad |L - S|.$$

Man sieht, daß für $L > S$ die Zahl der möglichen Werte von J gleich $2S + 1$ ist. Man erhält also bei drei Elektronen zwei Termsysteme: für $S = \frac{1}{2}$ ist die Zahl der möglichen Werte J, d. h. die Multiplizität der Terme gleich zwei; für $S = \frac{3}{2}$ ist $2S + 1 = 4$, d. h., die Multiplizität ist eine vierfache (Quartett-Terme). Bei vier Elektronen wird $S = 0, 1, 2$; entsprechend erhält man für

$$J = L \text{ Singuletts,}$$
$$J = L + 1,\ L,\ L - 1 \text{ Tripletts,}$$
$$J = L + 2,\ L + 1,\ L,\ L - 1,\ L - 2 \text{ Quintetts.}$$

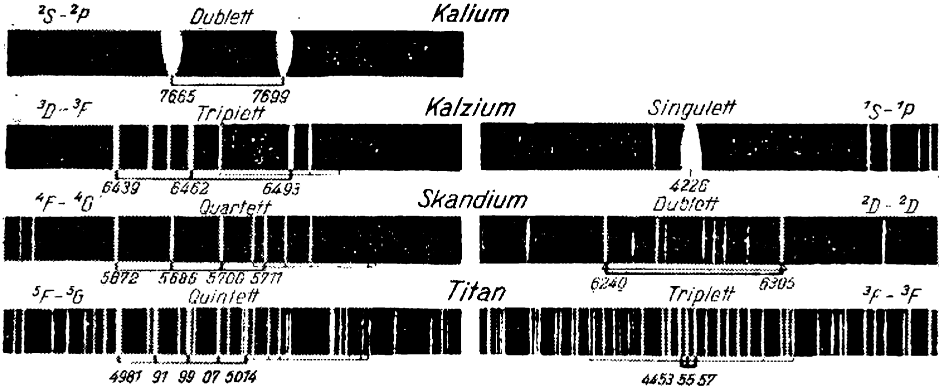


Abb. 263. Beispiele zur Regel über den Wechsel der Multiplizität

Wir sehen, daß die geraden und ungeraden Multiplizitäten mit stetig wachsender Elektronenzahl wirklich abwechseln. Das Experiment bestätigt diese Voraussagen vollkommen. So beobachtet man z. B. bei den Elementen der ersten großen Periode des Periodischen Systems (18 Elemente von 19 K bis 36 Kr) folgenden Wechsel der Multiplizität:

19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V
Dubletts	Singuletts Tripletts	Dubletts Quartetts	Singuletts Tripletts Quintetts	Dubletts Quartetts Sextetts

Bei dem nach Vanadium folgenden Element 24 Cr beobachtet man alle ungeraden Multipletts mit Ausnahme der Singuletts (d. h., man beobachtet Tripletts, Quintetts und Septetts) usw. In Abb. 263 sind Beispiele für die in der Tabelle angegebenen Multipletts angeführt, dabei sind nur die hellsten Linien jedes Multipletts angezeigt.

§ 219. Magnetische Eigenschaften der Atome

Das Vorhandensein eines mechanischen und eines mit ihm verbundenen magnetischen Moments der Atome zeigt sich nicht nur in den spektroskopischen, sondern auch in den magnetischen Eigenschaften der Atome. Vor allem sieht man leicht, daß, wenn $j = 0$ ist, auch das magnetische Moment gleich Null ist; das Atom ist dann diamagnetisch. Dagegen besitzt das Atom für $j \neq 0$ paramagnetische Eigenschaften. Die klassische Theorie des Paramagnetismus wurde schon zu Anfang des 20. Jahrhunderts von Langevin entwickelt. Nach dieser Theorie wurde den Atomen paramagnetischer Stoffe ein bestimmtes magnetisches Dipolmoment zugeschrieben. Ein äußeres magnetisches Feld orientiert diese Elementardipole, die Wärmebewegung jedoch zerstört diese Orientierung wieder. Die makroskopischen paramagnetischen Eigenschaften werden also durch das statistische Gleichgewicht zwischen diesen beiden Faktoren bestimmt. Langevin hat die paramagnetischen Stoffkonstanten durch Anwendung der klassischen Statistik berechnet. Dabei sah er den klassischen Vorstellungen entsprechend alle Orientierungswinkel der magnetischen Dipole zur Richtung des äußeren Feldes als gleichwahrscheinlich an.[1])

Für die paramagnetische Suszeptibilität erhält man auf diese Weise, wenn man sie auf ein Mol des Stoffes bezieht,

$$\chi_m = \frac{c}{T}, \tag{219,1}$$

wobei T die absolute Temperatur und c die sogenannte Curie-Konstante ist, die sich nach Langevin folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$c = \frac{1}{3} \frac{\mu^2 N^2}{R} \tag{219,2}$$

(R ist die universelle Gaskonstante, N die Avogadrosche Zahl, μ das magnetische Moment eines Elementardipols).

Der Faktor $\frac{1}{3}$ kommt durch die Mittelung über alle möglichen Orientierungen der Dipole zustande, wenn man annimmt, daß diese alle gleichwahrscheinlich sind. Diese Annahme kann in der Quantentheorie nicht aufrechterhalten werden, da infolge der räumlichen Quantelung nicht alle Orientierungen möglich sind, sondern nur solche, für die die magnetische Quantenzahl des Atoms diskrete Werte annimmt:

$$m = j, \ (j-1), \ \ldots, \ -j.$$

[1]) Eine Darstellung der Langevinschen Theorie findet man z. B. in dem Buch von S. W. Wonsowski: „Moderne Lehre vom Magnetismus", Deutsche Ausgabe: Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (С. В. Вонсовский: Современное учение о магнетизме) oder auch bei R. Becker: „Theorie der Elektrizität", Bd. II, Verlag Teubner, Leipzig, 7. Aufl. 1949.

Wenn man die Mittelung über diese diskreten Orientierungen[1]) vornimmt, so erhält man an Stelle von $\frac{1}{3}$

$$\frac{j(j+1)}{3j^2} = \frac{j+1}{3j}.$$

Dadurch verändert sich auch der Ausdruck für die Curie-Konstante ein wenig. An Stelle von (219,2) erhält man

$$c = \frac{\mu^2 N^2}{3R} \frac{(j+1)}{j}. \qquad (219,3)$$

Wie wir in § 209 gesehen haben, kann man das magnetische Moment des Atoms durch das Bohrsche Magneton M_0 ausdrücken:

$$\mu = \overline{M}_j = g\sqrt{j(j+1)}\, M_0.$$

Näherungsweise gilt (für genügend große j)[2])

$$\mu = gjM_0. \qquad (219,4)$$

Damit wird die Curie-Konstante

$$c = \frac{N^2 M_0^2}{3R} g^2 j(j+1). \qquad (219,5)$$

Um aus dieser Formel die Curie-Konstante berechnen zu können, ist es also notwendig, j zu kennen. Wenn j nicht bekannt ist, berechnet man zur Prüfung der Formel (219,5) mit Hilfe der experimentell ermittelten Curie-Konstanten c den Wert $g\sqrt{j(j+1)}$, d. h. das magnetische Moment des Atoms in Bohrschen Magnetonen:

$$g\sqrt{j(j+1)} = \frac{1}{NM_0}\sqrt{3Rc} = \frac{\sqrt{3R}}{M_B}\sqrt{c}$$

(M_B ist das Bohrsche Magneton für ein Mol = 5585 erg · Gauss · Mol^{-1}).

Wenn wir die Zahlenwerte einsetzen, erhalten wir

$$g\sqrt{j(j+1)} = \frac{\sqrt{8{,}31 \cdot 10^7 \cdot 3}}{5585}\sqrt{c} = 2{,}83\sqrt{c}. \qquad (219,6)$$

Hund, der diese Formel (219,6) aufgefunden hat, verglich sie mit den experimentellen Befunden für dreifach ionisierte Atome der seltenen Erden und für Ionen der Eisengruppe. Der Grund dafür, daß er gerade die dreifach ionisierten Atome der seltenen Erde wählte, ist aus der Theorie des Periodischen Systems ersichtlich. Bei den Atomen der seltenen Erden werden

---

[1]) Siehe R. Becker: „Theorie der Elektrizität", Bd. II, Verlag Teubner, Leipzig, 7. Aufl. 1949.

[2]) Die dargestellten Überlegungen sind vereinfacht und tragen den quantenmechanischen Besonderheiten des Impulsmoments keine Rechnung. Die genaue Formel ist komplizierter, sie enthält jedoch nichts prinzipiell Neues.

die spektroskopischen und magnetischen Eigenschaften durch die inneren 4*f*-Elektronen bestimmt. Dabei ist bei dreifach ionisierten Ionen die äußere Hülle abgeschlossen, und das gesamte magnetische Moment wird nur durch die 4*f*-Elektronen bestimmt.[1])

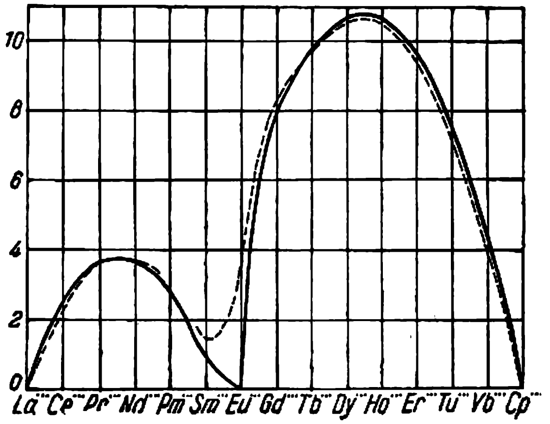


Abb. 264. Paramagnetismus der seltenen Erden

Die Übereinstimmung mit dem Experiment erwies sich für die Ionen der seltenen Erden als sehr gut, wie man aus Abb. 264 sehen kann. Die ausgezogene Linie zeigt den Verlauf des magnetischen Moments, wie er sich nach Formel (219,6) berechnet, während die Kurve, die man aus den experimentellen Ergebnissen erhält, punktiert dargestellt ist. Für die Ionen der Eisengruppe ist die Übereinstimmung wenig befriedigend, was wahrscheinlich auf die Kompliziertheit ihrer Multiplettstruktur zurückzuführen ist.

§ 220. Die Spektren isoelektronischer Ionen

Wir sind jetzt theoretisch genügend vorbereitet, um uns mit einem der wichtigsten Ergebnisse der Theorie des Atombaus, der Theorie des Periodischen Systems der Elemente von D. J. Mendelejew, vertraut zu machen. Im Zuge der Vorbereitungen des empirischen Materials müssen wir jedoch noch einige Besonderheiten der Spektren „isoelektronischer Ionen" betrachten. Isoelektronisch nennt man Ionen, deren Hülle die gleiche Anzahl von Elektronen enthält. Betrachten wir als Beispiel die Reihe, die mit dem Lithium beginnt: 3 Li, 4 Be, 5 B, 6 C, ... Das Lithium hat 3 Elektronen, das Beryllium 4, Bor 5, Kohlenstoff 6. Wenn wir daher die Reihe betrachten, die mit dem neutralen Lithium beginnt und durch die Ionen Be^+, B^{++}, C^{+++}, ... fortgesetzt wird, dann haben alle diese Ionen die gleiche Elektronenzahl wie das Lithium, d. h. 3. In der Spektroskopie ist es üblich, neutrale Atome durch Hinzusetzen einer römischen I zum Symbol, einfach ionisierte durch eine II usw. zu kennzeichnen. Die Reihe

$$\text{Li I},\ \text{Be II},\ \text{B III},\ \text{C IV}, \ldots$$

[1]) Es wird dem Leser empfohlen, zu diesem Punkt zurückzukehren, nachdem er § 222 durchgelesen hat.

ist also isoelektronisch. Das experimentelle Studium der Spektren solcher isoelektronischer Reihen wird durch die Schwierigkeit der Erzeugung hochionisierter Atome erschwert. Diese Schwierigkeit wurde von Millikan und Bowen überwunden, die die Methode der „heißen Funken“, d. h. Funken in hohem Vakuum, anwandten.

Die interessanteste Besonderheit der Spektren isoelektronischer Atome und Ionen ist die, daß diese Spektren vollkommen analoge Struktur besitzen. In Abb. 265 sind die Photographien der ersten Glieder der Hauptserie für die isoelektronische Reihe mit 19 Elektronen abgebildet:

K I, Ca II, Sc III, Ti IV, V V.

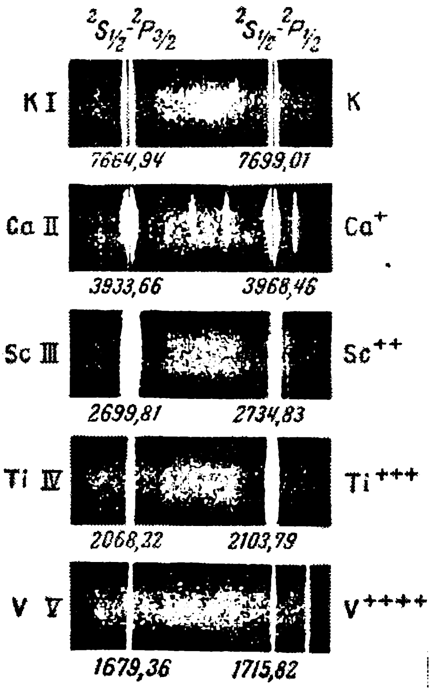


Abb. 265. Dubletts der Hauptserie für die isoelektronische Reihe K I, Ca II, Sc III, Ti IV, V V

Wie man sieht, sind diese Linien bei allen Atomen Dubletts, während sonst, wie z. B. beim neutralen Kalzium, Singulett- und Triplettlinien auftreten.

Für uns sind diejenigen Ergebnisse besonders wichtig, die wir durch Vergleich gleicher Terme für verschiedene isoelektronische Atome erhalten haben. Diese Terme sind im allgemeinen nicht wasserstoffähnlich. Man kann sie natürlich durch die Rydberg-Formel

$$T = \frac{RZ_{\text{eff}}^2}{(n + \sigma)^2}$$

darstellen, worin Z_{eff} die effektive Ladung des Rumpfes ist, d. h., für das neutrale Atom ist $Z_{\text{eff}} = 1$, für das einfache ionisierte Ion $Z_{\text{eff}} = 2$ usw.

Wie wir aber in § 206 gesehen haben, kann man die Korrektur nicht nur an der Hauptquantenzahl n, sondern auch an der Kernladung Z anbringen. So sind wir in § 206 und schon früher bei der Beschreibung der Röntgenspektren in Bd. 1, § 37 vorgegangen. Wir schrieben z. B. die Frequenz der K_α-Linie für die verschiedenen Elemente in der Form

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right),$$

worin Z die wahre Kernladung ist. Hieraus folgt, daß die K-Terme die Form

$$T_n = \frac{R(Z-1)^2}{n^2}$$

haben. Analog werden die L-Terme durch die Formel

$$T_n = \frac{R(Z-7{,}4)^2}{n^2}$$

dargestellt.

Wir sehen, daß bei dieser Art der Termdarstellung die Formel der Balmer-Terme

$$T_n = \frac{RZ^2}{n^2}$$

als Grundlage genommen und die Korrektur an der Kernladung Z angebracht wird, während diese Korrektur in der Rydberg-Formel bei der Hauptquantenzahl n steht. Es ist klar, daß die Korrektur in den Röntgentermen eine „Abschirmungszahl" darstellt. Sie ist ein Maß dafür, wieweit die Kernladung für das Strahlungselektron durch die übrigen Elektronen

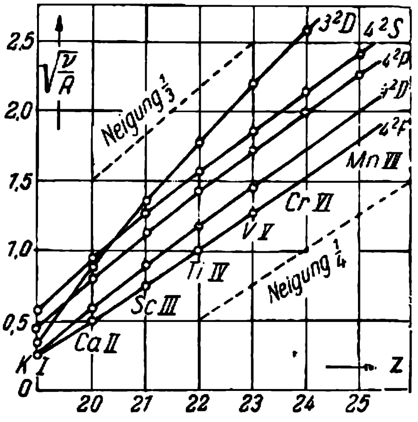


Abb. 266. Moseley-Diagramm für die isoelektronische Reihe K I, Ca II usw.

kompensiert wird. Wenn wir die Korrektur mit δ bezeichnen, erhalten wir die Formel der Röntgenterme in der Form

$$\sqrt{\frac{T_n}{R}} = \frac{1}{n}(Z - \delta).$$

Das ist aber das wohlbekannte MOSELEYsche Gesetz (Bd. I, § 37), nach dem zwischen $\sqrt{T}$ und Z ein linearer Zusammenhang besteht.

Wenn wir auf der Ordinatenachse $\sqrt{\frac{T}{R}}$ statt $\sqrt{T}$ und auf der Abszissenachse Z auftragen, dann erhalten wir eine Gerade, deren Tangens des Neigungswinkels zur x-Achse gleich $\frac{1}{n}$ ist.

MILLIKAN und BOWEN haben die Terme der isoelektronischen Reihen nach der MOSELEYschen Formel berechnet. In Abb. 266 sind die MOSELEY-Diagramme für die mit K I beginnende isoelektronische Reihe eingetragen. Wie man sieht, erhält man in allen Fällen für die Terme mit gleicher Hauptquantenzahl nahezu exakte Geraden, die parallel zu der Geraden mit der Neigung $\frac{1}{n}$ verlaufen. Für das Folgende ist es sehr wichtig, daß die Gerade des 3^2D-Terms die Gerade 4^2S zwischen $Z = 20$ und $Z = 21$ schneidet, so daß bei K I der 3^2D-Term tiefer als der 4^2S-Term liegt.

In der Tabelle XXXII sind die Werte der Abschirmungszahl δ für verschiedene Terme aufgeführt, die aus den empirischen Ergebnissen für die Reihe K I, Ca II, ..., deren Atome je 19 Elektronen haben, berechnet wurden. Wie zu erwarten war, zeigt sich die abschirmende Wirkung der 18 Elektronen bei den D- und F-Termen fast restlos, während bei den S-Termen der Wert von δ zwischen 17,7 und 15,6 liegt.

Tabelle XXXII

Term	K I	Ca II	Sc III	Ti IV	V V
3^2D	17,95	17,40	16,95	16,65	16,43
4^2S	16,74	16,26	15,96	15,74	15,58
4^2D	17,95	17,61	17,43	17,29	17,18
4^2F	18,00	17,99	17,97	17,94	17,91

§ 221. Theorie des Periodischen Systems von D. I. MENDELEJEW

Wir wenden uns jetzt der Theorie des Periodischen Systems zu und beginnen mit einer kurzen Formulierung derjenigen Prinzipien, auf die sich diese Theorie stützt.

1. *Quantenzahlen.* Der energetische Zustand eines Elektrons im Atom wird nach dem Vorangegangenen durch vier Quantenzahlen charakterisiert. Wir wissen jedoch, daß in einem aus Kern und Elektronen bestehenden System, in welchem COULOMBsche Wechselwirkungen herrschen, alle Zustände mit gleichen Quantenzahlen n, l, j und verschiedenen m untereinander gleich sind, wenn kein äußeres Feld vorhanden ist (Entartung). Diese Entartung

verschwindet im Magnetfeld, wobei sich im schwachen Feld jedes Niveau mit dem gegebenen Wert von j in $2j+1$ Unterniveaus aufspaltet (§ 209). Ein starkes Feld zerreißt jedoch die Kopplung der Vektoren $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ (§ 210), so daß die Quantenzahl j ihren Sinn verliert. Der Zustand wird dann durch das System der Quantenzahlen n, l, m_l, m_s beschrieben. Um alle möglichen Zustände in Betracht zu ziehen, werden wir voraussetzen, daß sich das Atom in einem Magnetfeld befindet, das stark genug ist, um nicht nur die Kopplung zwischen den Momenten l_i und s_i jedes einzelnen Elektrons, sondern auch die Kopplung zwischen den Vektoren $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{l}_i$ verschiedener Elektronen aufzuheben. Deshalb benutzen wir das System der Quantenzahlen n, l, m_l, m_s.

2. *Das* PAULI-*Prinzip und das ideale System der Elemente.* Dieses Prinzip, dessen theoretische Grundlagen wir in den Paragraphen 214 und 215 dargelegt haben, formulieren wir für den uns hier interessierenden Fall folgendermaßen: *Im Atom kann nur ein Elektron in einem Zustand existieren, der durch gegebene Werte der vier Quantenzahlen bestimmt ist,* d. h., zwei Elektronen, die an ein und dasselbe Atom gebunden sind, müssen sich mindestens durch eine Quantenzahl unterscheiden.

Wir werden gleich sehen, daß das PAULI-Prinzip die Zahl der Elektronen streng begrenzt, die an ein und dasselbe Atom gebunden sind und drei oder zwei gleiche Quantenzahlen oder eine bestimmte Quantenzahl besitzen. Wir stellen vor allen Dingen fest, wie viele Elektronen mit drei gleichen Quantenzahlen n, l, m_l in einem Atom existieren können. Diese Elektronen müssen verschiedene Werte der vierten Quantenzahl m_s haben, m_s kann jedoch nur die zwei Werte $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ annehmen. Es können also im Atom nur zwei Elektronen mit drei gleichen Quantenzahlen n, l, m_l existieren. Es sollen jetzt die zwei Quantenzahlen n und l festgelegt sein; wieviel Elektronen mit gleichen Werten dieser Quantenzahlen kann es dann in ein und demselben Atom geben? Bei gegebenem Wert von l kann die Quantenzahl m_l $2l+1$ verschiedene Werte annehmen (§ 181), und für jedes Tripel der Quantenzahlen n, l, m_l kann m_s noch zwei verschiedene Werte haben. Im Atom können sich also gleichzeitig $2(2l+1)$ Elektronen mit den gleichen zwei Quantenzahlen n und l befinden, d. h., es kann zwei s-Elektronen ($l=0$), sechs p-Elektronen ($l=1$), zehn d-Elektronen ($l=3$) usw. geben.

Wir überlegen uns schließlich noch, wieviel Elektronen es in einem Atom geben kann, die die gleiche Hauptquantenzahl n besitzen. Bei festgelegtem Wert von n können sich die Elektronen erst einmal durch ihre Quantenzahl l unterscheiden, die insgesamt n Werte annimmt: $0, 1, 2, \ldots, n-1$, und bei festgelegten n und l können sich im Atom gleichzeitig $2(2l+1)$ Elektronen befinden. Die Höchstzahl an Elektronen mit gleicher Hauptquantenzahl ist also durch die Summe

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2(1+3+5+\ldots) = 2n^2$$

darstellbar.

Wir erkennen somit, daß die auf den ersten Blick etwas geheimnisvolle Formel $2n^2$, die die Anzahl der Elemente in den verschiedenen Reihen des Periodischen Systems angibt, eine außerordentlich einfache Bedeutung hat: sie ist die maximale Zahl von Elektronen mit der gleichen Hauptquantenzahl, die an das Atom gebunden sind. Im Atom können sich zwei Elektronen mit der Hauptquantenzahl $n=1$, 8 mit $n=2$, 18 mit $n=3$ usw. befinden.

Um sich dies besser vorstellen zu können, wird die Betrachtung folgender Tabelle von Nutzen sein:

Tabelle XXXIII

n	$l =$	0		1		2		3		4	Maximale
		s		p		d		f		g	Elektronenzahl
1		2									2
2		2	+	6							8
3		2	+	6	+	10					18
4		2	+	6	+	10	+	14			32
5		2	+	6	+	10	+	14	+	18	50

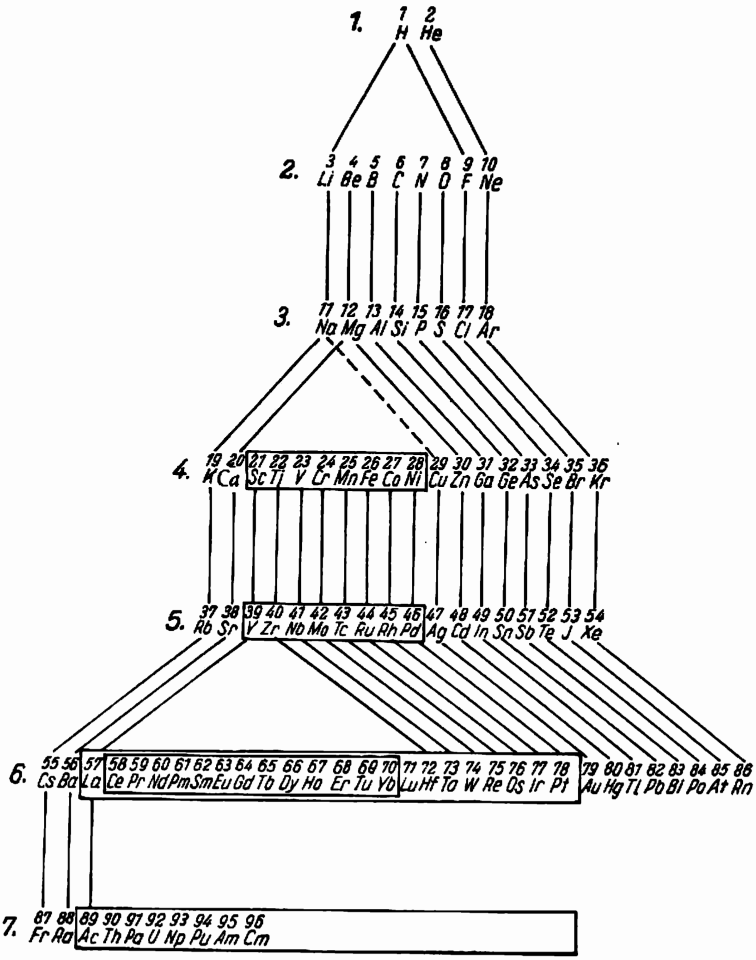


Abb. 267. Das Periodische System der Elemente

Die Gesamtheit der Elektronen mit derselben Hauptquantenzahl bildet eine *Schicht* oder *Schale*. Die Gesamtheit der Elektronen mit gleichem l bildet eine Untergruppe. Für die verschiedenen Werte von n tragen die Schalen Bezeichnungen, die im Zusammenhang mit der Terminologie der Röntgenspektroskopie stehen, und zwar

n	1	2	3	4	5
Schale	K	L	M	N	O

Aus dem Gesagten geht hervor, daß das Pauli-Prinzip folgendes Bild vom Bau der Elektronenhülle der Atome zur Erklärung der Periodizität des Systems der Elemente liefert: Jedes sich neu angliedernde Elektron begibt sich in einen Zustand mit kleinstmöglichen Quantenzahlen. Diese Elektronen füllen nach und nach die Schale mit ein und derselben Hauptquantenzahl n. Wenn ihre Zahl das Maximum für das gegebene n erreicht, d. h. $2n^2$, so ist der Aufbau der Schale beendet; es entsteht dabei eine stabile Struktur (Edelgas). Mit dem nächsten Elektron beginnt schon die Auffüllung einer neuen Schale usw. Das ideale Periodische System müßte nach dem Pauli-Prinzip einen Bau und eine Länge der Perioden haben, wie sie in Tabelle XXXIII angegeben sind.

Mit dieser idealen Struktur des Systems der Elemente vergleichen wir die reale Tabelle, die in Abb. 267 in einer für unseren Zweck bequemeren Form dargestellt ist: Jede Reihe beginnt links mit einem Alkalimetall und endet rechts mit einem Edelgas. Analoge Elemente sind durch Striche verbunden. Die Zahl der Elemente in den Zeilen 2, 8, 8, 18, 18, 32 entspricht der Formel $2n^2$. Die Reihenfolge dieser Zahlen stimmt jedoch nicht mit der betrachteten idealen Tabelle überein, nach der die Zahl der Elemente in den Zeilen 2, 8, 18, 32 sein müßte, und zwar *ohne Wiederholung* von 8 und 18.

§ 222. Der Aufbau der einzelnen Perioden des Systems der Elemente von D. I. Mendelejew

Die Ursache für die Abweichung der realen Tabelle der Elemente von der idealen ist in den übermäßig idealisierten Annahmen zu sehen, die der letzteren zugrunde liegen. Es wird vorausgesetzt, daß sich jedes Elektron in einem Zentralfeld bewegt und zwischen den verschiedenen Elektronen keine Wechselwirkung besteht, während genau genommen in Wirklichkeit weder das eine noch das andere der Fall ist. Wir wollen in diesem Paragraphen den Aufbau des realen Periodischen Systems verfolgen und feststellen, an welchen Stellen die ideale Ordnung bei der Auffüllung der Schalen und Untergruppen gestört wird und zu welchen Folgerungen das führt.

Wir beginnen mit dem „nackten" Kern mit der Ladung $+ e$ und nähern ihm in Gedanken ein Elektron. Es muß den Zustand mit den kleinsten Quantenzahlen einnehmen, und da noch alle Zustände „frei" sind, wird das erste Elektron mit der Hauptquantenzahl $n = 1$ und der azimutalen Quantenzahl $l = 0$, d. h. im $1s$-Zustand gebunden. Wir vergrößern die Kernladung um 1 und nähern dem Atom unendlich langsam das zweite Elektron. Wir erhalten so das neutrale Heliumatom. Sein zweites Elektron wird auch im $1s$-Zustand gebunden, da nach dem Pauli-Prinzip (siehe Tabelle XXXIII) zwei Elektronen in diesem Zustand gebunden werden können.

Wenn wir die Kernladung noch um 1 erhöhen und das dritte Elektron nähern, erhalten wir das Lithiumatom. Dieses dritte Elektron kann nicht mehr im $1s$-Zustand gebunden werden, da die K-Schale ($n = 1$) beim Helium bereits voll besetzt ist. Der nächste energetisch mögliche Zustand ist der $2s$-Zustand ($n = 2$), ($l = 0$). Das Valenzelektron des Lithiums wird gerade in diesem Zustand gebunden (Abb. 268). Das vierte Elektron des Berylliums

wird auch im $2s$-Zustand gebunden, das fünfte Elektron des Bors jedoch kann nicht in diesem $2s$-Zustand gebunden werden, da die Untergruppe $n = 2$, $l = 0$ beim Beryllium bereits besetzt ist. Das fünfte Elektron des Bors muß also in einem Zustand mit höherem l-Wert, und zwar $n = 2$, $l = 1$, d. h. im $2p$-Zustand, gebunden werden. Die folgenden Elektronen bis zum zehnten (beim Neon) werden im gleichen Zustand gebunden, da die Untergruppe $n = 2$, $l = 1$ sechs Plätze hat (siehe Tabelle XXXIII). Den Bau des Neonatoms kann man also durch die Formel $1s^2\, 2s^2\, 2p^6$ beschreiben, wobei die Exponenten die Anzahl der Elektronen angeben, die in dem gegebenen Zustand gebunden sind. Alle diese Voraussagen werden durch die spektroskopischen Befunde tadellos bestätigt.

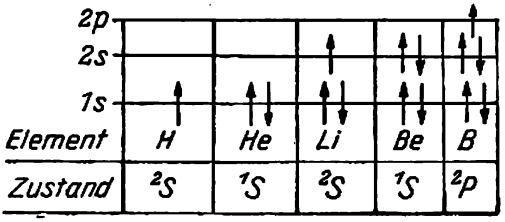


Abb. 268. Grundzustände der Atome H, He, Li, Be, B

In den Abb. 269 und 270 sind die MOSELEYschen Diagramme für die isoelektronischen Reihen Li I, Be II, B III, C IV und B I, C II, N III, O IV angegeben. Das erste Diagramm kennzeichnet die Bindung des dritten Elektrons, das zweite die Bindung des fünften Elektrons. Abb. 269 zeigt, daß die Gerade für 2^2S, des Grundterms der Systeme mit drei Elektronen (Li I, Be II usw.), der punktierten Geraden $n = 2$ genau parallel läuft, woraus folgt (siehe § 220), daß dem dritten Elektron tatsächlich die Hauptquantenzahl $n = 2$ zugeschrieben werden muß. In der gleichen Weise sieht man aus Abb. 270, daß die Gerade für 2^2P, des Grundterms der Systeme mit fünf Elektronen (B I, C II usw.), parallel zur Geraden $n = 2$ verläuft.

Da das zehnte Elektron des Neons die L-Schale ($n = 2$) abschließt, wird das elfte Elektron des Natriums im $3s$-Zustand ($n = 3$, $l = 0$) gebunden. Dies stimmt sowohl mit den spek-

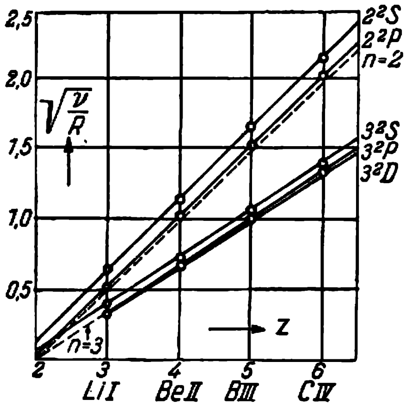


Abb. 269. Die Bindung des dritten Elektrons

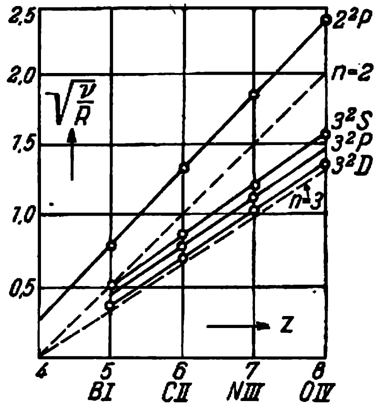


Abb. 270. Die Bindung des fünften Elektrons

troskopischen als auch mit den chemischen Eigenschaften gut überein. Das Alkalimetall Natrium erweist sich dem Lithium analog. Die weitere Auffüllung verläuft normal (siehe Tabelle XXXIV, S. 236—237) bis zum Argon ($Z = 18$), bei dem die Untergruppe $3p$ abgeschlossen wird. Das neunzehnte Elektron des Kaliums muß nach dem idealen Schema im $3d$-Zustand gebunden werden. Das läßt sich jedoch weder mit den chemischen noch mit den spektroskopischen Ergebnissen vereinbaren. Vom chemischen Standpunkt aus muß das Kalium als Alkalimetall in Analogie zum Natrium und Lithium ein Valenzelektron im $4s$-Zustand besitzen. Die spektroskopischen Befunde erlauben eine Erklärung, warum sich das neunzehnte Elektron des Kaliums in Wirklichkeit im $4s$- und nicht im $3d$-Zustand anlagert.

Das Moseleysche Diagramm für die mit dem Kalium beginnende isoelektronische Reihe (Abb. 266) zeigt, daß die Gerade für den 3^2D-Term die Gerade 4^2S zwischen $Z = 20$ und $Z = 21$ schneidet. Deshalb liegt der 3^2D-Term beim Kalium tiefer als der 4^2S-Term. Da nun aber die Terme der Energie mit negativem Vorzeichen proportional sind, entspricht dem $3d$-Zustand des Kaliums eine größere Energie als dem $4s$-Zustand, so daß sich das neunzehnte Elektron im nicht angeregten Zustand gerade im $4s$- und nicht im $3d$-Zustand angliedern muß. Das zwanzigste Elektron des Kalziums wird ebenfalls im $4s$-Zustand gebunden. Erst beim Skandium ($Z = 21$) wird die normale Auffüllung der Untergruppe $3d$ wieder aufgenommen. Das entspricht vollkommen der Tatsache, daß beim Skandium die Gerade 3^2D schon über der Geraden 4^2S liegt. Eine analoge Unterbrechung der normalen Auffüllung der Untergruppen und Schalen findet beim Rubidium statt. Sein 37. Elektron wird nicht im $4d$-Zustand (siehe Tabelle XXXIV), sondern im $5s$-Zustand gebunden, was wiederum sowohl durch die chemischen als auch spektroskopischen Tatsachen bestätigt wird. Das 38. Elektron des Strontiums wird auch im $5s$-Zustand gebunden, aber vom 39. Element an (Yttrium) und bis zum 46. (Palladium) einschließlich wird die Untergruppe $4d$ aufgefüllt.

Eine sehr interessante und wichtige Abweichung vom normalen Gesetz der Auffüllung der Schalen findet bei den sogenannten seltenen Erden statt ($Z = 58 - 71$). Das 57. Elektron des Lanthans wird im $5d$-Zustand gebunden, die Untergruppe $6s$ ist bei ihm voll besetzt, wie auch die Untergruppen $5s$ und $5p$, die weiter im Innern liegende Untergruppe $4f$ jedoch ist noch leer. Die Auffüllung dieser inneren Untergruppe $4f$ beginnt beim Zerium ($Z = 58$) und geht bis zum Lutetium ($Z = 71$); dabei bleiben die äußeren Untergruppen unverändert. Dadurch wird die bekannte, in chemischer Hinsicht außerordentlich enge Verwandtschaft aller Elemente vom Zerium bis zum Lutetium gut erklärt.

Eine glänzende Bestätigung der Richtigkeit der Theorie des Periodischen Systems ist die Entdeckung des Elements 72. Bis 1922 blieb es unbekannt, jedoch wurde für dieses Element ein Platz in der Reihe der seltenen Erden reserviert. Bohr hat jedoch darauf hingewiesen, daß die Gruppe der seltenen Erden nach theoretischen Überlegungen mit dem 71. Element abgeschlossen sein muß und das Element 72 dem Zirkon ($Z = 40$) analog sein müsse. Auf Grund dieser Voraussage entdeckte man in Zirkonerzen tatsächlich das neue Element, das an Hand seines Röntgenspektrums mit dem Element 72 identifiziert wurde und sich seinen chemischen Eigenschaften nach dem Zirkon analog erwies.

In letzter Zeit wurde festgestellt, daß hinter dem 89. Element (Aktinium) eine zweite Gruppe von seltenen Erden beginnt, bei denen die Auffüllung in der Untergruppe $5f$ vor sich geht. Zu dieser zweiten Gruppe von seltenen Erden gehören außer den schweren Elementen 90 Th, 91 Pa und 92 U, die in der Natur vorkommen, auch die künstlich hergestellten „Transurane“ 93 Np, 94 Pu, 95 Am, 96 Cm, 97 Bk und 98 Cf. Näheres darüber siehe § 310.

Die Tabelle XXXIV zeigt den Aufbau der Atome aller Elemente.

Tabelle XXXIV

Z	Element	K	L		M			N				O				P			Q	Ionisationspotential (in eV)
		1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	6s	6p	6d	7s	
1	H	1																		13,539
2	He	2																		24,45
3	Li	2	1																	5,37
4	Be	2	2																	9,48
5	B	2	2	1																8,4
6	C	2	2	2																11,217
7	N	2	2	3																14,47
8	O	2	2	4																13,56
9	F	2	2	5																18,6
10	Ne	2	2	6																21,48
11	Na	2	2	6	1															5,12
12	Mg	2	2	6	2															7,61
13	Al	2	2	6	2	1														5,96
14	Si	2	2	6	2	2														7,39
15	P	2	2	6	2	3														10,3
16	S	2	2	6	2	4														10,31
17	Cl	2	2	6	2	5														12,96
18	Ar	2	2	6	2	6														15,69
19	K	2	2	6	2	6		1												4,32
20	Ca	2	2	6	2	6		2												6,09
21	Sc	2	2	6	2	6	1	2												6,57
22	Ti	2	2	6	2	6	2	2												6,80
23	V	2	2	6	2	6	3	2												6,76
24	Cr	2	2	6	2	6	5	1												6,74
25	Mn	2	2	6	2	6	5	2												7,40
26	Fe	2	2	6	2	6	6	2												7,83
27	Co	2	2	6	2	6	7	2												7,81
28	Ni	2	2	6	2	6	8	2												7,606
29	Cu	2	2	6	2	6	10	1												7,69
30	Zn	2	2	6	2	6	10	2												9,35
31	Ga	2	2	6	2	6	10	2	1											5,97
32	Ge	2	2	6	2	6	10	2	2											7,85
33	As	2	2	6	2	6	10	2	3											9,4
34	Se	2	2	6	2	6	10	2	4											
35	Br	2	2	6	2	6	10	2	5											11,80
36	Kr	2	2	6	2	6	10	2	6											13,940
37	Rb	2	2	6	2	6	10	2	6			1								4,16
38	Sr	2	2	6	2	6	10	2	6			2								5,67
39	Y	2	2	6	2	6	10	2	6	1		2								6,5
40	Zr	2	2	6	2	6	10	2	6	2		2								
41	Nb	2	2	6	2	6	10	2	6	4		1								
42	Mo	2	2	6	2	6	10	2	6	5		1								7,35
43	Tc	2	2	6	2	6	10	2	6	6		1								
44	Ru	2	2	6	2	6	10	2	6	7		1								7,7
45	Rh	2	2	6	2	6	10	2	6	8		1								7,7
46	Pd	2	2	6	2	6	10	2	6	10										8,5
47	Ag	2	2	6	2	6	10	2	6	10		1								7,54
48	Cd	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2								8,95

1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	6s	6p	6d
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	1					
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	2					
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	3					
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	4					
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	5					
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6					
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6			1		
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6			2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	3	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	4	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	5	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	6	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	8	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	9	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	10	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	12	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	13	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	8		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		1		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2		
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	1	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	2	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	3	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	4	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	5	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	1	2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3	2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	5	2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	6	2	6	1
2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1

§ 223. Röntgenspektren

Wie schon in Teil I, § 36 gezeigt wurde, besteht der charakteristische Zug der Röntgenspektren in ihrer Einfachheit und völligen Einheitlichkeit. Wir sahen, daß sich die optischen Spektren beim Übergang von einer Gruppe des Periodischen Systems zu einer anderen wesentlich ändern. Dagegen zeigen die Röntgenspektren *aller Elemente* keine große Linienzahl. Diese Linien sind ähnlich angeordnet und haben ein und dieselbe Feinstruktur. Bei Vergrößerung der Atomnummer Z verschiebt sich das ganze Röntgenspektrum gewissermaßen in den kurzwelligen Teil, ohne dabei seine Struktur zu ändern. Die Gesetzmäßigkeit dieser Verschiebung überrascht ebenfalls durch ihre Einfachheit. Sie wird durch das Moseleysche Gesetz ausgedrückt (siehe Teil I, § 37), nach dem die Quadratwurzel aus der Frequenz entsprechender Spektrallinien verschiedene Atome einfach der Atomnummer proportional ist.

Die Einfachheit und der *monotone Charakter* (d. h. das Fehlen einer Periodizität), mit der sich die Röntgenspektren mit der Atomnummer ändern, weist darauf hin, daß die Röntgenspektren nicht in den äußeren, sondern in den inneren Teilen der Atome entstehen. Folgende bemerkenswerte Besonderheit der Absorptionsröntgenspektren gibt den Schlüssel für die Erklärung ihrer Herkunft: In den Röntgenspektren fehlt die *Linienumkehr*, die für die optischen Spektren charakteristisch ist (als Schulbeispiel sei hier nur an die Umkehr der D-Linie des Natriums erinnert, die man beobachten kann, wenn Licht mit kontinuierlichem Spektrum durch Natriumdämpfe geschickt wird). Wenn man durch eine Schicht irgendeines Elementes eine Röntgenbremsstrahlung schickt, die in ein kontinuierliches Spektrum zerlegt werden kann (siehe Teil I, § 36), dann erscheinen im Absorptionsspektrum die für das Element charakteristischen dunklen *Linien* nicht, sondern es zeigen sich kontinuierliche breite Bänder, die von der langwelligen Seite scharf abgegrenzt sind. Das kann man anschaulich am Beispiel der K-Serie darstellen, wo die Beziehungen besonders einfach sind. In Abb. 271 ist unten schematisch das Emissionslinienspektrum der K-Serie und oben der Verlauf der Absorption beim gleichen Element aufgetragen.

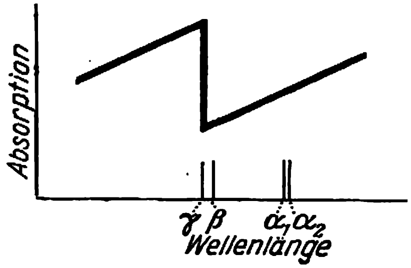


Abb. 271. Die Beziehung zwischen dem Röntgenemissions- und -absorptionsspektrum der K-Serie

Wie man sieht, wird die Absorption bei kürzerer Wellenlänge geringer, aber bei einer bestimmten, nahe der K_γ-Linie gelegenen Wellenlänge steigt sie steil an, um dann bei weiterer Verminderung der Wellenlänge wieder stetig abzunehmen. Die Grenze des entstehenden verwaschenen Absorptionsbandes ist in Wirklichkeit gegen die K_γ-Linie ein wenig nach der kurzwelligen Seite verschoben und stimmt genau mit der Grenze der K-Serie überein.

In Abb. 272 ist eine Photographie wiedergegeben, auf der deutlich die Absorptionsbänder von Ag und Br (Photoemulsion) mit ihren scharfen Rändern zu sehen sind. Die Kontinuität der Absorptionsröntgenspektren weist sofort darauf hin, daß einer der beiden bei der Absorption kombinierenden Zustände nicht gequantelt ist (siehe Teil I, § 105). Da das Absorptionsband auf der langwelligen Seite einen scharfen Rand hat, der mit der Seriengrenze übereinstimmt, sind wir berechtigt, folgende Schlußfolgerung zu ziehen: Der Prozeß, der bei der Absorption der Wellenlänge, die dem Rand des Bandes entspricht, vor sich geht, besteht in der Lösung der Bindung eines Elektrons mit dem Atom, d. h. in der Ionisation des Atoms. Bei größeren Wellenlängen reicht die Energie des Quants $h\nu$ noch nicht für die Loslösung des Elektrons aus, bei kleineren Wellenlängen reicht die Energie jedoch außer für die Loslösung auch noch dazu aus, dem Elektron eine kinetische Energie zu erteilen. Da nun die Röntgenstrahlen in den inneren Teilen des Atoms entstehen, so handelt es sich hier um die Loslösung eines der *inneren* Elektrone.

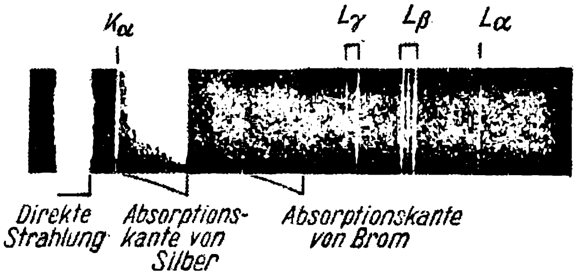


Abb. 272. Absorptionsbänder des Broms und Silbers

Auf Kossel geht folgende einfache Vorstellung von der Entstehung der Röntgenspektren zurück. Für die Entstehung des Emissionsspektrums ist es notwendig, das Atom vorher in einen angeregten Zustand zu überführen. Diese Anregung kann im Falle der Röntgenspektren nur in der Loslösung eines inneren Elektrons bestehen, was gerade auch durch den Charakter der Absorptionsröntgenspektren bestätigt wird. Wenn durch einen von außen einfallenden Kathoden- oder Röntgenstrahl eines der beiden Elektronen der innersten Schale (K-Schale) losgelöst wird, dann kann der freigewordene Platz durch ein Elektron einer weiter außen gelegenen Schale (L, M, N) besetzt werden. Im ersten Fall wird die K_α-Linie, im zweiten die K_β-Linie und im dritten die K_γ-Linie ausgestrahlt.

Diese Vorstellung von der Entstehung des K-Spektrums entspricht jener Form des Moseleyschen Gesetzes, die wir im § 37 des ersten Teiles kennengelernt haben. Für die K_α-Linie schrieben wir nämlich

$$\nu_{K_\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right),$$

d. h., die Wellenzahl der K_α-Linie ergibt sich durch Kombination zweier Terme, von denen der eine der Hauptquantenzahl $n = 1$ (K-Term) und der andere $n = 2$ (L-Term) entspricht. Diese Terme sind, wie man aus der Formel sieht, den wasserstoffähnlichen sehr nahe. Der Unterschied liegt allein darin, daß an Stelle der Atomnummer Z im Termausdruck $Z - 1$ steht. Dieser Umstand kann im einfachsten Fall der K-Serie mit einer „Abschirmung" der Gesamtkernladung Z durch das eine nach der Ionisierung in der K-Schale zurückbleibende Elektron erklärt werden.

Die Entstehung der weiteren Serien L, M, ... kann ähnlich erklärt werden. Die Absorptionsspektren dieser Serien haben jedoch eine Eigenart, die wir bei der K-Serie nicht vorfinden: Die Grenze des kontinuierlichen Absorptionsspektrums weist für diese Serien eine Struktur auf; bei der L-Serie ist sie dreifach, bei der M-Serie fünffach und bei der N-Serie siebenfach. Diese wichtige Besonderheit kann einfach erklärt werden. Wir werden uns damit in § 224 beschäftigen. Hier beschränken wir unsere Betrachtungen auf den Mechanismus der Entstehung der Röntgenspektren in *groben Zügen* und untersuchen weder die Strukturen der Bandkanten noch andere feinere Einzelheiten der Röntgenspektren. In dieser groben Darstellung ist die Entstehung der L-Serie durch den Übergang der Elektronen aus den M, N, ...-Schalen auf den durch vorherige Ionisation freigewordenen Platz der L-Schale zu erklären, die Entstehung der M-Serie durch Übergang der Elektronen aus den Schalen N, O, ... zum freien Platz in der M-Schale usw.

§ 224. Schema der Energieniveaus für Röntgenspektren

Aus den Darstellungen des vorigen Paragraphen ergibt sich folgendes Schema der Energieniveaus, deren Kombinationen die Röntgenspektrallinien ergeben: Bei der Loslösung eines Elektrons aus der K-Schale geht das Atom aus dem Grundzustand in einer angeregten Zustand über, der in Abb. 273 durch den Buchstaben K bezeichnet ist. Den Abstand zwischen dem Grund- und diesem K-Niveau ist offensichtlich die Energie, die dem K-Term entspricht, oder die Ionisationsenergie der K-Schale in Wellenzahlen ausgedrückt. Beim Übergang vom K-Niveau zu den Niveaus L, M, N entstehen die Emissionslinien K_α, K_β, K_γ. Dem wahrscheinlichsten Übergang $K \to L$ entspricht dabei die intensivste Linie der K-Serie, die K_α-Linie.

Die Anregung aus dem Grundzustand in das L-Niveau, die der Ionisation der L-Schale entspricht, ruft die L-Serie hervor, deren Linien durch die Übergänge $L \to M$, $L \to N$ entstehen.

Die Lage der Niveaus K, L, M, ... über dem Grundniveau bestimmt also die Lage der K, L, M, . . . -Absorptionskanten. (Die Struktur der Kanten wollen wir hier nicht betrachten.)

Wir vergleichen jetzt das Schema der Röntgenenergieniveaus mit dem der optischen Niveaus. Als Beispiel möge ein beliebiges, bereits betrachtetes Schema dienen. Man sieht leicht, daß zwischen beiden Schemata ein wesentlicher Unterschied besteht: im ersten Fall (optische Niveaus) liegt das Niveau mit der kleinsten Hauptquantenzahl $n = 1$ *tiefer als alle anderen*, während im zweiten Fall (Röntgenniveaus) das K-Niveau ($n = 1$) *höher als alle anderen* liegt; das ganze Schema der Röntgenniveaus ist die völlige Umkehrung des optischen. Der Grund dafür liegt im Unterschied der Entstehung der optischen und Röntgenspektren. Die optischen Spektren entstehen durch Anregung eines äußeren, schwach gebundenen Elektrons aus dem Zustand größter Bindungsenergie und kleinster Hauptquantenzahl in einen Zustand mit höheren Quantenzahlen und kleinerer Bindungsenergie. Die Anregungsenergie ist also um so größer, je kleiner die Bindungsenergie im angeregten Zustand und *je größer die dem angeregten Zustand entsprechende Hauptquanten, zahl ist.* Bei den Röntgenspektren besteht die Anregung in einer Loslösung des Elektrons- das im Grundzustand des Atoms in irgendeiner Schale gebunden ist. Die Anregungsenergie ist also um so größer, je fester das Elektron gebunden ist; mit anderen Worten, die größte Energie entspricht der Loslösung eines Elektrons aus der tiefsten Schale, die dem Kern am nächsten ist, d. h. der *Schale mit der kleinsten Hauptquantenzahl.*

Die Beziehung zwischen den optischen und den Röntgenniveaus kann auch noch anders anschaulich dargestellt werden. Dazu legen wir fest, daß die Ionisationsenergie des am schwächsten gebundenen Außenelektrons (Valenzelektron) gleich Null sein soll (Niveau 00 in Abb. 273). Dann sind die Ionisationsenergien der inneren Elektronen positiv und wachsen mit fallender Hauptquantenzahl der Schale, in der das Elektron gebunden ist. Das K-Elektron ($n = 1$) besitzt nach dieser Rechnung die größte positive Energie, das L-Elektron ($n = 2$) eine kleinere usw. Die Röntgenemissionslinien entstehen bei den Übergängen zwischen diesen positiven Energieniveaus. Dagegen liegen die optischen Energieniveaus *tiefer* als das gewählte Nullniveau; ihre Energien *wachsen* bei Vergrößerung der Hauptquantenzahl des Außenelektrons.

So erscheint das System der optischen Energieniveaus gewissermaßen als Spiegelbild der Röntgenniveaus.

In der Spektroskopie sieht man gewöhnlich die Reihenfolge der optischen Energieniveaus als normal an. Deshalb nennt man das System der Röntgenniveaus auch umgekehrtes System. Es ist hier nötig, darauf hinzuweisen, daß unter einigen speziellen Bedingungen auch im optischen Teil des Spektrums umgekehrte Niveaus auftreten. Die Betrachtung dieser Einzelheiten muß jedoch einem speziellen Kursus über Spektroskopie vorbehalten werden.[1])

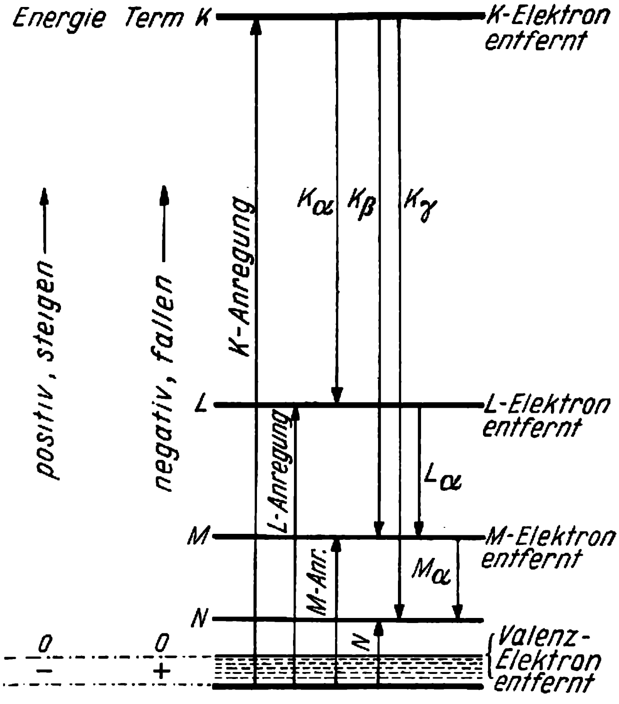


Abb. 273. Grobes Schema der Röntgenenergieniveaus und Vergleich mit dem optischen Niveauschema

[1]) Siehe S. E. Frisch: „Atomspektren" (С. Э. Фриш: Атомные спектры, ГТТИ, 1933); G. Herzberg: „Atomspektren und Atomstruktur", Verlag Steinkopf, Dresden und Leipzig 1936.

Bisher haben wir die Struktur der Absorptionsbänder außer acht gelassen. Es taucht nun die Frage auf: Warum ist die K-Grenze einfach, die L-Grenze dreifach, die M-Grenze fünffach und die N-Grenze siebenfach? Die Erklärung bereitet keine Schwierigkeit. Die K-Grenze entspricht der Loslösung eines Elektrons aus der Schale mit $n = 1$; beide Elektronen dieser Schale sind s-Elektronen, d. h., für sie ist $l = 0$, also hat j nur einen Wert $j = \frac{1}{2}$. Andererseits haben die acht Elektronen der L-Schale die Hauptquantenzahl $n = 2$, und l ist entweder 0 oder 1. Im ersten Fall ist $j = \frac{1}{2}$, im zweiten $j = \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$. Wir haben also hier drei Unterniveaus in voller Übereinstimmung mit der Vielfachheit der Grenzen. Hiernach ist die Tabelle XXXV, in der die Vielfachheit aller Kanten der Absorptionsbänder aufgeführt wird, ohne weitere Erläuterungen verständlich.

Tabelle XXXV

n	1	2			3					4						
l	0	0	1	1	0	1	1	2	2	0	1	1	2	2	3	3
j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
	K	L_3	L_2	L_1	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	N_7	N_6	N_5	N_4	N_3	N_2	N_1

In Übereinstimmung mit dieser Klassifikation der Röntgenenergieniveaus kann man ein Schema der Übergänge aufstellen, das die Entstehung der Röntgenspektren erklärt. In Abb. 274 ist ein solches Schema für Wolfram ($Z = 74$) angegeben. Bei der Betrachtung dieses Schemas überzeugt man sich leicht davon, daß es dem Schema der Alkalimetalle völlig analog ist, nur vollkommen umgekehrt (siehe z. B. Abb. 241). Wenn man die Zeichnung umdreht, so fällt einem die Analogie sofort auf: Die Anordnung der Terme K, L_3, M_5, N_7 übereinander entspricht den Termen $^2S_{\frac{1}{2}}$, die Niveaus L_2, M_4, N_6 den Termen $^2P_{\frac{1}{2}}$, die Niveaus L_1, M_3, N_5 den Termen $^2P_{\frac{3}{2}}$, die Niveaus M_2, N_4 den Termen $^2D_{\frac{3}{2}}$ usw. Dabei bleiben auch die Auswahlregeln die gleichen wie bei den Alkalimetallen: Die Röntgenspektren beliebiger Elemente sind den Spektren der Alkalimetalle völlig analog.

Wenn wir jetzt die angegebene Klassifikation der Niveaus mit Tabelle XXXIV vergleichen, dann sehen wir, daß die Zustände der Atome, deren Kombinationen zur Entstehung von Röntgenspektren führen, mit den Zuständen des frei werdenden Elektrons übereinstimmen. Das kann nur dann der Fall sein, wenn der Gesamtimpuls der Hülle, aus der das Elektron entfernt wird, vor seiner Entfernung gleich Null war: die Elektrone werden aus geschlossenen Hüllen herausgerissen. Dies entspricht nun aber gerade der Theorie des Periodischen Systems, die in den Paragraphen 221 und 222 dargestellt wurde.

In Übereinstimmung mit der vollständigen Analogie zwischen den Röntgentermen und den Termen der Alkalimetalle erweisen sich die Röntgenspektren als *Dubletts*. Als einfachstes Beispiel dieser Duplizität sei das Dublett K_{α_1, α_2} angeführt, das aus zwei dicht aufeinanderfolgenden Linien besteht. Die Entstehung dieses Dubletts kann man leicht in Abb. 274 verfolgen, aus der hervorgeht, daß es bei den Übergängen $^2P_{\frac{3}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$, $^2P_{\frac{1}{2}} - {}^2S_{\frac{1}{2}}$ entsteht, d. h. analog dem D-Dublett im Natriumspektrum. In der Röntgenspektroskopie

unterscheidet man jedoch zwei Arten von Dubletts: die sogenannten irregulären oder Abschirmungsdubletts (diese treten bei den Übergängen $\Delta l = 1$, $\Delta j = 0$ auf) und die regulären oder relativistischen Dubletts. Wir gehen jedoch hier nicht auf diesen Unterschied und die sich daraus ergebenden theoretischen Fragen ein.

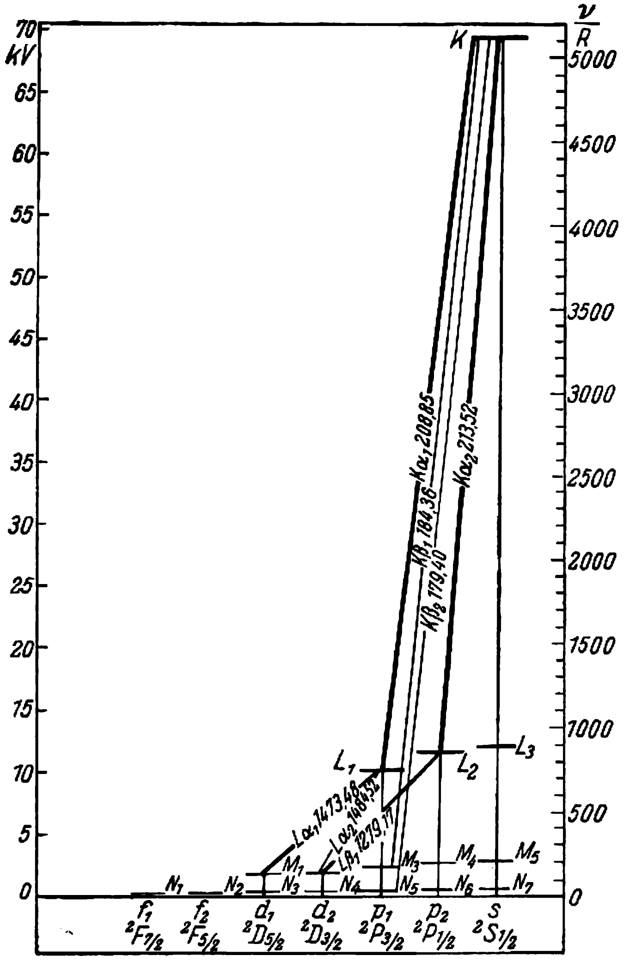


Abb. 274. Vollständiges Schema der Entstehung des Röntgenspektrums von Wolfram ($Z = 74$)

§ 225. Direkte Bestimmung der Röntgenenergieniveaus

Eine direkte Bestimmung der Röntgenenergieniveaus, die aber nicht so genau wie die spektroskopische ist, kann man an Hand einer Untersuchung der durch Röntgenstrahlen ausgelösten Photoelektronen vornehmen. In der Einsteinschen Gleichung

$$h\nu = eV + P_1 + P_2$$

ist P_2 die Austrittsarbeit der Elektronen, die eine große Rolle beim Photoeffekt an Metalloberflächen spielt; P_1 ist die Arbeit, die notwendig ist, um die Bindung des Elektrons an das Atom zu lösen. Da die Energie eines Röntgenphotons $h\nu$ einige zehn- oder hunderttausend Elektronenvolt, die Austrittsarbeit P_2 aber nur einige wenige eV ausmacht, ist die letztere verschwindend klein im Vergleich zu $h\nu$. Dagegen ist die Bindungsenergie der *inneren* Elektronen P_1 von derselben Größenordnung wie $h\nu$, besonders bei schweren Elementen. Es stellt sich weiter heraus, daß beim Photoeffekt (Photoionisation) eine Art Resonanz zu beobachten ist: Mit der größten Wahrscheinlichkeit werden solche Elektronen frei, deren Bindungsenergie sich nur wenig von der Energie des einfallenden Photons unterscheidet. Deshalb werden die Photoelektronen, die bei einer Einwirkung von Röntgenstrahlen beobachtet werden, aus den inneren Hüllen des Atoms gerissen. Wenn man die Energie des einfallenden Photons $h\nu$ kennt und experimentell die kinetische Energie des Photoelektrons eV möglichst genau bestimmt, dann kann man auf diese Weise nach der Einsteinschen Gleichung die Bindungsenergie der inneren Elektronen

$$P_1 = h\nu - eV\,,$$

d. h. die Röntgenniveaus des Atoms, finden. Da $h\nu$ und P_1 auch die Bindungsenergie des Atoms im Molekül und daher auch die van der Waalsschen Kohäsionskräfte bedeutend übertreffen, hängt der Photoeffekt mit Röntgenstrahlen in erster Näherung auch nicht davon ab, ob die Röntgenstrahlen auf freie Atome, chemische Verbindungen im Gaszustand oder feste Körper wirken. Da der Einfluß der chemischen Bindung auf die inneren Energieniveaus klein ist, geht der Photoeffekt mit Röntgenstrahlen so vor sich, als hätten wir es mit freien Atomen zu tun.

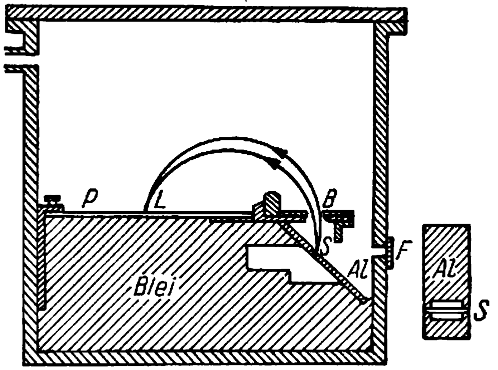


Abb. 275. Magnetischer Spektrograph zur Untersuchung des Energiespektrums von Röntgenphotoelektronen

Genaue Geschwindigkeitsmessungen an Röntgenphotoelektronen wurden zuerst mit dem magnetischen Spektrographen durchgeführt. Das Schema dieses Spektrographen ist in Abb. 275 dargestellt. Die Elektronenquelle S, auf die die Röntgenstrahlen wirken, besteht aus einem schmalen Streifen in einem leichten Aluminiumrahmen (Ansicht des Rahmens von oben ist in Abb. 275 herausgezeichnet). Die Photoelektronen, die aus dem Spalt B austreten, werden mit Hilfe eines homogenen magnetischen Querfeldes auf der Photoplatte P

fokussiert (siehe Teil I, § 9). Für Elektronen mit gleicher Geschwindigkeit v ergibt sich der Krümmungsradius der Bahn aus der bekannten Beziehung

$$H\varrho = \frac{mc}{e} v \tag{225,1}$$

(e in elektrostatischen Einheiten). Da für Röntgenstrahlen die Geschwindigkeiten der Elektronen ziemlich groß sind, muß man für die Masse den relativistischen Ausdruck

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

benutzen. Damit nimmt (225,1) die Form

$$H\varrho = \frac{m_0 c^2}{e} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{225,2}$$

an. Die gesuchte kinetische Energie der Elektronen ist dann

$$E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \tag{225,3}$$

Infolge der Fokussierung durch das homogene magnetische Querfeld bilden die Elektronen mit ein und derselben Geschwindigkeit v auf der Photoplatte eine Linie; verschiedene Geschwindigkeiten entsprechen verschiedenen Linien. Wenn man ihre Lage ausmißt, kann man leicht aus der Geometrie der Vorrichtung für jede Linie die Größe ϱ ermitteln, und bei bekannter Feldstärke H kann man nach (225,2) β und damit auch E_{kin} berechnen.

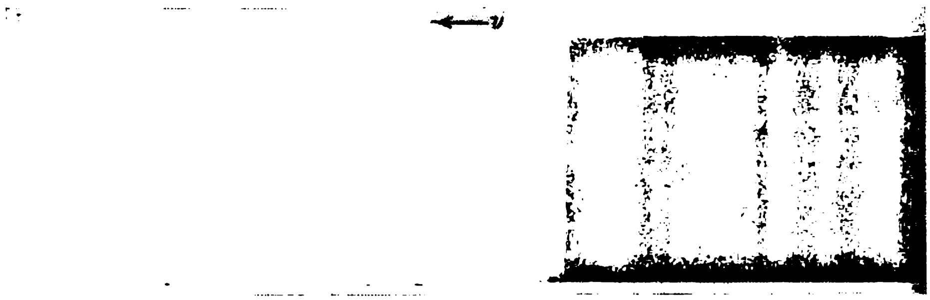


Abb. 276. Spektrum der Photoelektronen, die durch Wolframstrahlung in Silber ausgelöst wurden

In Abb. 276 ist eine Photographie des Energiespektrums von Photoelektronen wiedergegeben, die in Silber durch Bestrahlung mit der K_{α_1}-Strahlung des Wolframs entstanden sind. Bei der Auswertung dieses Spektrums muß man beachten, daß in diesem Energiespektrum erfahrungsgemäß Linien zweierlei Ursprungs vorhanden sind: 1. Linien, die durch die einfallende Strahlung im Strahler (hier im Ag) hervorgerufen worden sind, dun

2. Linien, die durch die charakteristische Strahlung des Strahlers selbst hervorgerufen worden sind; die charakteristische Strahlung entsteht dabei unter der Einwirkung der einfallenden Strahlung. Die Interpretation der Linien der Abb. 276 ist in Tabelle XXXVI angegeben. Die Bezeichnungen in der Spalte „Herkunft" haben folgenden Sinn: Ag K_{α_1,α_2} — Ag L bezeichnet die Linie, die den Photoelektronen entspricht, die durch die charakteristische Strahlung des Silbers Ag K_{α_1,α_2} aus der L-Schale des Silbers selbst ausgelöst werden. Das Auflösungsvermögen des Gerätes war zur Trennung der Linien, die aus den Niveaus L_{I}, L_{II}, L_{III}, schon ganz abgesehen von denen, die aus den Niveaus $M_{\mathrm{I}}, \ldots, M_{\mathrm{V}}$ hervorgehen, nicht ausreichend.

Tabelle XXXVI

Linie	Herkunft	ν/R
1	Ag K_{α_1,α_2} — Ag L	1620 — 250 = 1370
2	Ag K_{α_1,α_2} — Ag M	1620 — 50 = 1570
	Ag K_{β_1} — Ag L	1820 — 250 = 1570
3	Ag K_{β_1} — Ag M	1820 — 50 = 1770
4	W K_{α_2} — Ag K	4270 — 1880 = 2390
5	W K_{α_1} — Ag K	4370 — 1880 = 2490
6	W K_{β_1} — Ag K	4950 — 1880 = 3070
7	W K_{β_2} — Ag K	5090 — 1880 = 3210
8	W K_{α_2} — Ag L	4270 — 250 = 4020

Die Übereinstimmung von ν/R für die Linie 2 ist nicht zufällig; sie ergibt sich aus den folgenden Kombinationsbeziehungen (siehe Abb. 274):

$$K_\alpha = K - L, \qquad K_{\beta_1} = K - M,$$

$$\left.\begin{aligned} K_{\beta_1} - L &= K - L - M, \\ K_\alpha - M &= K - L - M, \end{aligned}\right\} K_{\beta_1} - L = K_\alpha - M.$$

P. I. Lukirski unternahm direkte Bestimmungen der Röntgenenergieniveaus leichter Elemente (6 C, 13 Al) mit Hilfe der von ihm ausgearbeiteten Methode des Kugelkondensators (siehe Teil I, § 111), die sehr günstige Bedingungen bietet. In diesem Verfahren werden die Elektronen bestimmter Geschwindigkeit so schroff abgebremst, daß man ihre Energie mit ausreichender Genauigkeit durch die Gegenfeldmethode ohne Anwendung eines Spektrographen messen kann. Auf diese Weise erhielt Lukirski z. B. folgende Werte für die Energieniveaus:

Element	Niveau	Energie in eV
6 C	K	259
13 Al	L	80

XVII. ANGEREGTE ATOME

§ 226. Optische Anregung und Resonanzfluoreszenz

An verschiedenen Stellen dieses Buches hatten wir es schon mit einer kontrollierten Anregung von Spektrallinien zu tun. So haben wir z. B. im § 92 des ersten Teiles gesehen, daß das Spektrum, welches bei der Bombardierung von Quecksilberatomen mit Elektronen von 4,9 eV ausgestrahlt wird, nur aus einer Linie 2537 Å (genauer 2536,52 Å) besteht. Wie wir jetzt wissen, entsteht diese Linie beim Übergang des Atoms vom angeregten Zustand $^3P_1$ in den Grundzustand $^1S_0$. Die Erzeugung von Spektren durch Anregung von Atomen mit Elektronen ganz bestimmter Energie ist eine sehr bequeme Methode für das Studium angeregter Zustände. Sie hat große praktische Bedeutung, da in den Gasentladungsröhren, die in der Beleuchtungstechnik eine immer größere Bedeutung gewinnen, das Leuchten durch Elektronenstöße angeregt wird.

Ein anderes, noch feineres Verfahren zur Untersuchung angeregter Zustände stellt die Anregung der Atome durch Licht dar. Man spricht dann von optischer Anregung. Wir haben schon gesehen, daß einfallendes Licht einer Wellenlänge, für die die Energie des ihr entsprechenden Photons gleich der Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und dem nächsten angeregten Zustand ist, von den Atomen stark absorbiert wird. Bei der Rückkehr in den Grundzustand strahlen die Atome dann diese Wellenlänge wieder aus (Resonanzstrahlung oder Resonanzfluoreszenz). So wird z. B. bei der Bestrahlung von Natriumdampf mit der gelben Natriumlinie gerade diese gelbe Linie wieder ausgestrahlt. Diese Beschreibung ist jedoch ziemlich grob. Es ist wohl bekannt, daß die gelbe Natriumlinie ein Dublett ist, und nun taucht die Frage auf: Werden beide Linien ausgestrahlt, wenn die Anregung nur mit einer von beiden vorgenommen wird? Die Experimente von Wood

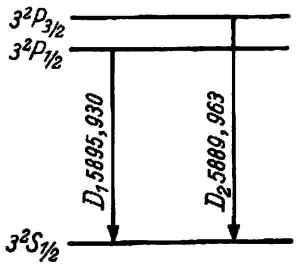


Abb. 277. Niveauschema für die Ausstrahlung der Resonanzlinien des Natriums

gaben auf diese Frage eine klare Antwort. Es zeigt sich, daß bei Anregung mit der D_2-Linie nur diese Linie ausgestrahlt wird und (in reinen Natriumdämpfen bei geringem Druck) keine Spuren der D_1-Linie zu beobachten sind, obwohl das $3^2P_{\frac{1}{2}}$-Niveau, von dem diese Linie ausgesandt wird, tiefer als das $3^2P_{\frac{3}{2}}$-Niveau liegt, von dem die D_2-Linie ausgeht (Abb. 277). Der Grund dafür ist, daß der Übergang vom $^2P_{\frac{3}{2}}$- zum $^2P_{\frac{1}{2}}$-Niveau wegen der

Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ verboten ist. Deshalb ist der hier mögliche Übergang $3^2P_{\frac{1}{2}} \to 3^2S_{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt, daß wir es beim Natrium eigentlich nicht mit einer Resonanzlinie, sondern mit zweien, D_1 und D_2, zu tun haben: Die erste entsteht bei Anregung bis zum $3^2P_{\frac{1}{2}}$-Niveau, die zweite bei Anregung bis zum $3^2P_{\frac{3}{2}}$-Niveau.

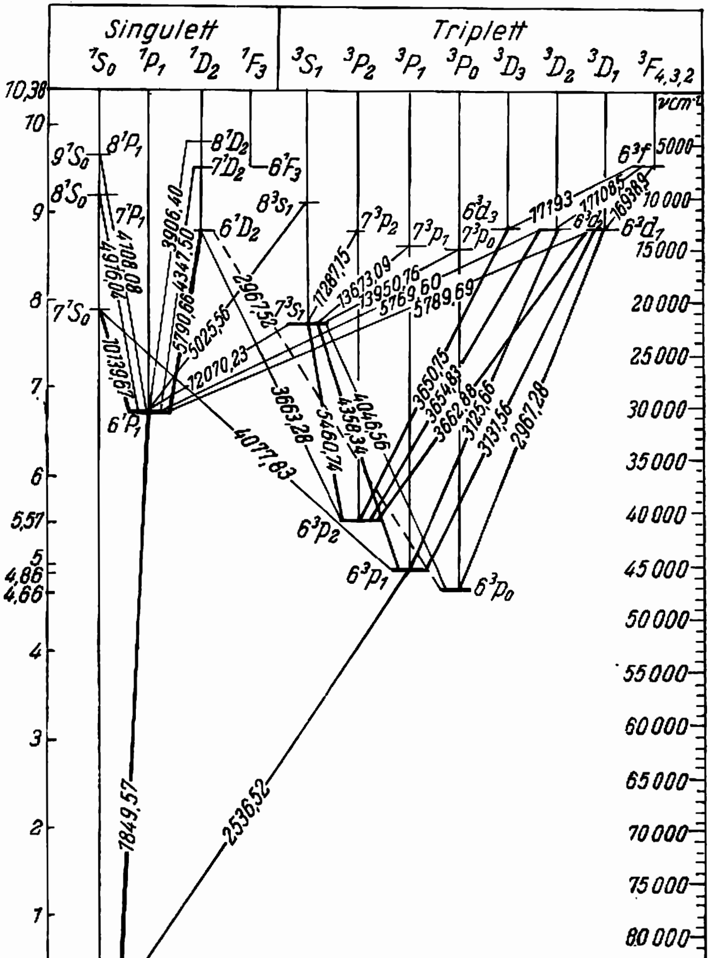


Abb. 278. Schema der Energieniveaus des Quecksilbers

Noch deutlicher zeigt sich die Existenz zweier Resonanzlinien beim Quecksilber (Abb. 278). Hier ist das Grundniveau 6^1S_0 (die Hauptquantenzahl 6 bezieht sich auf das letzte, also auf das Leuchtelektron). Wenn man dem Quecksilberatom eine Energie von 4,9 eV zuführt, geht das Atom in den 6^3P_1-Zustand über und sendet bei Rückkehr in den Grundzustand

die Resonanzlinie 2536,52 Å aus. Dasselbe läßt sich erreichen, wenn man Quecksilberdämpfe mit der Linie 2536,52 Å bestrahlt. Der Übergang $6^3P_1 - 6^1S_0$ ist, wenn keine störenden Einflüsse vorhanden sind, wegen des Interkombinationsverbots nicht gestattet. Wie schon betont wurde, wird diese Regel bei schweren Atomen infolge der gegenseitigen Störung der Spin- und Bahnmomente verletzt. Resonanzstrahlung kann beim Quecksilber auch durch Bestrahlung mit der Linie 1849,57 Å erzeugt werden. Die Absorption dieser Linie ist durch den Übergang $6^1S_0 - 6^1P_1$ bedingt (siehe Abb. 278), und da das Atom aus dem 6^1P_1-Zustand nur in den Ausgangszustand 6^1S_0 zurückkehren kann, ist die Linie 1849,57 Å auch eine Resonanzlinie. Die Beobachtung dieser Linie ist jedoch sehr schwierig, da sie in einem starken Absorptionsgebiet des Sauerstoffs liegt. Um die Linie 1849,57 Å beobachten zu können, muß man die Luft aus dem Apparat pumpen und besondere Vakuumspektrographen verwenden. Zwei Resonanzlinien werden auch beim Kadmium (3261 Å und 2889 Å), beim Zink (3076 Å und 2139 Å) und überhaupt in allen Fällen, wo dies vom Schema der Energieniveaus gefordert wird, beobachtet.

A. N. Terenin hat zahlreiche Beobachtungen der optischen Anregung durchgeführt und sie klar gedeutet. Als interessantes Beispiel betrachten wir die Anregung von Dämpfen des Thalliums, das im Periodischen System nach dem Quecksilber kommt ($Z = 81$). Das Leuchtelektron des Thalliums befindet sich normalerweise im $6p$-Zustand. Der Grundterm ist ein Dublett $6^2P_{\frac{1}{2}}$, $6^2P_{\frac{3}{2}}$; der Abstand zwischen den Unterniveaus des Dubletts ist relativ groß (0,96 eV). Bei Bestrahlung von Thalliumdämpfen mit der ultravioletten Linie 3776 Å wird nicht nur diese Linie wieder ausgestrahlt, sondern auch die sichtbare (grüne) Linie 5350 Å. Die Erklärung ergibt sich aus Abb. 279: Durch Absorption der Linie 3776 Å wird das Atom vom Grundniveau $6^2P_{\frac{1}{2}}$ in das angeregte Niveau $7^2S_{\frac{1}{2}}$ gehoben; bei der Rückkehr zu den Niveaus $6^2P_{\frac{1}{2}}$ und $6^2P_{\frac{3}{2}}$ werden die beiden genannten Linien ausgestrahlt. In der gleichen Weise wird bei Absorption der Linie 2768 Å gleichzeitig mit dieser auch die Linie 3529 Å ausgestrahlt. Die Erklärung wird in der linken Hälfte von Abb. 279 gegeben und ist nach dem Gesagten sofort verständlich.

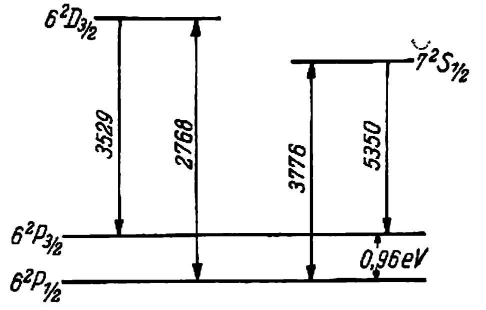


Abb. 279. Niveauschema für die optische Anregung von Thalliumdämpfen

Zu ähnlichen Ergebnissen kam Terenin bei Untersuchung der optischen Anregung von Blei-, Wismut- und Antimoniumdämpfen.

§ 227. Stufenweise Anregung

Sehr interessante und anschauliche Ergebnisse erhielt man bei der Untersuchung der optischen Anregung von Quecksilberdämpfen, die besonders eingehend studiert wurden.

Der Grundzustand des Quecksilberatoms ist 6^1S_0 (Abb. 278); das Niveausystem zerfällt wie beim Helium in Singuletts und Tripletts (§ 211). Das nächste Niveau, zu dem Über-

gänge aus dem Grundzustand stattfinden können, ist im Singulettsystem 6^1P_1 und im Triplettsystem 6^3P_1. Der Übergang zum 6^3P_0-Niveau, das noch ein wenig tiefer liegt, wird durch eine Auswahlregel, die wir in § 235 kennenlernen werden, verboten. Daraus folgt, daß die kleinste Energie, die das Quecksilberatom aufnehmen kann, dem Übergang $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$ entspricht. Gerade diesen Übergang erhält man auch beim FRANCK-HERTZ-Versuch, da die nötige Energie auch hier gerade 4,9 eV beträgt. Der nächste mögliche Übergang ist $6^1S_0 \rightarrow 6^1P_1$; ihm entspricht die Energie 6,7 eV. Wenn das Atom bis zu einem dieser beiden Niveaus 6^3P_1 oder 6^1P_1 angeregt wird, dann besteht die einzige Übergangsmöglichkeit in der Rückkehr zum Grundzustand 6^1S_0. Dabei wird im ersten Fall die Linie 2536,52 Å, im zweiten 1849,57 Å ausgestrahlt. Diese Resonanzlinien wurden beide im vorigen Paragraphen erwähnt.

Die Anregung bis zu höheren Niveaus erfordert noch größere Energien, und darum liegen die Linien, die beim unmittelbaren Übergang von diesen Niveaus in den Grundzustand auftreten, bestimmt im ultravioletten Teil des Spektrums. Dagegen ist allgemein bekannt, daß bei elektrischer Anregung, z. B. in den in Laboratorien und der Medizin weit verbreiteten Quecksilberlampen, auch sichtbare Strahlung auftritt. Diese Strahlung wird durch Übergänge zwischen *angeregten Zuständen* hervorgerufen. So kann z. B. ein Atom, das bis zum 7^3S_1-Niveau angeregt ist, zuerst in den 6^3P_1-Zustand übergehen; dabei wird die intensive blaue Linie 4358,34 Å ausgestrahlt. Vom 6^3P_1-Zustand kann es dann zum Grundzustand 6^1S_0 übergehen und dabei die Resonanzlinie 2536,52 Å aussenden.

Bei der optischen Anregung von Quecksilberatomen werden ähnliche Prozesse beobachtet. Da die mittlere Lebensdauer der Atome im angeregten Zustand sehr klein ist (10^{-7} – 10^{-8} sec), ist auch die Konzentration der angeregten Atome entsprechend klein. Für ein Atom, das ein Lichtquant absorbiert hat und infolgedessen in irgendein höheres Niveau gehoben wurde, ist deshalb unter gewöhnlichen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, noch ein zweites Quant zu absorbieren und zu einem noch höheren Niveau überzugehen, verschwindend klein. Jedoch gelang es WOOD mit Hilfe spezieller Anlagen, eine solche „stufenweise Anregung" zu verwirklichen und auf diesem Wege das ganze Niveauschema des Quecksilbers genau nachzuprüfen.

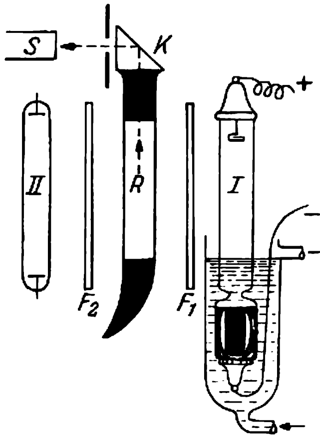


Abb. 280. Schema der Experimente von WOOD zur stufenweisen Anregung von Quecksilber

In Abb. 280 ist die von WOOD angewandte Versuchsanlage dargestellt. Das mit Quecksilberdampf von niedrigem Druck gefüllte Quarzgefäß R wurde mit einer oder zwei nahe beieinanderstehenden Quecksilberlampen I und II beleuchtet, wobei die Lampe I durch fließendes Wasser gekühlt wurde. Diese Kühlung hat folgende Bedeutung: beim Brennen des Bogens im Quecksilberdampf erwärmt sich die Lampe stark, und die Dampfdichte in ihr wird sehr groß. Infolgedessen wird der mittlere Teil der Resonanzlinie schon im Innern der Lampe stark absorbiert (sogenannte „Selbstumkehr"). Mit einer so heißen Lampe gelingt es nicht, im Gefäß R Resonanzfluoreszenz, d. h. Anregung in das 6^3P_1-Niveau, zu erzielen. Demgegenüber ist in der gekühlten Lampe die Dampfdichte klein genug, und die Selbstumkehr tritt nicht auf. Das Quarzprisma K, das an den oberen Teil des Gefäßes R

angekittet ist, projiziert das Fluoreszenzlicht auf den Spalt des Spektrographen S, der die spektrale Zusammensetzung dieses Lichtes analysiert.

Mit dieser Anordnung führte Wood viele Experimente durch, von denen wir nur wenige anführen. Bei Bestrahlung des Resonanzgefäßes R mit ungefiltertem Licht der gekühlten Quecksilberlampe zeigten sich im Fluoreszenzspektrum alle Linien des Quecksilberspektrums, darunter auch die sichtbaren. Wenn jedoch zwischen R und Lampe I das Glas F_1 steht, das die Resonanzlinie 2536,52 Å absorbiert, dann verschwindet jede Fluoreszenz. Dies zeigt, daß zur Erzeugung der Fluoreszenz vor allem die Anregung des Resonanzniveaus 6^3P_1 notwendig ist. Wenn wir jetzt an Stelle des Glases F_1 ein Filter aus Bromdampf im Quarzgefäß anordnen, das den ganzen sichtbaren Teil absorbiert und nur die ultravioletten Linien 2536,52 Å, 2967,28 Å, 3125,66 Å und 3131,56 Å durchläßt, dann erscheint ein Fluoreszenzspektrum, in dem außer den Anregungslinien auch die Linien 3654,83 Å und 3662,88 Å auftreten.

Dieses Ergebnis kann man sofort verstehen, wenn man Abb. 278 betrachtet: bei Absorption der Resonanzlinie wird das 6^3P_1-Niveau der Quecksilberatome angeregt. Da die Quecksilberlampen dicht dabei stehen, ist die Konzentration der angeregten Atome so stark, daß der wenig wahrscheinliche Prozeß der wiederholten Anregung merklich wird. Dieser führt die Atome aus dem 6^3P_1-Zustand durch Absorption der Linien 3125,66 Å ($6^3P_1 \rightarrow 6^3D_2$) und 3131,56 Å ($6^3P_1 \rightarrow 6^3D_1$) in die höheren Niveaus 6^3D_1 und 6^3D_2 über. Bei der Rückkehr von diesen Niveaus zum 6^3P_2-Niveau werden die Linien 3654,83 Å und 3662,88 Å ausgestrahlt.

Eine weitere Variante der oben beschriebenen Experimente besteht in folgendem: Wenn man die Röhre R mit der zweiten nicht gekühlten Quecksilberlampe ohne Farbfilter beleuchtet (und dabei die Lampe I und das Filter aus Bromdampf beibehält), dann zeigen sich außer den erwähnten ultravioletten Linien drei sichtbare: eine violette (4046,56 Å), eine blaue (4358,34 Å) und eine grüne (5460,74 Å). Setzt man ein Farbfilter F_2 aus Kobaltglas dazwischen, das nur die blaue Linie 4358,34 Å durchläßt, dann ändert sich das Fluoreszenzspektrum nicht, d. h. neben der blauen Linie wird auch die grüne im Fluoreszenzspektrum beobachtet. Die Erklärung dieser Erscheinung ist die folgende: Die Lampe I erzeugt eine ausreichende Konzentration von Atomen im 6^3P_1-Zustand. Diese Atome absorbieren aus dem Licht der Lampe II die blaue Linie 4358,34 Å und gehen in den 7^3S_1-Zustand über. Bei der Rückkehr aus dem letzteren in die Niveaus $6^3P_{2,1,0}$ werden außer der blauen auch die violette und die grüne Linie ausgestrahlt. Da es für die Aussendung dieser drei Linien genügt, das Atom aus dem 6^3P_1- in das 7^3S_1-Niveau zu heben, was bei Absorption der blauen Linie geschieht, ist es verständlich, daß bei Zwischenschaltung eines Filters, das nur diese Linie durchläßt, das Fluoreszenzspektrum nicht verändert wird.

§ 228. Thermische Anregung

Es ist bekannt, daß man die Aussendung eines Linienspektrums nicht nur durch Elektronenstöße oder Bestrahlung, sondern auch durch eine Temperaturerhöhung hervorrufen kann. Ein Körnchen Kochsalz, das in die Flamme eines Gas- oder sogar eines Spiritusbrenners gebracht wird, färbt die Flamme gelb, und das Spektroskop zeigt die Anwesenheit der D-Linie des Natriums. Es ist klar, daß hier die Energie für die Hebung aus dem Grundniveau ins angeregte Niveau (für Natrium gleich 2 eV $= 3,2 \cdot 10^{-12}$ erg pro Atom) von der Energie der Wärmebewegung bezogen wird. Die mittlere kinetische Energie der Atome bei Zimmertemperatur liegt etwa bei $5 \cdot 10^{-14}$ erg, d. h., sie ist nahezu hundertmal

kleiner als die benötigte Anregungsenergie der Atome. Jedoch unterliegen die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle dem MAXWELLschen Verteilungsgesetz. Danach gibt es bei beliebiger Temperatur eine gewisse Anzahl von Molekülen, die größere Geschwindigkeiten haben. Dieser Bruchteil ist bei Zimmertemperatur verschwindend klein; er wächst mit steigender Temperatur jedoch schnell an (annähernd exponentiell), wie es in Tabelle XXXVII dargestellt ist (die Zahlen der letzten Spalte bedeuten das Verhältnis der Zusammenstöße mit einer Energie größer als 3 eV zur Gesamtzahl der Zusammenstöße).

Tabelle XXXVII

Temperatur in °C	Mittlere kinetische Energie der Translationsbewegung in eV	N / N_0
15	0,03	$5 \cdot 10^{-61}$
1000	0,14	$1{,}3 \cdot 10^{-13}$
2000	0,24	$7{,}4 \cdot 10^{-6}$
3000	0,35	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
4000	0,45	$2 \cdot 10^{-3}$

Deshalb muß bei Temperaturerhöhung des Gases zuerst eine Resonanzlinie erscheinen und bei weiterer Temperatursteigerung wird eine immer größere Zahl von Linien erscheinen entsprechend dem Auftreten von Atomen, die in immer höheren Energieniveaus angeregt sind. Andererseits, wenn man einen bestimmten Bereich der Flamme mit gleichbleibender (genügend hoher) Temperatur wählt und in diesen verschiedene Atome bringt, dann erhält man eine um so größere Zahl von Linien, je niedriger das Anregungspotential liegt. Bei einem Experiment, das im Laboratorium von FRANCK ausgeführt wurde, wählte man eine Bunsenflammenzone mit einer Temperatur von 1530° C. Dabei zeigte es sich, daß beim Lithium, das in diese Zone eingeführt wurde, eine, beim Natrium zwei, beim Kalium drei, beim Rubidium vier und beim Cäsium sechs Linien auftreten. Eine Betrachtung der Abb. 239 bis 241, in denen die Energieskalen der Niveaus eingetragen sind, erklärt dieses Verhalten der verschiedenen Atome.

Die Untersuchung der Temperaturstrahlung unter genau kontrollierbaren Verhältnissen wird im sogenannten KING-Ofen vorgenommen. Dieser besteht aus einer Kohle- oder Graphitröhre, die durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht wird. Zur Schaffung besserer Versuchsbedingungen befindet sich der ganze Ofen im Vakuum, und die Beobachtung geht durch zwei Quarzfenster vor sich.

Unter diesen Bedingungen kann man die stufenweise Entwicklung des Spektrums leicht anregbarer Atome (Erdalkalimetalle) bis zur Ionisierung der Atome verfolgen.

§ 229. Stöße zweiter Art

Bei der thermischen Anregung geht eines der zusammenstoßenden Atome aus dem Grundzustand auf Kosten der relativen kinetischen Energie der Stoßpartner in einen angeregten Zustand über. Zusammenstöße dieser Art können auch zwischen Atomen und Elektronen stattfinden.

Stellen wir uns vor, wir hätten ein Gemisch neutraler Atome und freier Elektronen. Es kann passieren, daß ein schnelles Elektron, das mit einem nicht angeregten Atom zusammen-

stößt, eine für die Überführung des Atoms aus dem Grundzustand in einen angeregten Zustand ausreichende Energie besitzt. In diesem Fall ist der Stoß unelastisch und das Elektron verliert seine Energie. Das Atom aber geht aus dem Grundzustand in einen angeregten über. Ein Zusammenstoß dieser Art entspricht genau den unelastischen Stößen, die die Elektronen beim Franck-Hertz-Versuch erleiden; man nennt ihn einen *Zusammenstoß erster Art.* Aus der Thermodynamik ergibt sich jedoch, daß neben diesen Stößen erster Art auch Stöße von entgegengesetztem Charakter existieren müssen, bei denen ein *angeregtes Atom*, wenn es mit einem *langsamen* Elektron zusammenstößt, *ohne Strahlung* in den Grundzustand zurückkehrt, indem es dabei den Energieüberschuß an das Elektron abgibt Diese Zusammenstöße erhielten die Bezeichnung *Zusammenstöße zweiter Art.* Aus der Thermodynamik ergibt sich die Forderung, daß in einem System aus Atomen und Elektronen im Gleichgewicht in der Zeiteinheit die Zahl der Stöße erster Art gleich der Zahl der Stöße zweiter Art ist. Dieses Prinzip, das man gewöhnlich Prinzip der *mikroskopischen Reversibilität* oder *Prinzip des detaillierten Gleichgewichts* nennt, leistet unschätzbare Dienste bei der Erörterung des Energieaustauschs in atomaren Systemen.

Die Existenz von Stößen zweiter Art zwischen angeregten Atomen und Elektronen wurde sehr überzeugend durch den folgenden Versuch von A. I. Leipunski und G. D. Latischew gezeigt. Die Elektronen, die von der Glühkathode K (Abb. 281) ausgesandt und von dem elektrischen Feld zwischen K und N_1 beschleunigt werden, fallen in den Raum zwischen den Gittern N_1 und N_2. Zwischen dem zweiten Gitter N_2 und der Anode A wirkt auf die Elektronen ein Bremsfeld. Man sieht, daß zur vollständigen Unterbrechung des Stromes zur Anode A das Bremsfeld nicht größer als das Beschleunigungsfeld sein muß, da die Elektronen ihre Energie nur vom Beschleunigungsfeld erhalten haben. Nun befinden sich im Innern des ausgepumpten Gefäßes, in dem die beschriebenen Teile der Anordnung eingeschlossen sind, Spuren von Quecksilberdampf.

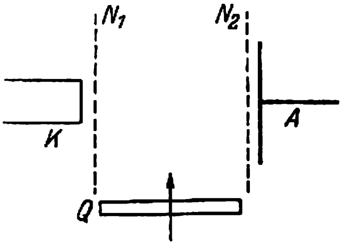


Abb. 281 Schema des Versuchs von Leipunski und Latischew

Wenn man diesen Dampf durch das Quarzfenster Q mit Licht der Resonanzlinie 2536,52 Å des Quecksilbers bestrahlt, dann geht ein Teil der Atome durch Absorption dieser Linie in einen angeregten Zustand über. Bei Zusammenstößen zweiter Art dieser angeregten Atome mit freien Elektronen muß die kinetische Energie der letzteren auf Kosten der Anregungsenergie der Atome, die ohne Ausstrahlung in den Grundzustand übergehen, größer werden. Der Versuch zeigte, daß bei Bestrahlung das maximale Bremspotential zwischen N_2 und A wirklich um 4,7 eV im Vergleich zum Beschleunigungspotential zwischen K und N_1 anwächst. Diese 4,7 eV sind gerade die Anregungsenergie der Hg-Atome, die den Elektronen beim Stoß zweiter Art übertragen wird. Der Grund dafür, daß die Elektronen 4,7 und nicht erwartungsgemäß 4,9 eV erhalten, liegt darin, daß sich die angeregten Hg-Atome, die mit

Elektronen zusammenstoßen, im $^3P_0$-Zustand mit der Anregungsenergie 4,7 eV und nicht im $^3P_1$-Zustand (Anregungsenergie 4,9 eV) befinden. Der $^3P_0$-Zustand wird, wie wir in § 235 sehen werden, durch eine Aufenthaltsdauer charakterisiert, die die Aufenthaltsdauer des $^3P_1$-Zustandes um ein Vielfaches übertrifft. Deshalb ist die Konzentration der angeregten Hg-Atome im $^3P_0$-Zustand besonders groß, und die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes zwischen Elektronen und solchen Atomen ist entsprechend größer als die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes mit Atomen, die sich im $^3P_1$-Zustand befinden.

§ 230. Sensibilisierte Fluoreszenz

Franck verallgemeinerte die Überlegungen über die Stöße zweiter Art zwischen Atomen und Elektronen auf Stöße zwischen angeregten und nicht angeregten Atomen. Die Möglichkeit, Atome auf thermischem Wege anzuregen, weist auf die Existenz von Stößen erster Art hin, bei denen einem der Atome die Anregungsenergie auf Kosten der relativen kinetischen Energie der Stoßpartner mitgeteilt wird.

Dann müssen in einem erhitzten Gas nach dem Prinzip der mikroskopischen Reversibilität aber auch Stöße zweiter Art vorkommen, bei denen das angeregte Atom ohne Strahlung in den Grundzustand übergeht und der Energieüberschuß dem Stoßpartner mitgeteilt wird. Es entsteht die Frage: Wie wirkt sich dieser Energieüberschuß aus? Es ist natürlich möglich, daß der Stoßpartner einen entsprechenden Zuwachs an kinetischer Energie erhält. Experiment und Theorie zeigen jedoch übereinstimmend, daß dieser Fall wenig wahrscheinlich ist. Viel wahrscheinlicher ist folgendes: Wir setzen voraus, daß das Gas aus einem Atomgemisch zweier Sorten A und B bestehe und die Atome A eine Anregungsenergie haben, die ungefähr mit der Anregungsenergie der Atome B übereinstimmt, jedoch etwas größer ist (Abb. 282, hier ist $h\nu > h\nu'$). Wenn ein Stoß zweiter Art zwischen einem angeregten Atom A und einem nicht angeregten Atom B stattfindet, so kann nahezu die gesamte Energie des Atoms A zur Anregung des Atoms B aufgewendet werden, und nur der kleine Überschuß $h\nu - h\nu'$ geht in relative kinetische Energie beider Atome über. Auf diese Weise wird das Atom B nach dem Zusammenstoß strahlen, und der Überschuß über die normale thermische Geschwindigkeit bei gegebener Temperatur äußert sich in einer Linienverbreiterung durch den Doppler-Effekt.

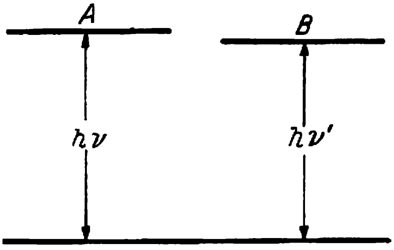


Abb. 282

Das Experiment, das diesen Schluß zum ersten Mal bestätigte, wurde von Cario und Franck auf folgende Weise durchgeführt (1922). Ein Quarzgefäß Q mit zwei Ansätzen befand sich in einem Ofen O_1 (Abb. 283). Beide Ansätze (der eine enthielt Quecksilber, der andere Thallium) befanden sich gesondert in den Öfen O_2 und O_3, damit man die Dampf-

spannung des Hg- und Tl-Dampfes unabhängig voneinander regulieren konnte. Das Gefäß Q wurde mit einer gekühlten Quarzquecksilberlampe so beleuchtet, daß keine Selbstumkehr der Resonanzlinie 2536,52 Å auftrat. Es zeigte sich, daß bei ausreichender Dampfspannung des Thalliums eine intensive Fluoreszenz auftritt. Dabei erscheint eine Reihe von Thalliumlinien, darunter auch die sichtbare grüne Linie 5350 Å. Wenn man den Ofen O_3 entfernt

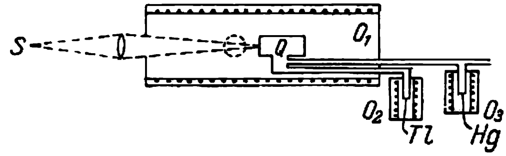


Abb. 283. Versuch von CARIO und FRANCK

und den Ansatz mit dem Quecksilber in flüssige Luft taucht, um die Quecksilberdämpfe auszufrieren, so wird keine Fluoreszenz beobachtet. Die Fluoreszenz verschwindet auch dann, wenn die Quecksilberlampe nicht gekühlt wird und der Ansatz mit dem Quecksilber durch den Ofen O_3 erwärmt wird. Diese Kontrollversuche zeigen: 1., daß das Thallium selbst die Strahlung der Quecksilberlampe nicht absorbiert, sondern nur der Quecksilberdampf, denn wenn dieser ausgefroren ist, verschwindet die Fluoreszenz, und 2., daß gerade die Absorption der Resonanzlinie 2536,52 Å durch die Quecksilberatome wesentlich ist, denn bei ihrer Selbstumkehr verschwindet der Effekt.

In Abb. 284 ist ein Schema wiedergegeben, das den Entstehungsmechanismus der Fluoreszenz beim Thallium erklärt. Die Resonanzlinie 2536,52 Å wird von Quecksilberatomen absorbiert; sie erhalten dadurch einen Energieüberschuß von 4,9 eV. Das Thalliumatom hat

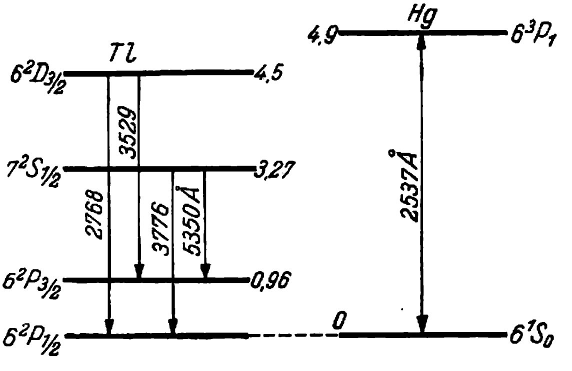


Abb. 284

ein $^2D_{\frac{3}{2}}$-Niveau mit einer Anregungsenergie von 4,5 eV, also nahezu 4,9 eV. Bei einem Stoß zweiter Art zwischen einem angeregten Atom Hg (6^3P_1) und einem Atom Tl ($6^2P_{\frac{1}{2}}$) im Grundzustand geht das erstere ohne Ausstrahlung in den Grundzustand über, und das letztere nimmt den Energieüberschuß von 4,9 eV auf. Davon werden 4,5 eV zur Anregung in den

$6^2D_{\frac{3}{2}}$-Zustand und der Rest zur Vergrößerung der kinetischen Energie des Thalliumatoms verbraucht. Im linken Teil des Schemas sind die Übergänge von diesem Zustand in niedrigere dargestellt, die die tatsächlich beobachteten Fluoreszenzlinien des Thalliums bedingen, Spezielle Untersuchungen, auf die wir nicht eingehen wollen, haben gezeigt, daß diese Linien außerdem durch den DOPPLER-Effekt verbreitert sind. Die ganze Erscheinung wurde sensibilisierte Fluoreszenz benannt.

§ 231. Resonanz beim Energieaustausch durch Stöße zweiter Art

Die Stöße zweiter Art spielen in allen Prozessen des Energieaustausches bei Zusammenstößen von Atomen und Molekülen eine große Rolle. Beschränken wir uns auf einige charakteristische Beispiele. Wenn man Quecksilber- oder Natriumdämpfen eine kleine Menge eines fremden Gases beimischt und dann das Grundgas (Hg, Na) optisch anregt, so wird im allgemeinen die Intensität der Resonanzfluoreszenz geringer. Diese Erscheinung heißt Fluoreszenzlöschung. Sie erklärt sich dadurch, daß bei einem Stoß zweiter Art mit einem Atom oder Molekül des fremden Gases das angeregte Natrium- oder Quecksilberatom seine Energie übergibt und ohne Strahlung in den Grundzustand zurückkehrt. Es zeigt sich,

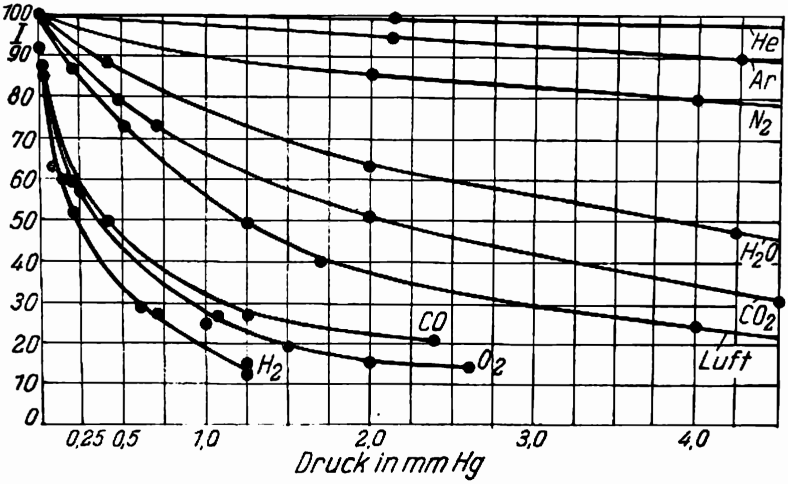


Abb. 285. Löschung der Resonanzfluoreszenz des Quecksilbers durch fremde Gase

daß die Wirksamkeit der verschiedenen Gase in bezug auf die Löschung der Fluoreszenz sehr verschieden ist. In Abb. 285 sind die Ergebnisse für die Untersuchung der Fluoreszenzlöschung von Quecksilberdämpfen wiedergegeben. Auf der Abszissenachse ist der Druck der beigemischten Gase in mm Hg, auf der Ordinatenachse die Intensität der Fluoreszenz des Hg-Dampfes aufgetragen. Man sieht, daß Edelgase wie He und Ar fast keine Löschung bewirken. Geringe Löschung bewirkt molekularer Stickstoff, während die Wirksamkeit von Luft, CO, O_2 und H_2 groß ist.

Die eingehende theoretische und experimentelle Untersuchung dieser und ähnlicher Erscheinungen führte zu folgendem wichtigem Resultat: Die Wahrscheinlichkeit, daß sich An-

regungsenergie in kinetische Energie der Stoßpartner umwandelt, ist immer klein. Die Wahrscheinlichkeit, daß durch einen Stoß zweiter Art Energie übertragen wird, ist dann am größten, wenn das stoßende Atom oder Molekül ein Energieniveau besitzt, das der Energie des angeregten Atoms eng benachbart ist. Aus diesem Grunde sind die Edelgase bei der Löschung der Resonanzfluoreszenz des Quecksilbers so wenig wirksam. Die Anregungsenergie für den 6^3P_1-Zustand des Quecksilbers beträgt bekanntlich 4,9 eV, während das niedrigste angeregte Energieniveau des Heliums bei 20 eV liegt. Daher sind Moleküle in bezug auf die Löschung immer wirksamer als Atome, denn die einzige Anregungsmöglichkeit der Atome liegt in der Erzeugung von Elektronenübergängen, und relativ selten sind die Elektronenniveaus verschiedener Atome eng benachbart. Beim Molekül dagegen gibt es außer den Elektronenniveaus noch Schwingungs- und Rotationsniveaus, und die Mannigfaltigkeit der energetischen Zustände ist daher bedeutend größer. Die besondere Wirksamkeit des molekularen Wasserstoffs erklärt sich durch folgende bemerkenswerte Tatsache: Die Dissoziationsenergie des H_2-Moleküls beträgt 4,34 eV: sie liegt also dicht neben der Anregungsenergie des Hg-Atoms (6^3P_1), die 4,9 eV beträgt. Bei Stößen zweiter Art zwischen dem Hg-Atom (6^3P_1) mit dem H_2-Molekül nimmt daher das letztere mit großer Wahrscheinlichkeit die Energie an, die über seine Dissoziationsenergie hinausgeht. Franck gelang es nachzuweisen, daß bei Bestrahlung eines Gemisches von Quecksilber- und Wasserstoffdampf mit der Resonanzlinie des Hg tatsächlich freie Wasserstoffatome im Gemisch auftreten, d. h., daß eine Dissoziation des H_2-Moleküls eintritt.

Wenn man experimentell denjenigen Druck des Fremdgases ermittelt hat, der die Intensität der Fluoreszenz um die Hälfte vermindert, dann kann man den Radius des Wirkungsquerschnitts des Atoms für die Energieübergabe beim Stoß zweiter Art ausrechnen. Diese Rechnungen führten zu folgendem bemerkenswertem Resultat: Es zeigt sich, daß der Radius des Wirkungsquerschnitts für Stöße zweiter Art im allgemeinen einige Male größer ist als der Atomradius, den man aus der kinetischen Gastheorie berechnet hat (aus solchen Erscheinungen wie innerer Reibung oder Diffusion). Er wächst besonders stark im Falle einer Resonanz zwischen der Energie des angeregten Atoms und der Anregungsenergie (im Grenzfall der Dissoziations- oder Ionisationsenergie) des mit ihm zusammenstoßenden Atoms oder Moleküls an. Im betrachteten Beispiel der Fluoreszenzlöschung von Quecksilberdämpfen erwies sich der Radius des Wirkungsquerschnitts für Luft 1,8mal und für H_2-Moleküle 5,5mal größer als der Radius, der aus der kinetischen Gastheorie folgt.

Als besonders empfindlicher Indikator für die Wechselwirkung zwischen den Atomen erweist sich der Polarisationszustand der Fluoreszenz. Wenn man atomare Fluoreszenz mit linear polarisiertem Licht anregt, dann ist das Fluoreszenzlicht zum Teil depolarisiert. Es ist bemerkenswert, daß diese Depolarisation durch Beimischung eines Fremdgases stark ansteigt und in hohem Maße vom Druck des leuchtenden Gases selbst abhängt (starkes Anwachsen bei Erhöhung des Drucks). Der Radius des Wirkungsquerschnitts für die Depolarisation durch Fremdgase ist in einigen Fällen hundertmal so groß wie der gastheoretische Radius. Ein besonders bemerkenswertes Ergebnis erhielt man bei der Untersuchung der Depolarisation der Fluoreszenz von reinem Natriumdampf bei Druckerhöhung. Hier liegt ganz offenbar eine genaue Resonanz zwischen den zusammenstoßenden Partnern vor, und der Radius des Wirkungsquerschnitts erwies sich als 10000mal größer als der gaskinetische Radius.

Einen anschaulichen Beweis für die Rolle der Resonanz bei Stößen zweiter Art erhielt man bei der Untersuchung der Fluoreszenz von Natriumdampf, die mit Quecksilberdampf sensibilisiert war.

Wenn man ein Gemisch aus Na- und Hg-Dampf mit der Resonanzlinie des Quecksilbers 2536,52 Å bestrahlt, dann erscheint die sensibilisierte Fluoreszenz des Natriums. Durch Ausmessen der Intensität der Fluoreszenzspektrallinien kann man feststellen, welche Niveaus des Natriums mit der größten Wahrscheinlichkeit angeregt werden. Der Energievorrat des Hg-Atoms, das das Licht der Wellenlänge $\lambda = 2536{,}52$ Å absorbiert hat, beträgt 4,9 eV = 112,04 kcal/Mol. Beim Natrium gibt es einige Terme, deren Anregungsenergie zwischen 103 und 113 kcal/Mol liegt. Das sind die Terme $^2D_{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}$ mit den Hauptquantenzahlen von 6 bis 9 und die Terme $^2S_{\frac{1}{2}}$ mit den Hauptquantenzahlen von 5 bis 8. Es zeigte sich, daß bei der sensibilisierten Natriumfluoreszenz der Term $8^2S_{\frac{1}{2}}$ mit der größten Wahrscheinlichkeit angeregt wird. Diesem Term entspricht die Anregungsenergie 112,49 kcal/Mol, d. h. eine Energie, die fast genau mit dem Energievorrat des Hg-Atoms (112,04 kcal/Mol) übereinstimmt. Die große Wahrscheinlichkeit der Anregung des $8^2S_{\frac{1}{2}}$-Terms erkennt man daran, daß die Intensität der Linie der zweiten (scharfen, siehe § 186) Nebenserie des Na $8^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P_{\frac{3}{2}}$ bei der sensibilisierten Fluoreszenz am größten ist, während bei Anregung des Na-Bogenspektrums die Intensität dieser Linie am geringsten ist. Die nächstintensive Linie bei der sensibilisierten Fluoreszenz entspricht der Anregung des $8^2D_{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}$-Niveaus mit der Energie 111,42 kcal/Mol. Schließlich folgt das $5^2D_{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}$-Niveau mit der Energie 98,21 kcal/Mol, das im Bogen mit der größten, bei der sensibilisierten Fluoreszenz aber mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit angeregt wird.

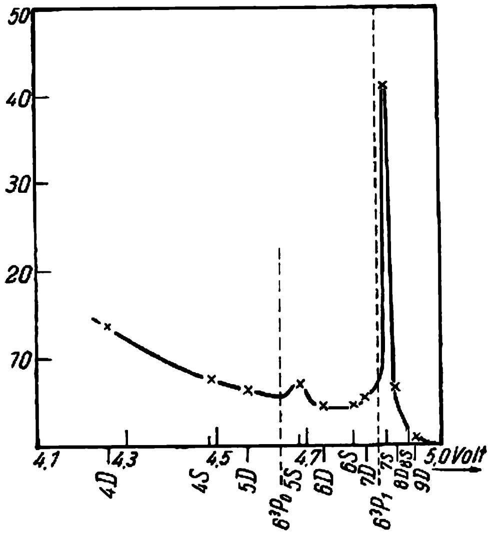


Abb. 286. Resonanz bei Energieübergabe durch Stöße zweiter Art. (Die auf der Ordinatenachse markierten Zahlen sind der Intensität proportional)

Wenn man dem Gemisch Na + Hg ein fremdes Gas zusetzt, wird eine neue Erscheinung beobachtet: die Linie $6^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$ der scharfen Na-Serie, zu deren Anregung die Energie 108,05 kcal/Mol erforderlich ist, wird stärker. Die Erklärung dieses Effekts ist außerordentlich einfach. Wenig unter dem angeregten Hg-Niveau 6^3P_1, der das Ausgangsniveau für die Linie 256,52 Å ist, liegt das Niveau 6^3P_0 mit der Anregungsenergie 107,02 kcal/Mol. Der

spontane Übergang $6^3P_1 - 6^3P_0$ ist durch die Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ verboten; in Gegenwart des fremden Gases ist dieser Übergang jedoch möglich (eine übliche Erscheinung); dabei wird die Energiedifferenz 112,04 — 107,02 = 5,02 kcal/Mol einem Atom des fremden Gases übergeben. Deshalb geht ein Teil der angeregten Quecksilberatome bei Gegenwart eines Fremdgases in den 6^3P_0-Zustand über; beim Zusammenstoß dieser Atome mit Natriumatomen wird mit der größten Wahrscheinlichkeit das $6^2S_{\frac{1}{2}}$-Niveau des Natriums angeregt. Wir sehen, daß beim Energieaustausch durch Stöße zweiter Art wirklich eine deutliche Resonanz beobachtet wird. Die Schärfe dieser Resonanz kann man nach Abb. 286 beurteilen. Auf der Abszissenachse sind die Energien aufgetragen und die Quecksilberterme 6^3P_1 und 6^3P_0 vermerkt; auf der Ordinatenachse ist die Anregungswahrscheinlichkeit der Na-Terme bei Stößen mit angeregten Hg-Atomen, die sich in den Zuständen 6^3P_1 und 6^3P_0 befinden, aufgetragen.

Eine ähnliche Resonanz wird bei der einfachsten Elektronenaustauschreaktion zwischen ionisierten und nicht ionisierten Atomen beobachtet. Wenn man ein Gemisch zweier Atomsorten aus ionisierten (X^+) und nicht ionisierten (Y) Atomen betrachtet, und wenn das Ionisationspotential der ionisierten Atomart höher als bei den nicht ionisierten Atomen liegt, dann erfolgt die Reaktion

$$X^+ + Y \rightarrow X + Y^+.$$

Beim Helium ist z. B. das Ionisationspotential gleich 24,5 eV, beim Neon 21,5 eV. Im Gemisch $He^+ + Ne$ erfolgt die Reaktion

$$He^+ + Ne \rightarrow He + Ne^+.$$

Der Energieüberschuß (24,5 — 21,5) eV = 3,0 eV wird in relative kinetische Energie der stoßenden Atome umgewandelt. Es zeigt sich, daß eine Reaktion des beschriebenen Typs dann mit der größten Wahrscheinlichkeit vor sich geht, wenn die Differenz der Ionisationspotentiale den kleinsten Wert hat, d. h., wenn der kleinste Teil der Energie des ionisierten Atoms in kinetische Energie umgewandelt wird. So nimmt z. B. in der Reihe der Reaktionen

$$He^+ + Ne \rightarrow He + Ne^+ \quad (24{,}5 - 21{,}5\ eV = 3{,}0\ eV),$$
$$Ne^+ + Ar \rightarrow Ne + Ar^+ \quad (21{,}5 - 15{,}7\ eV = 5{,}8\ eV),$$
$$He^+ + Ar \rightarrow He + Ar^+ \quad (24{,}5 - 15{,}7\ eV = 8{,}8\ eV)$$

die Wahrscheinlichkeit der Elektronübergabe von oben nach unten ab. Sehr groß ist die Wahrscheinlichkeit des Elektronaustausches in der Reaktion

$$He^+ + N_2 \rightarrow He + N_2^+,$$

da das Ionisationspotential des N_2-Moleküls zwischen 23 und 25 eV liegt.

Wir haben diese Prozesse deshalb so ausführlich beschrieben, weil eine ähnliche Resonanz eine außerordentlich allgemeine Erscheinung darstellt und speziell in Kernwechselwirkungen eine große Rolle spielt.

§ 232. Lebensdauer von angeregten Zuständen

In § 93 des ersten Teiles haben wir schon das Abklingen der Strahlung vom Standpunkt der Quantenvorstellungen aus betrachtet. Wir sahen dort, daß die Abhängigkeit der Intensität von der Zeit durch die Formel

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{93,8}$$

dargestellt werden kann, in der τ die mittlere Aufenthaltsdauer im angeregten Zustand angibt. Da von spontanen Übergängen die Rede ist, kennzeichnet diese Größe die Stabilität des angeregten Zustandes. Es gibt eine Reihe direkter und indirekter Methoden zur Bestimmung von τ. Zu den direkten gehört die Kanalstrahlmethode, die in § 93 beschrieben wurde. Eine andere direkte Methode, die zuerst von Wood und später von Rayleigh (junior) angewandt wurde, besteht im folgenden. Ein Dampfstrahl, den man durch Destillation von Quecksilber erhält (Abb. 287), wird an einer bestimmten Stelle mit einem engen Lichtbündel beleuchtet. Dabei tritt eine Fluoreszenz auf. Infolge der endlichen Lebensdauer der angeregten Zustände und der großen Geschwindigkeit der Atome im Strahl sieht die Fluoreszenz wie ein schmales, langes, leuchtendes Band aus (Abb. 288), dessen Intensität bei Vergrößerung des Abstandes von der Stelle, wo das anregende Lichtbündel

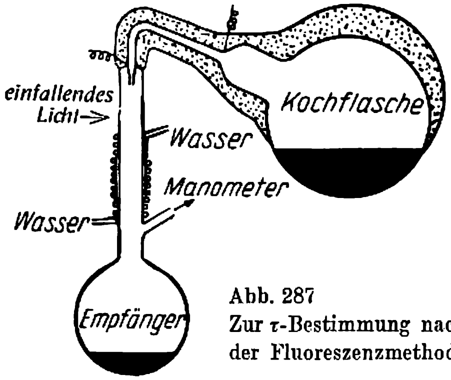


Abb. 287
Zur τ-Bestimmung nach der Fluoreszenzmethode

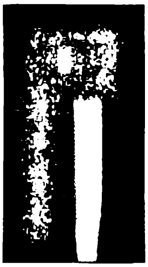


Abb. 288. Fluoreszierender Strahl der Quecksilberdämpfe

einfällt, abnimmt. Wenn man dieses Abklingen mißt und die Geschwindigkeit der Atome im Strahl kennt, kann man τ bestimmen. Auf diesem Wege wurde die Lebensdauer einger angeregter Zustände von Quecksilber- und anderen Atomen bestimmt. Für den 5^3P_1-Zustand des Cadmiums (Resonanzniveau, das der Linie 3261 Å entspricht) wurde z. B. $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec gefunden. Diese Methode ist nur für langandauernde Zustände brauchbar, da die Geschwindigkeit der Atome im Strahl 10^5 cm/sec nicht überschreitet.

Es gibt ziemlich viele indirekte Verfahren zur τ-Bestimmung. Dazu gehört z. B. die Methode, die auf der Auswertung der Absorptionslinien beruht. Ein paralleles, monochromatisches Lichtbündel der Frequenz ν, das durch eine Stoffschicht der Dicke dx geht, wird infolge der Absorption geschwächt. Die Abnahme der Intensität dJ_ν in der Schicht dx ist der Intensität J_ν des auf die Schicht auffallenden Bündels und der Schichtdicke dx proportional:

$$-dJ_\nu = k_\nu J_\nu \, dx.$$

Daraus erhalten wir für eine endliche Schicht der Dicke x

$$J_\nu = J_{0\nu} e^{-k_\nu x},$$

wobei $J_{0\nu}$ die Intensität des in die Schicht eintretenden Lichts ist; k_ν ist der Absorptionskoeffizient. Wenn man eine Kurve zeichnet, die die Abhängigkeit des k_ν von ν darstellt, dann erhält man für das Gebiet der Absorptionslinie eine Kurve, wie sie in Abb. 289 gezeichnet ist. Die Fläche, die durch die Abszissenachse und den Umriß der Absorptionslinie begrenzt wird, läßt sich folgendermaßen ausdrücken[1]):

$$\int k_\nu d\nu = \frac{\lambda_0^2}{8\pi} \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{N}{\tau}, \tag{232,1}$$

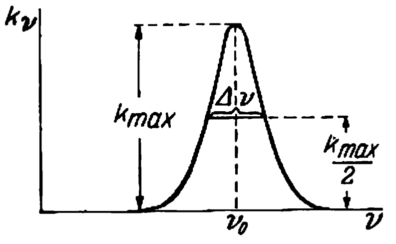


Abb. 289. Kontur der Absorptionslinie

wobei λ_0 die Wellenlänge ist, die der maximalen Absorption entspricht; g_2 und g_1 sind die statistischen Gewichte der Zustände, zwischen denen sich die Übergänge vollziehen, die einer Absorption der gegebenen Wellenlänge entsprechen (siehe Teil I, § 95); N ist die Anzahl der Atome pro cm^3. Man kann also mit Hilfe der Formel (232,1) τ aus der Fläche, die durch die Absorptionslinie begrenzt wird, bestimmen. Die Bestimmung atomarer Konstanten aus den Flächen der Absorptionsbänder wurde zuerst 1908 von T. P. Krawez vorgeschlagen.

Zur indirekten τ-Bestimmung kann auch eine Reihe anderer optischer Erscheinungen angewendet werden, z. B. die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichts, normale und anomale Dispersion (eine besonders elegante und genaue Untersuchungsmethode der letzteren ist eine Interferenzmethode, die sogenannte „Hakenmethode“, die von D. S. Roshdestwenski vorgeschlagen und entwickelt wurde), Depolarisation der Resonanzfluoreszenz Die Betrachtung dieser Verfahren würde uns jedoch sehr weit ab führen[2]), deshalb beschränken wir uns auf die Mitteilung einiger Zahlenwerte.

---

[1]) Die Ableitung dieser Formel gründet sich auf die Strahlungstheorie von Einstein (Teil I, § 93); siehe A. N. Terenin: „Einführung in die Spektroskopie“ (А. Н. Теренин: Введение в спектроскопию, стр. 192. Кубуч, 1938) und auch A. Mitchell and M. W. Zemanski, „Resonance Radiation and Excited Atoms“, Cambridge 1937.

[2]) Interessierte verweisen wir auf das Buch von Mitchell und Zemanski, das wir in der vorigen Anmerkung erwähnt haben.

Tabelle XXXVIII

Mittlere Lebensdauer τ von angeregten Zuständen für verschiedene Atome

Atom	Seriensymbol der Linie	Wellenlänge in Å	τ in sec
H	$1\,{}^2S_{\frac{1}{2}} - 2^2P$	1216	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$
Na	$3\,{}^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P$	5896,59	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$
K	$4\,{}^2S_{\frac{1}{2}} - 4^2P$	7699,76	$2{,}7 \cdot 10^{-8}$
Cd	$5\,{}^1S_0 - 5^3P_1$	3261	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$
Hg	$6\,{}^1S_0 - 6^3P_1$	2537	$1 \cdot 10^{-7}$

§ 233. Niveaubreite. Autoionisation

Wir sehen also, daß die mittlere Lebensdauer τ im allgemeinen von der Größenordnung $10^{-7} - 10^{-8}$ sec ist und in einzelnen Fällen bis zu 10^{-6} sec ansteigt. Mit dieser normalen Lebensdauer ist eine bestimmte natürliche Breite der Spektrallinien verbunden. Schon aus klassischen Überlegungen (siehe Teil I, §§ 66 bis 70) folgte notwendig die Existenz einer endlichen natürlichen Linienbreite. Dort wurde die Relaxationszeit eines Oszillators (§ 66) mit der Breite der Spektrallinien in Zusammenhang gebracht.

Die Quantentheorie führt auf Grund folgender Überlegungen zu einem ähnlichen Ergebnis. Da ein spontaner Übergang eine zufällige Erscheinung ist, existiert keine bestimmte, für alle angeregten Atome gleiche Lebensdauer, sondern man kann nur von einer mittleren Lebensdauer sprechen. Man kann zeigen, daß der Größe τ, wenn man sie als Unbestimmtheit des Übergangszeitpunkts betrachtet, $\tau = \Delta t$, unbedingt einer Unbestimmtheit ΔE der Energie des Niveaus entspricht, wobei zwischen ΔE und Δt die Beziehung

$$\Delta E \Delta t \geqslant h$$

besteht, die den Unbestimmtheitsbeziehungen zwischen den Koordinaten und den entsprechenden Impulsen analog ist. Deshalb ist nur für unendliche Lebensdauer $\Delta t \to \infty$ die Unbestimmtheit der Energie $\Delta E \to 0$, und dem Niveau entspricht eine ganz bestimmte Energie E. Bei endlicher Größe von Δt ist auch ΔE endlich, d. h., es existiert eine endliche Niveaubreite, und demzufolge ist auch die Frequenz der Spektrallinie in den Grenzen $\frac{\Delta E}{h} = \Delta \nu$ unbestimmt. Dabei ist wegen $\frac{h}{\Delta t} = \frac{h}{\tau} \sim \Delta E$ die Breite $\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} \sim \frac{1}{\tau}$. Die Beziehung zwischen den Verbreiterungen der Anfangs- und Endniveaus und der Linienbreite ist in Abb. 290 anschaulich dargestellt. Die Breite der Spektrallinie $\Delta \nu$, die der normalen Lebensdauer des angeregten Zustands entspricht, ist auch die natürliche Breite der Spektrallinie. Für Wellenlängen, die dem sichtbaren Teil des Spektrums entsprechen, hat sie die Größenordnung $^1/_{1000}$ Å. Gewöhnlich wird sie durch die Verbreiterung infolge des Doppler-Effektes und der interatomaren Wechselwirkungen, die einen Einfluß des Gasdrucks auf die Breite der Spektrallinien bedingen, weit überdeckt.

Eine Verkürzung der Lebensdauer τ gegenüber der normalen ruft nicht selten eine entsprechende Verbreiterung der Spektrallinien hervor. Solche ungewöhnlich verbreiterten Linien treten manchmal in den Atom-, weit öfter jedoch in den Molekülspektren auf. Ein Beispiel starker Linienverbreiterung ist in Abb. 291 wiedergegeben, die einen Teil des Kupferspektrums zeigt (Cu I). Hier zeichnet sich die Linie 4539,70 Å durch ihre be-

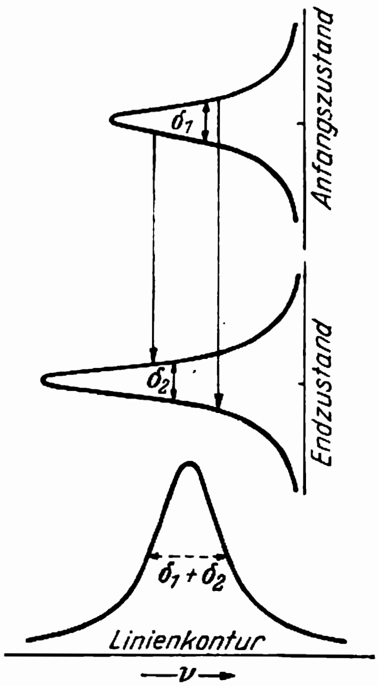


Abb. 290. Beziehung zwischen der natürlichen Linienbreite und der natürlichen Verbreiterung der Energieniveaus

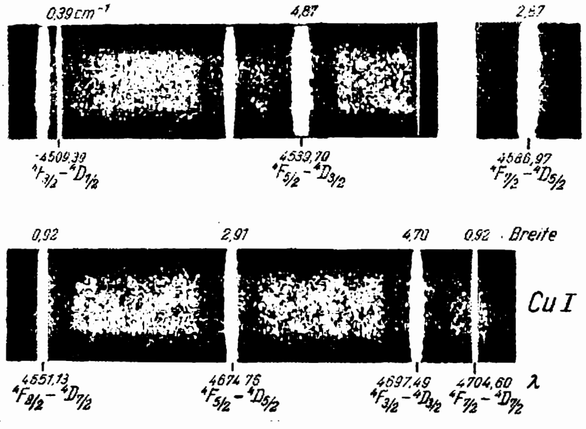


Abb. 291. Schmale und breite Linien in dem gleichen Multiplett des Kupferspektrums (in der Abbildung ist das Spektrum des Cu I wiedergegeben; zur bequemeren Anordnung ist ein Teil des Spektrums weggelassen)

sondere Breite aus ($\Delta \nu = 4{,}87$ cm^{-1}, während die Breite der Nachbarlinie 4509,39 Å gleich 0,39 cm^{-1} ist). Effekte ähnlicher Art sind gewöhnlich mit der Verkürzung der Lebensdauer durch irgendwelche Zerfallsprozesse verbunden. Als solcher Prozeß tritt bei Atomspektren die sogenannte Autoionisation auf. Der Mechanismus dieser Erscheinung läßt sich bequem am einfachen Beispiel des Heliumatoms erklären. Die linke Säule der Abb. 292 stellt die aufeinanderfolgenden Energieniveaus für den Fall dar, daß sich ein Elektron im „einquantigen" Zustand befindet, d. h., daß ein Elektron die Hauptquantenzahl $n_1 = 1$ hat und das andere sich entweder ebenfalls im Grundzustand $n_2 = 1$ oder in einem angeregten Zustand ($n_2 = 2, 3, \ldots$) befindet. Die Energieniveaus nähern sich wie gewöhnlich immer mehr und fallen schließlich ineinander. Über dieser Häufungsstelle liegt das Gebiet der nicht gequantelten Energiewerte. Das bedeutet für ein Elektron, das eine für den Übergang in dieses Gebiet des kontinuierlichen Termspektrums ausreichende Energie bekommen hat, die Loslösung vom Atom, d. h., das Atom wird ionisiert (siehe Teil I, § 105). Man kann nun das Niveauschema unter der Voraussetzung berechnen, daß beide Elektronen angeregt sind; es befindet sich z. B. ein Elektron auf dem Niveau $n_1 = 2$ und das andere entweder auf dem gleichen oder einem höheren Niveau; oder eines befindet sich auf dem Niveau $n_1 = 3$ usw. Solche Schemata sind auch in Abb. 292 dargestellt.

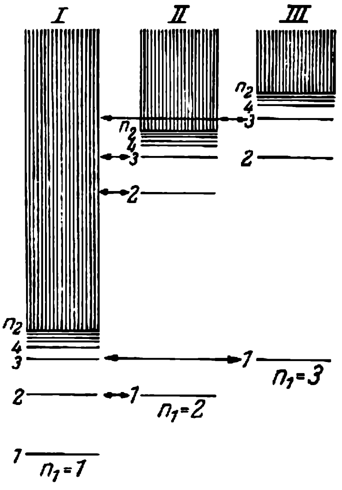


Abb. 292. Termschema des Heliums bei Anregung eines oder beider Elektronen

Lenken wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf folgenden Umstand. Für den Fall, daß sich ein Elektron auf dem Niveau $n_1 = 2$ und das andere auf einem höher angeregten befindet, fällt die Energie des Atoms in diesem diskreten Zustand auf das kontinuierliche Gebiet der ersten Termfolge (siehe Pfeile in Abb. 292). Dabei tritt zwischen dem diskreten Zustand aus II (oder III) und dem kontinuierlichen Zustand aus I Resonanz auf, bei der das System mit großer Wahrscheinlichkeit in den Zustand I mit nachfolgendem Zerfall, Ionisation, übergeht.

Bezeichnen wir mit β die Rückkehrwahrscheinlichkeit des Elektrons in einen tieferen Zustand der diskreten Folge, d. h. mit Strahlung, und mit γ die Wahrscheinlichkeit des Übergangs in das kontinuierliche Gebiet der Folge I, d. h. die Ionisationswahrscheinlichkeit, dann ist offensichtlich die Strahlungsausbeute gleich $\frac{\beta}{\beta+\gamma}$ und die Ionisationsausbeute gleich $\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$. Da die mittlere Lebensdauer τ gleich der reziproken Übergangswahrscheinlichkeit ist [siehe Bd. I, Formel (93,7)], ist $\beta+\gamma=\frac{1}{\tau_s}+\frac{1}{\tau_i}=\frac{1}{\tau}$, wobei τ_s die mittlere Lebensdauer für den Übergang mit Strahlung und τ_i für den Übergang mit Ionisation ist. Die Niveaubreite ist nach dem Vorausgegangenen gleich $\frac{1}{\tau}$, und wir erhalten

$$\Delta\nu=\frac{1}{\tau_s}+\frac{1}{\tau_i}=\beta+\gamma.$$

Wir sehen, daß die Niveaubreite hier wesentlich vom Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten β und γ abhängt. Ist γ von der gleichen Größenordnung wie β, dann behält das Niveau die Breite, die der natürlichen Breite der Spektrallinien entspricht. Nicht selten jedoch erweist sich die Wahrscheinlichkeit für den Übergang mit Ionisation γ bedeutend größer als β. In diesen Fällen ist $\frac{1}{\tau_i}\gg\frac{1}{\tau_s}$, deshalb ist die Niveaubreite $\frac{1}{\tau_s}+\frac{1}{\tau_i}$ durch die Größe $\frac{1}{\tau_i}$ völlig bestimmt, d. h., sie ist bedeutend größer als die normale, und die Spektrallinie ist auch

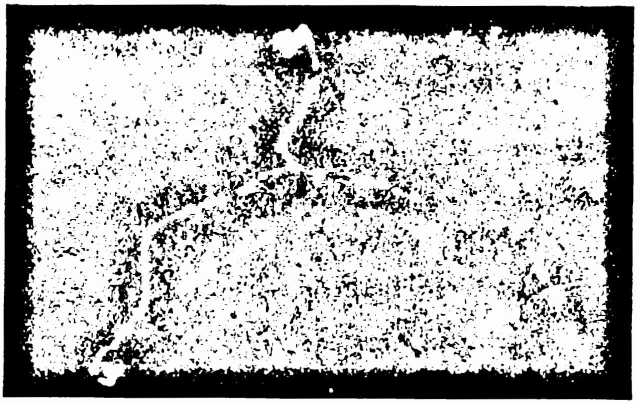


Abb. 293. Auger-Effekt in Krypton

entsprechend verbreitert. Die Ionisation des Atoms, die zu einer derartigen Verbreiterung führt, heißt Autoionisation, um auszudrücken, daß die Loslösung des Elektrons hier nicht durch äußere Ursachen, sondern durch Neuverteilung der Energie im Innern des Atoms selbst bewirkt wird. Experimentell wurden derartige Effekte in einer Reihe komplizierter Spektren, in den sogenannten Strichtermen, die bei der Anregung zweier Elektronen entstehen, entdeckt. So sind z. B. beim Kupfer Cu I die Linien, die von den Termen ^4D, ^2D

$\left(\text{bei } J = \frac{3}{2} \text{ und } \frac{5}{2}\right)$ herrühren, in Niederdruckstrahlern entweder außerordentlich schwach, oder sie fehlen ganz; in Hochdruckstrahlern werden sie jedoch beobachtet, sie sind aber stark verbreitert (siehe Abb. 291).

Die direkte Beobachtung der Autoionisation ist im Falle optischer Spektren schwierig, im Röntgengebiet jedoch ziemlich einfach. AUGER photographierte in der WILSON-Kammer Photoelektronen, die durch Röntgenstrahlen aus schweren Edelgasen (z. B. Krypton) losgelöst wurden. Er fand dabei, daß in einigen Fällen von einem Punkt zwei Spuren ausgehen (Abb. 293).

Diese Erscheinung, die AUGER-Effekt genannt wird, ist ein typischer Fall von Autoionisation. Bei Beleuchtung des Kryptons mit Röntgenstrahlen genügend kurzer Wellenlänge (damit die Energie des Photons $h\nu$ z. B. größer ist als die Ionisationsenergie eines Elektrons der K-Schale des Kryptons) wird zunächst ein Photoelektron aus der K-Schale losgelöst. Der freigewordene Platz kann durch Übergang eines Elektrons der L-Schale, d. h. unter Aussendung der K_α-Linie, wieder besetzt werden. Da aber die Anregungsenergie des Atoms dabei größer als die Ionisationsenergie des L-Elektrons ist, kann ein Resonanzübergang des Atoms ohne Strahlung, wie er oben beschrieben wurde, unter Loslösung eines zweiten Elektrons vor sich gehen. Die kinetische Energie, die dabei das befreite Elektron erhält, ist offenbar gleich der Anregungsenergie des Atoms abzüglich der Ionisationsenergie des L-Elektrons, d. h.

$$eV = K - 2L.$$

Da aber $K - L = h\nu_{K_\alpha}$ ist, folgt

$$eV = h\nu_{K_\alpha} - L.$$

Das bedeutet, daß das Photoelektron diejenige kinetische Energie erhält, die es haben würde, wenn es bei einem Photoeffekt durch K_α-Strahlung im Innern des gleichen Atoms ausgelöst worden wäre. Eine solche anschauliche Beschreibung des Effekts ist möglich, diese gibt jedoch nicht das Wesen der Erscheinung wieder, die eben darin besteht, daß innere Übergänge *ohne zwischendurch erfolgende Strahlung* stattfinden. Man kann den Effekt richtiger als eine Art „inneren Stoß zweiter Art" beschreiben. Bei Betrachtung der Eigenschaften von γ-Strahlen im Kapitel XXI werden wir sehen, daß ähnliche Effekte der inneren Energieneuverteilung, die sogenannte innere Umwandlung, eine häufige Erscheinung sind. Quantitative Untersuchungen verschiedener Art, die zur Prüfung der oben gegebenen Erklärung des AUGER-Effekts angestellt wurden, haben diese Erklärung vollkommen bestätigt.

Der AUGER-Effekt wird von keiner Linienverbreiterung begleitet, da die Übergangswahrscheinlichkeit ohne Strahlung γ von der gleichen Größenordnung wie β ist. Das wird durch Bestimmung der Ausbeute von K_α-Strahlung im Vergleich zur Ausbeute der Autoionisation bestätigt.

§ 234. Intensität der Spektrallinien

Die Intensität der Spektrallinien ist einerseits durch die Wahrscheinlichkeit des Quantenüberganges bedingt, der zur Ausstrahlung der gegebenen Frequenz führt (§ 191), und andererseits — durch die Anzahl der Atome, die sich im entsprechenden angeregten Zustand befinden. Wie schon gezeigt wurde (§ 192), können die Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Quantenmechanik berechnet werden. Dabei ergibt sich folgende Formel:

$$A_{mn} = \frac{64\pi^4 \nu^3}{3hc^3} \, | e r_{mn} |^2, \tag{234,1}$$

worin er_{mn} das Matrixelement des Dipolübergangs $m \to n$ bedeutet. Was die Anzahl der Atome in einem höheren (angeregten) Zustand betrifft, so führt die Abhängigkeit von dieser bei sonst gleichen Bedingungen auf einige einfache arithmetische Beziehungen für die Intensität der Linien in den Multipletts.

Betrachten wir zunächst die Temperaturstrahlung. Hier erfolgt die Anregung auf Kosten der Stöße zwischen den Atomen. In Übereinstimmung mit der statistischen Formel von BOLTZMANN ist bei thermodynamischem Gleichgewicht das Verhältnis der Anzahl der Atome mit den Energien E_m und E_n

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{e^{-E_m/kT}}{e^{-E_n/kT}},$$

unter der Bedingung, daß *das statistische Gewicht beider Zustände gleich ist.* Da dies allgemein nicht vorkommt, muß die rechte Seite der aufgeschriebenen Gleichung noch mit dem Quotienten der statistischen Gewichte g_m/g_n multipliziert werden; wir erhalten dann

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m e^{-E_m/kT}}{g_n e^{-E_n/kT}}. \tag{234,2}$$

Wenn wir es mit schmalen Multipletts zu tun haben (z. B. mit einem Dublett mit sehr kleinem Abstand zwischen den Komponenten), dann ist $E_m \approx E_n$, und wir erhalten

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n}. \tag{234,3}$$

Für ein schmales Multiplett ist auch die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit von der Frequenz, die durch Formel (234,1) gefordert wird, gering, und das Verhältnis der Intensitäten ist praktisch vollkommen durch das Verhältnis der statistischen Gewichte bestimmt.

Bei Anregung der Strahlung in der Gasentladung, d. h. durch Elektronenstöße, ist der BOLTZMANNsche Faktor $e^{-E/kT}$ überhaupt unwesentlich, da den Geschwindigkeiten der Elektronen in der Entladung eine solch hohe Temperatur entspricht, daß man den Faktor $e^{-E/kT}$ gleich 1 setzen kann. Also ist auch hier das Verhältnis der Intensitäten praktisch durch das Verhältnis der statistischen Gewichte bestimmt. Als Maß des statistischen Gewichts nimmt man natürlicherweise den Grad der Entartung des gegebenen Niveaus an, d. h. die Zahl der Unterniveaus, auf die sich das Niveau im Magnetfeld aufspaltet. Für ein Niveau, das durch einen gegebenen Wert von j charakterisiert ist, ist diese Zahl bekanntlich gleich $2j+1$ (§ 209):

$$g = 2j + 1.$$

Betrachten wir z. B. das Kopfdublett der Hauptserie der Alkalimetalle (für Natrium das D-Dublett). Der untere Zustand für beide Linien dieses Dubletts, $^2S_{\frac{1}{2}}$, ist einfach; die oberen Zustände sind $^2P_{\frac{1}{2}}$ und $^2P_{\frac{3}{2}}$. Die statistischen Gewichte beider P-Zustände sind $2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$ und $2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$. Also müssen sich die Intensitäten beider Komponenten des Dubletts wie $4:2 = 2:1$ verhalten, was auch tatsächlich beobachtet wird. Betrachten wir das Triplett des Magnesiums $\lambda = 5183{,}6$; $5172{,}7$; $5167{,}3$ Å. Es wird durch den Übergang vom einfachen oberen Niveau 4^3S_1 zu den drei unteren Niveaus 3^3P_0, 3^3P_1, 3^3P_2 erzeugt (Abb. 294). Das Verhältnis der statistischen Gewichte ist hier $1:3:5$. So ist auch gerade das Verhältnis der Intensitäten der Triplettlinien.

In beiden betrachteten Beispielen war ein Niveau — entweder das obere oder das untere — einfach. Nicht selten sind jedoch auch die Fälle, wo sowohl die oberen wie auch die unteren Niveaus vielfach sind. In diesen Fällen gilt folgende *Summenregel*, die empirisch gefunden wurde: *Stellen wir uns vor, daß entweder die oberen oder die unteren Niveaus zusammenfallen, dann verhalten sich die summaren Intensitäten der durch den Zusammenfall bedingten Linien wie die statistischen Gewichte der nicht zusammenfallenden Niveaus.*

Betrachten wir als Beispiel das sogenannte zusammengesetzte Dublett der ersten Nebenserie der Alkalimetalle (siehe § 186), das durch Kombination der Dubletterme P und D entsteht. In Abb. 295 ist das Übergangsschema wiedergegeben, das die Entstehung dieses Dubletts zeigt. Unten sind seine drei Linien (zwei Hauptlinien und ein schwacher „Begleiter") mit den beim zusammengesetzten Cäsiumdublett gemessenen Intensitäten (100, 12, 60) wiedergegeben. Wenn wir uns vorstellen, daß die oberen Niveaus zusammenfallen, dann ist die Summe der Intensitäten der zusammenfallenden Linien $100 + 12 = 112$; das Verhältnis der Intensitäten $112:60 = 1{,}87:1$ ist annähernd dem Verhältnis der statistischen Gewichte der getrennten unteren Niveaus gleich ($4:2 = 2:1$). Wenn wir uns aber vorstellen, daß die unteren Niveaus zusammenfallen, dann ist die Summe der Intensitäten $60 + 12 = 72$; das Verhältnis $100:72 = 1{,}39:1$ ist annähernd dem Verhältnis der statistischen Gewichte der oberen Niveaus $6:4 = 1{,}5:1$ gleich.

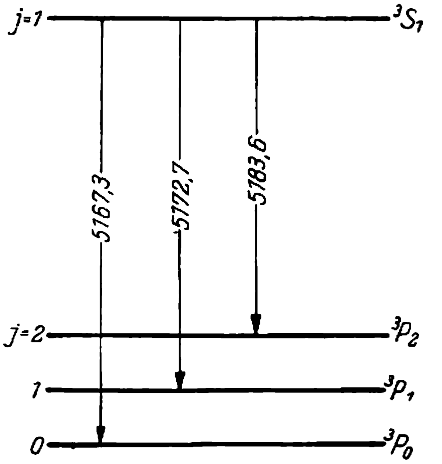


Abb. 294. Entstehung des Magnesiumtripletts

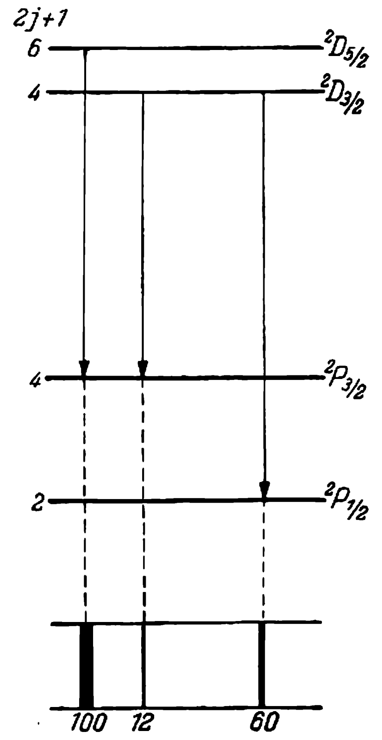


Abb. 295

Wir stellen zum Schluß noch einmal heraus, daß das Verhältnis der Intensitäten innerhalb des Multipletts gar nicht von den Hauptquantenzahlen abhängt und in erster Linie durch das statistische Gewicht bedingt ist, das nur von der Quantenzahl j abhängt.

§ 235. Metastabile Zustände

Neben den kurzlebigen Zuständen existieren auch Zustände von außergewöhnlich langer Dauer. Um diese zu betrachten, ist es notwendig, uns vor allem der Auswahlregeln zu erinnern, denen wir schon öfter begegnet sind. Nach dem Kombinationsprinzip (Teil I, § 98) entsteht jede im Spektrum zu beobachtende Linie durch Kombination zweier Terme; die Umkehrung gilt jedoch nicht immer: Nicht jede Termkombination liefert eine Spektrallinie. Empirisch wurden schon lange vor der Entstehung der Quantenmechanik Bedingungen gefunden, denen die Terme genügen müssen, damit ihre Kombination möglich ist.

Wie wir in § 193 gesehen haben, gab die Quantenmechanik eine theoretische Begründung für diese Auswahlregeln. Die erste Regel, der wir schon in § 186 begegnet sind, sagt aus, daß Übergänge möglich sind, bei denen sich die azimutale Quantenzahl des Leuchtelektrons um ± 1 ändert:

$$\Delta l = \pm 1 . \tag{235,1}$$

In der überwältigenden Mehrzahl der Fälle ist die Anregung des Atoms mit der Zustandsänderung *eines* Elektrons, und zwar des Leuchtelektrons, verbunden. Deshalb setzt die Regel (235,1), ohne das es erwähnt wird, voraus, daß sich die Quantenzahlen der anderen Elektronen nicht ändern. In wenigen Fällen werden jedoch Übergänge mit Änderung der Quantenzahlen zweier Elektronen beobachtet. In solchen Fällen muß sich die Quantenzahl des zweiten Elektrons um ± 2 ändern.

Die theoretische Grundlage der Auswahlregel (235,1) besteht, wie wir in § 193 sahen, darin, daß das Matrixelement des Dipolmoments

$$D_{mn} = \int \psi_m^* (ex)\, \psi_n \, d\tau ,$$

von dem die Übergangswahrscheinlichkeit abhängt, nur dann von Null verschieden ist, wenn für das Leuchtelektron die Bedingung (235,1) erfüllt ist. Eine allgemeinere und genauere Formulierung dieser Regel findet sich im Anhang XI. Dort ist gezeigt, daß alle Terme eines Atoms in gerade und ungerade Terme zerfallen, d. h. in solche, bei denen die arithmetische Summe der azimutalen Quantenzahl gerade oder ungerade ist. Dann kann man die Auswahlregel so formulieren: Übergänge können nur zwischen Termen verschiedener Art, d. h. zwischen geraden und ungeraden, aber nicht zwischen Termen gleicher Art stattfinden. Man sieht leicht, daß in dieser allgemeinen Formulierung sowohl die Änderung der Quantenzahl eines Elektrons als auch die seltenen Fälle, in denen sich die Quantenzahlen beider Elektronen ändern, enthalten sind.

Die folgende allgemeine Auswahlregel besagt, daß sich die Quantenzahl des Gesamtimpulsmoments J um ± 1 ändern oder ohne Änderung bleiben muß (§ 207):

$$\Delta J = 0, \; \pm 1 . \tag{235,2}$$

Dabei kommen jedoch die Übergänge $0 \to 0$, obwohl sie der Regel $\Delta J = 0$ entsprechen, nicht vor.

Außer diesen allgemeinen Regeln gibt es noch sogenannte spezielle Auswahlregeln, die nur in solchen Fällen befriedigt werden müssen, wenn die *normale Kopplung* der Vektoren $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ streng besteht (§ 217). Diese Regeln sagen aus, daß die geometrische Summe $\mathfrak{L}$ der Vektoren des Bahnmoments $\mathfrak{l}_i$ der einzelnen Elektronen konstant sein oder sich um ± 1 ändern muß; die geometrische Summe $\mathfrak{S}$ der Spinvektoren $\mathfrak{s}_i$ der einzelnen Elektronen darf sich aber nicht ändern. Da von der geometrischen Summe $\mathfrak{S}$ die Multiplizität des Terms

abhängt (§ 217), verlangt die letzte Regel, daß die Übergänge zwischen Termen der gleichen Multiplizität stattfinden müssen (Singulett—Singulett, Dublett—Dublett usw.). Übergänge zwischen Termen verschiedener Multiplizität (z. B. Singulett—Triplett), die sogenannten *Interkombinationen*, sind verboten.

Obgleich diese Regeln eine theoretische Begründung haben, begegnen wir immer wieder der Tatsache, daß sie nicht absolut streng gültig sind und in einzelnen Fällen übertreten werden. Das betrifft sowohl die speziellen Auswahlregeln als auch die allgemeinen.

Was die speziellen Regeln anbelangt, so wurde schon darauf hingewiesen, daß die strenge Erfüllung der normalen Kopplung Voraussetzung für ihre Anwendbarkeit ist. Da sich aber die realen Atome nur mehr oder weniger gut der normalen Kopplung unterwerfen, lassen die speziellen Auswahlregeln Ausnahmen zu; diese werden auch wirklich beobachtet, und zwar besonders bei den schweren Atomen. Typische Beispiele für die Übertretung der speziellen Auswahlregeln sind die sogenannten Interkombinationslinien, die bei den Übergängen zwischen Triplett- und Singulettniveaus entstehen. Die außerordentlich starke, gut bekannte Resonanzlinie des Quecksilberdampfes 2536,52 Å ist gerade eine solche Interkombinationslinie $6^3P_1 - 6^1S_0$. Ähnliche Interkombinationslinien werden auch in den Spektren anderer Atome mit zwei Valenzelektronen beobachtet (Be, auch Zn und Cd). Es ist interessant zu bemerken, daß die ihnen entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit (von der die Intensität der Linie abhängt) sich als um so kleiner erweist, je genauer die normale Kopplung realisiert ist. Bei dem gut der normalen Kopplung entsprechenden Beryllium (Be I) z. B. beträgt die Wahrscheinlichkeit des Übergangs $2^3P_1 - 2^1S_0$ nur 0,2 sec^{-1}.[1] Beim Quecksilber wird dagegen die normale Kopplung gestört, und gleichzeitig wächst die Wahrscheinlichkeit des Interkombinationsübergangs $6^3P_1 - 6^1S_0$ auf 10^7 sec^{-1} an.

Wir bemerken ferner, daß die Auswahlregeln im allgemeinen nur für Übergänge durch Einwirkung von Strahlung im Falle einer Absorption und durch spontane Übergänge im Falle einer Emission anwendbar sind. Bei Anregung durch Stoß und in Gegenwart von starken elektrischen oder magnetischen Feldern verlieren sie ihre Gültigkeit.

Bis jetzt sprachen wir nur von Verletzungen der speziellen Auswahlregeln oder von solchen, die durch Störung hervorgerufen werden. In gewissen Fällen werden jedoch auch die allgemeinen Auswahlregeln verletzt, und dazu noch dann, wenn keine Störungen vorhanden sind. So sind z. B. nach der am Anfang dieses Paragraphen formulierten Regel Übergänge zwischen den Termen ^2S und ^2D verboten, da sich die Quantenzahl l bei diesen Übergängen um zwei Einheiten ändert. Dagegen werden bei allen Alkalimetallen schwache Linien beobachtet, die den Übergängen $^2D - {}^2S$ entsprechen. Die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge, die diesen Linien entsprechen, wurden von W. K. Prokofjew bestimmt. Obwohl sich diese Wahrscheinlichkeiten als 10^6mal kleiner als die Wahrscheinlichkeiten der „erlaubten" Übergänge $^2P - {}^2S$ erwiesen, sind diese Linien der Beobachtung doch durchaus zugänglich.

Der Widerspruch zwischen der Existenz solcher Übergänge mit $\Delta l = \pm 2$ und der Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ ist jedoch nur scheinbar. Man darf nicht vergessen, daß die Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ nur streng für reine Dipolübergänge gültig sein soll (siehe § 193). Die Übergangswahrscheinlichkeit hängt aber von einem Matrixelement ab, das nur in erster Näherung

[1]) Die Übergangswahrscheinlichkeit ist die reziproke Lebensdauer $A_{mn} = \frac{1}{\tau_{mn}}$ (siehe Teil I, § 93); deshalb wird die Übergangswahrscheinlichkeit in reziproken Sekunden angegeben.

der Strahlung eines elektrischen Dipols entspricht, da das Dipolmoment nur das erste Glied der Reihe ist, die die Übergangswahrscheinlichkeit darstellt. Nicht weniger wichtig ist das zweite Glied, das der Ausstrahlung eines elektrischen Quadrupols (und magnetischen Dipols) entspricht. Wie wir in § 193 gesehen hatten, ist unter gewöhnlichen Bedingungen die Übergangswahrscheinlichkeit, die dem Dipolübergang entspricht, viele Male größer als die des Quadrupolüberganges und desto mehr noch als die des Überganges von Multipolen höherer Ordnung. Wenn deshalb von ein und demselben angeregten Niveau aus sowohl der Dipol- als auch der Quadrupolübergang möglich ist, dann ist die Linie des Dipolübergangs so viel intensiver, daß die Quadrupollinie nur bei besonders günstigen Bedingungen zu beobachten ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Übergänge mit $\Delta l = \pm 2$ im Grunde genommen nicht „verboten" sind. Da ihnen jedoch in der Mehrzahl der Fälle Linien entsprechen, die viel weniger intensiv sind als die „Dipollinien", ist die Bezeichnung „Auswahlregel" für die Bedingung $\Delta l = \pm 1$ vom praktischen Standpunkt aus gerechtfertigt. Man darf jedoch nicht vergessen, daß Übergänge, die dieser Auswahlregel nicht genügen, für *Dipolstrahlung* verboten sind.

Wenn der Dipolübergang durch irgendeine Auswahlregel verboten ist (z. B. durch das Interkombinationsprinzip), dann hält sich das Atom lange im angeregten Zustand auf und besitzt dabei nicht selten einen großen Energieüberschuß. Die mittlere Lebensdauer eines Atoms in solchem angeregten Zustand, die gleich der reziproken Übergangswahrscheinlichkeit ist, kann eine riesige Dauer von der Größenordnung 10^{-3} — 1 sec erreichen, d. h. eine 10^{5} — 10^{8}mal größere als die normale Lebensdauer des Dipolübergangs. Derartige relativ beständige Zustände heißen *metastabil*.

Als Beispiel für einen metastabilen Zustand kann der $1s2s\,^3S_1$-Zustand des Orthoheliums dienen (Abb. 256). Die Anregungsenergie dieses Zustands ist sehr groß (19,77 eV). Nichtsdestoweniger werden von ihm aus keine mit Strahlung verbundenen Übergänge unter gewöhnlichen Bedingungen beobachtet, da der Übergang zum einzigen tieferliegenden Zustand $1s^2\,^1S_0$ durch zwei Auswahlregeln verboten wird, und zwar durch die Regel $\Delta l = \pm 1$ (im gegebenen Fall ist $\Delta l = 0$) und das Interkombinationsverbot Triplett — Singulett. Wegen seiner Beständigkeit ist dieser Zustand der Grundzustand im System des Orthoheliums. Der $1s2s\,^1S_0$-Zustand ist beim Helium auch metastabil, da sein Übergang in den Grundzustand durch die Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ verboten ist.

Beim Quecksilber ist der Übergang $6^3P_0 \to 6^1P_0$ durch die Auswahlregel für j (Übergänge $0 \to 0$ finden nicht statt) verboten. Der Zustand 6^3P_0 ist deshalb metastabil. Damit wird eine ganze Reihe von Tatsachen erklärt, von denen wir die zwei folgenden anführen: 1. durch Zusatz eines Fremdgases (z. B. Argon oder Stickstoff) zu einem Gemisch aus Quecksilber- und Thalliumdampf wird die Ausstrahlung der Resonanzlinie des Quecksilbers geschwächt, aber die sensibilisierte Fluoreszenz des Thalliums verstärkt; 2. bei Versuchen mit stufenweiser Anregung des Quecksilbers wird durch Hinzufügen von Stickstoff zu den Quecksilberdämpfen bei einem Druck von einigen Millimetern die Intensität der sichtbaren Linien 5460,74 Å, 4358,34 Å und 4046,56 Å ganz bedeutend erhöht. Im ersten Beispiel geben die angeregten Atome des Quecksilbers bei Stoß mit Atomen des Fremdgases einen kleinen Teil ihrer Energie ab (etwa 0,2 eV) und gehen in den metastabilen Zustand 6^3P_0 über. Die spontane Rückkehr aus diesem Zustand zum Normalniveau 6^1S_0 ist nicht möglich, deshalb wird die Fluoreszenz des Quecksilberdampfes schwächer. Die ziemlich starke Vergrößerung der Lebensdauer im metastabilen Zustand erhöht jedoch die Wahrscheinlichkeit des Stoßes zweiter Art mit den Thalliumatomen, und die Helligkeit der

sensibilisierten Fluoreszenz des Thalliums wächst. Bei den Versuchen mit stufenweiser Anregung von Quecksilber in Gegenwart von Stickstoff geht ein ähnlicher Prozeß vor sich. Beim Stoß des angeregten Quecksilberatoms mit einem Stickstoffmolekül gibt das Hg-Atom 0,2 eV an das N_2-Molekül ab. Mit der übergebenen Energie wird die Schwingungsenergie für die Schwingung der N-Atome gegeneinander erhöht. Der damit verbundene Übergang der Hg-Atome in den metastabilen 6^3P_0-Zustand führt wegen der großen Lebensdauer des metastabilen Zustands zur Vergrößerung der Absorptionswahrscheinlichkeit der violetten Linie 4046,56 Å. Dadurch wird auch die Intensitätssteigerung der sichtbaren Linien erklärt (siehe Diagramm der Abb. 256).

Da die Atome in metastabilen Zuständen einen großen Energievorrat besitzen und während langer Zeitintervalle existieren, spielen diese Zustände in den Elementarprozessen der Gasentladung und bei photochemischen Reaktionen eine große Rolle.

§ 236. Verbotene Übergänge

Wir haben oben gesehen, daß Übergänge aus metastabilen Zuständen, speziell die Quadrupolübergänge, nicht absolut „verboten", sondern nur durch eine geringe Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet sind. Es zeigt sich darüber hinaus, daß die Spektrallinien, die durch Übergänge aus den metastabilen Zuständen entstehen, unter gewissen Bedingungen eine sehr große Intensität erreichen und sogar die Intensitäten der „erlaubten" Übergänge übertreffen können. In der Natur sind solche Bedingungen bei einigen astronomischen Objekten verwirklicht. So war z. B. das Auftreten der grünen Linie $\lambda = 5577{,}3$ Å, die im Polarlicht beobachtet wurde, lange Zeit unverständlich; auch die Emissionslinien 5006,8 Å und 4958,9 Å in den Spektren der Nebel konnten nicht enträtselt werden. Die Mißerfolge in der Identifizierung dieser Linien führten zur Aufstellung von Hypothesen, laut denen angeblich besondere „außerirdische" Elemente existieren, und zwar das „Geokoronium", das die Linie des Polarlichts liefere, und das „Nebulium", das in den Nebeln strahle.

Die Entwicklung der theoretischen Spektroskopie zeigte jedoch durch genaue Analyse der Energieniveauschemata, daß die angeführten und viele andere unerklärte Linien astronomischer Objekte zu Atomen und Ionen vollkommen „irdischer" Elemente, wie z. B. Sauerstoff, Stickstoff und einigen anderen, gehören. Die Schwierigkeit ihrer Identifizierung hing damit zusammen, daß diese Linien trotz ihrer großen Intensität gerade durch „verbotene" Übergänge zustande kommen. So gehört z. B. die Linie des „Geokoroniums" 5577 Å zum neutralen Sauerstoff (O I); sie wird durch den Quadrupolübergang ${}^1S - {}^1D$ erzeugt. Beide Zustände, zwischen denen sich der Übergang vollzieht, sind metastabil, wobei der niedrigere ${}^1D$ die kolossale Lebensdauer von 100 sec und der höhere ${}^1S$ eine Dauer von 0,5 sec hat. Die Linien des „Nebuliums" 5007 Å und 4959 Å gehören zum zweifach ionisierten Sauerstoff (O III) und entstehen beide bei Interkombinationsübergängen ${}^1D - {}^3P_1$ und ${}^1D - {}^3P_2$, wobei die mittlere Lebensdauer des ${}^1D$-Zustands auch hier sehr groß ist (42 sec). Nachdem es gelungen war, die Entstehung dieser Linien vollkommen aufzudecken und die Bedingungen, die ihr Zustandekommen trotz der geringen Übergangswahrscheinlichkeit fördern, zu klären, gelang es, den größten Teil der „astronomischen" verbotenen Linien (insbesondere die Linien des Geokoroniums und Nebuliums) auch im Laboratorium zu erzeugen.

Um die Gründe für das Auftreten der „verbotenen" Linien zu verstehen, wollen wir zuerst die Bedingungen klären, von denen die Intensität der Spektrallinien abhängt. Die Intensität einer Linie gegebener Frequenz ist nichts anderes als das Produkt der Energie des

Photons $h\nu$ mit der Anzahl der Photonen dieser Frequenz, die in der Zeiteinheit ausgestrahlt werden. Man muß also vor allem die Faktoren berechnen, von denen die Anzahl der ausgestrahlten Photonen abhängt. Es ist leicht einzusehen, daß die wichtigsten dieser Faktoren die Anzahl der Atome N, die in der Zeiteinheit auf das Niveau gehoben werden, das der Ausgangspunkt für die Strahlung der gegebenen Linie ist, und der Bruchteil der Anzahl dieser Atome, die beim Übergang diese Linie ausstrahlen, sind. Der erste Faktor, also die Zahl N, hängt vom Anregungspotential des oberen Zustands und von den physikalischen Bedingungen in der Strahlungsquelle ab.

Um die Ursachen zu untersuchen, die auf die Größe des zweiten Faktors Einfluß haben, verfolgen wir das Schicksal eines angeregten Atoms. Es kann einen Übergang nach unten mit Ausstrahlung der uns interessierenden Linie ausführen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs bezeichnen wir mit A_1. Das angeregte Atom kann jedoch von demselben Niveau aus Übergänge ausführen, bei denen andere Linien entstehen. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Übergänge bezeichnen wir mit $A_2, A_3, \ldots$ Weiter kann das angeregte Atom (besonders dann, wenn es sich in einem metastabilen Zustand befindet) während der Zeit des angeregten Zustands einen Stoß erster oder zweiter Art erleiden. In diesen beiden Fällen wird es in einen anderen Zustand überführt. Bei einem Stoß erster Art wird es in ein höheres, bei einem Stoß zweiter Art in ein tieferes Niveau überführt, wobei es im zweiten Falle einen Teil seiner Energie ohne Strahlung abgibt. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom einen Stoß dieser oder jener Art erleidet und dadurch aus seinem anfänglichen Anregungszustand entfernt wird, bezeichnen wir mit B. Schließlich kann das Atom erzwungene Übergänge nach oben oder unten ausführen, die durch das Strahlungsfeld, in dem es sich befindet, hervorgerufen werden. Die Wahrscheinlichkeit solcher Übergänge bezeichnen wir mit C.

Wenn man alle genannten Faktoren berücksichtigt, dann drückt sich die Intensität der Linien folgendermaßen aus:

$$J = A_1 h\nu \frac{N}{A_1 + A_2 + \ldots + B + C}. \qquad (236{,}1)$$

Wenn man beachtet, daß der Bruch die mittlere Anzahl der Atome darstellt, die sich im höheren Zustand bei Gleichgewicht befinden,

$$\frac{N}{A_1 + A_2 + \ldots + B + C} = n,$$

können wir die Formel (236,1) umschreiben:

$$J = n A_1 h\nu. \qquad (236{,}2)$$

Ist neben einem „verbotenen" (z. B. Quadrupol-)Übergang (Wahrscheinlichkeit A_1) *vom gleichen höheren Niveau* ein „erlaubter", d. h. Dipolübergang (Wahrscheinlichkeit A_2), möglich, dann gilt $J \approx 0$, wie man sofort aus Formel (236,1) sieht. Im konkreten Fall der Quadrupol- und Dipolübergänge ist tatsächlich A_2 10^6mal größer als A_1, d. h. $\frac{A_1}{A_1 + A_2 + \ldots} \approx 0$.
Eine notwendige Bedingung für das Auftreten einer „verbotenen" Linie besteht also darin, daß das höhere Niveau metastabil sein muß, so daß die Wahrscheinlichkeiten $A_2, A_3, \ldots$ wenigstens von der gleichen Größenordnung wie A_1 oder kleiner als A_1 sind. Damit die Wahrscheinlichkeiten B und C genügend klein sind, ist es weiterhin nötig, daß die Dichte

des Stoffes und die Strahlungsdichte im Objekt, das das Licht ausstrahlt, genügend klein sind.

In der Natur gibt es dafür geeignete Bedingungen in den Nebeln. Die Stoffdichte in ihnen wird gewöhnlich auf 10^{-18} g/cm³ geschätzt. Wenn man annimmt, daß die Temperatur 10000° beträgt und daß auf jedes Atom ein *freies* Elektron kommt, dann liegt die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen in der Größenordnung von *zehn Minuten*, während die Spanne zwischen zwei Stößen in einem Gase unter normalen Bedingungen von der Größenordnung 10^{-10} sec ist. Die Strahlungsdichte ist in den Nebeln auch klein; selbst in den dichtesten planetarischen Nebeln erreicht die Strahlung nur das 10^{-6}- bis 10^{-8}fache der Strahlung der Sonnenoberfläche.

Wenn alle erwähnten Bedingungen erfüllt sind, d. h., wenn der höhere Zustand metastabil ist und die Wahrscheinlichkeiten B und C vernachlässigbar klein sind, dann werden praktisch alle Atome, die den gegebenen metastabilen Zustand erreicht haben, darin ungestört bleiben, solange sie keinen „verbotenen" Übergang ausführen. Die Intensität der verbotenen" Linien ist dabei sehr groß. Aus Formel (236,1) folgt ja direkt, daß dann, wenn aus dem metastabilen Zustand nur ein Übergang möglich ist ($A_1 \neq 0$, $A_2 = A_3 = \ldots = 0$), $J = Nh\nu$ ist und überhaupt nicht von der Wahrscheinlichkeit des Übergangs abhängt. Wenn jedoch mehrere (natürlich „verbotene") Übergänge möglich sind, teilt sich die Gesamtintensität $Nh\nu$ auf einige wenige Glieder von gleicher Größenordnung auf.

Bis jetzt haben wir die Anzahl der Atome N, die den gegebenen metastabilen Zustand erreicht haben, außer acht gelassen. Die Erörterung der Strahlungsbedingungen in den Nebeln zeigt, daß diese Bedingungen die Anregung der Atome gerade in niedrige metastabile Zustände begünstigen. Wir wollen diese Bedingungen betrachten.

Man sieht, daß die Nebel bei der angegebenen geringen Stoffdichte (10^{-18} g/cm³) in ihrem Innern keine Strahlungsquelle haben können, sondern von außen angeregt werden müssen. Als Quelle kann irgendein naher Stern dienen. Es zeigt sich, daß Nebel, die sich in der Nähe von Sternen befinden, die kälter als der B I-Typ sind, ein Absorptionsspektrum besitzen, das mit dem Spektrum des nahen Sterns übereinstimmt. Das zeigt, daß die Strahlung in diesen Fällen das Ergebnis von Reflexion und Streuung des Sternlichtes durch den Stoff der Nebel ist Dagegen strahlen Nebel in der Nähe von Sternen, die heißer als die des Typs B I sind, ein Emissionsspektrum aus. Die mit solchen Nebeln verbundenen Sterne strahlen große Energie im fernsten Ultraviolett aus. Daraus ergibt sich folgender möglicher Vorgang für das Nebelleuchten. Die Absorption des fernen Ultravioletts hat eine Photoionisation der Atome zur Folge, da es außer den Seriengrenzen selbst solcher Atome wie H und He liegt. Bei dem umgekehrten Prozeß der Rekombination des befreiten Elektrons mit dem Ion wird das ganze Spektrum des betreffenden Atoms ausgestrahlt.

Ein derartiger direkter Vorgang spielt jedoch bei der Nebelstrahlung nicht die Hauptrolle. Das folgt daraus, daß in den Spektren der Nebel außer den Linien des Wasserstoffs und Heliums keine hellen Linien beobachtet werden, deren Entstehung man diesem einfachen Vorgang zuschreiben könnte. Eine große Rolle spielt die indirekte Anregung der Atome. Dieser Vorgang besteht darin, daß die durch Photoionisation losgelösten Elektronen die Strahlung nicht durch Rekombination mit den Ionen erzeugen, sie heben vielmehr durch Stöße erster Art mit Atomen und Ionen die letzteren auf Niveaus, die der kinetischen Energie dieser Elektronen entsprechen. Die Betrachtung der Energieverteilung zwischen den Photoelektronen zeigt ferner, daß der größte Teil eine Energie von weniger als 10 eV besitzt. Der größte Teil der Energie des ultravioletten Sternenlichts, das von den Nebeln absorbiert wird, muß also in kinetische Energie der Elektronen

verwandelt werden, die kleiner als 10 eV ist. Diese Elektronen regen darum die Atome in Niveaus an, die auch tiefer als 10 eV liegen. Dieser Forderung entsprechen nun gerade die metastabilen Niveaus der Atome und Ionen solcher im Weltall verteilten Elemente wie Sauerstoff. So ist z. B. beim O III-Ion die Anregungsenergie der metastabilen Zustände ^1D und ^1S gleich 2,5 bzw. 5,3 eV, während das niedrigste Anregungspotential des Zustandes, von dem aus erlaubte Übergänge möglich sind, 36 eV beträgt. Ähnliche Bedingungen liegen auch bei den Atomen O I, N I u. a. vor. Hieraus ist zu ersehen, daß gerade die Anregung der niederen metastabilen Niveaus mit größter Wahrscheinlichkeit erfolgt, und daß die Zahlen N daher groß sind. Die große Intensität der verbotenen Linien in den Nebeln und Novae und die geringe Intensität der erlaubten Linien ist damit vollständig erklärt.

XVIII. ALLGEMEINE CHARAKTERISTIK DES ATOMKERNS

§ 237. Einige einleitende Bemerkungen

Nachdem wir den Aufbau der Elektronenhülle des Atoms kennengelernt haben, gehen wir zum Studium des Atomkerns über. In diesem Paragraphen stellen wir kurz einige einleitende Bemerkungen über die Eigenschaften der Atomkerne zusammen, die wir von nun an laufend brauchen werden. Viele Fragen, die wir hier nur flüchtig streifen, werden in den nächsten Paragraphen eingehender betrachtet.

Stabile und radioaktive Kerne. Heutzutage sind mehr als 1000 Kerne bekannt, die sich durch ihre Ladung, Masse oder auch durch beides unterscheiden. Etwa ein Drittel dieser Kerne ist beständig, die übrigen sind radioaktiv. Radioaktiv nennen wir unbeständige Kerne, die *spontan* zerfallen (d. h., der Zerfall erfolgt unter dem Einfluß *innerer* Ursachen) und sich in andere Kerne umwandeln. Der radioaktive Zerfall wird entweder von der Emission eines positiven oder negativen Elektrons (β-Zerfall) oder von der Emission eines α-Teilchens, d. h. eines Heliumkerns (α-Zerfall), begleitet. Eine isolierte radioaktive Substanz zerfällt nach dem Exponentialgesetz

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Hier ist N die Anzahl der Kerne, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind, N_0 — die Zahl der Kerne zum Zeitpunkt $t = 0$, τ ist eine für die radioaktive Substanz charakteristische konstante Zeitspanne, während der sich die Zahl der Kerne auf den e-ten Teil verringert. Dieses Gesetz folgt aus dem statistischen Charakter des radioaktiven Zerfalls: Für verschiedene Kerne der radioaktiven Substanz vollzieht sich die Umwandlung zu sehr verschiedenen Zeitpunkten; es kann nur ihre mittlere Lebensdauer angegeben werden. Die Rechnung zeigt (siehe § 272), daß die mittlere Lebensdauer des Kerns gerade gleich τ ist. Gewöhnlich gibt man jedoch nicht die mittlere Lebensdauer an, sondern die *Halbwertszeit* T, d. h. die Zeit, während der sich die Anzahl der Kerne um die Hälfte verringert. Die Halbwertszeiten der bekannten radioaktiven Kerne schwanken in weitesten Grenzen zwischen 10^{-8} sec und 10^9 Jahren.

Kernladung. Ein sehr wichtiges Charakteristikum des Kerns ist seine Ladung. Wie wir wissen, ist die Kernladung Z, wenn man sie durch den absoluten Wert der Ladung des Elektrons e ausdrückt, positiv und gleich der Atomnummer des Elements. Eine direkte Bestimmung der Kernladung wurde für eine geringe Anzahl von Kernen an Hand einer Untersuchung der Streuung von α-Teilchen durchgeführt. In den meisten Fällen jedoch wurden die Kernladungen mit Hilfe des MOSELEYschen Gesetzes bestimmt, das einen linearen Zusammenhang zwischen der Frequenz einer bestimmten Linie im charakteristischen Röntgenspektrum und der Atomnummer, die gleich der Kernladung Z ist, angibt.

Heutzutage sind Kerne mit allen Ladungen von 1 bis 98 bekannt. Dabei wurden erst in den allerletzten Jahren folgende bis dahin leeren Plätze des Periodischen Systems besetzt (Tabelle XXXIX):

Tabelle XXXIX [1])

Kernladung Z	Bezeichnung des Elements	Chemische Kennzeichnung
43	Technetium, Tc	Element der VII. Gruppe, analog dem Mangan
61	Promethium, Pm	Seltene Erde
85	Astatin, At	Halogen, analog dem Jod
87	Francium, Fr	Alkalimetall, analog dem Cäsium

Alle Elemente, die in dieser Tabelle aufgeführt sind, kommen in der Natur nicht vor und wurden in sehr kleinen Mengen künstlich durch Kernreaktionen erzeugt und angereichert. Das Element Francium kommt auch als seltenes Zwischenprodukt der radioaktiven Aktiniumfamilie vor.

Zu den Entdeckungen der letzten Zeit gehört auch die Erweiterung des Periodischen Systems über das Uran ($Z = 92$) hinaus. Ebenso wie Elemente, die die leeren Plätze im Periodischen System ausfüllten, hat man künstlich auch eine Reihe von Elementen erhalten, deren Atomnummern größer als 92 sind. Angesichts ihrer Anordnung nach dem Uran nennt man diese Elemente Transurane. Bis 1951 wurden die Elemente mit den Kernladungen von 93 bis 98 entdeckt. Mit Ausnahme des Plutoniums ($Z = 94$), das nach seiner künstlichen Erzeugung in verschwindenden Mengen im Uranmineral Pechblende (etwa 1 Teil auf 10^{14} Massenteile des Minerals) gefunden wurde, kommen die Transurane in der Natur nicht vor. Sie sind alle stark radioaktiv und deshalb während der geologischen Erdgeschichte „ausgestorben". Theoretisch ist die Erzeugung weiterer Transurane mit höheren Atomnummern bis zu $Z = 125$ möglich (siehe § 306).

Kernmasse. Das zweite sehr wichtige Merkmal eines Kerns ist seine Masse. Die auf ganze Zahlen abgerundeten Massen (sogenannte *Massenzahlen* A) der bis heute bekannten Kerne liegen zwischen den Grenzen $A = 1$ und $A = 244$.

Isotope. Einem Wert Z entsprechen mehrere Werte von A: Ein Kern mit gegebener Ladung kann in Form mehrerer Isotope existieren.

In der Regel ist ein Teil dieser Isotope stabil, die übrigen sind radioaktiv. Die Gesamtzahl der stabilen Isotope beträgt etwa 300; über 700 gegenwärtig bekannte Isotope sind radioaktiv. Ein vollständiges Verzeichnis der stabilen und radioaktiven Isotope befindet sich am Schluß des Buches (siehe Anhang XIV).

Die Atommassenbestimmung der Isotope wird heutzutage mit Hilfe von vervollkommneten Massenspektrographen (siehe Teil I, §§ 14 bis 16) bis auf die vierte oder fünfte Dezimale genau durchgeführt. Die mit dieser Genauigkeit bestimmten Massen der Isotope weichen nur unbedeutend von ganzen Zahlen ab (in der sogenannten physikalischen Massenskala, in der die Masse des Sauerstoffisotops O^{16} genau gleich 16 gesetzt ist). Die ziemlich gute Annäherung der Isotopenmassen an die ganzen Zahlen weist darauf hin, daß die Kerne aus Einheiten von nahezu gleicher Masse aufgebaut sind.

[1]) In einigen Ausgaben der Mendelejewschen Tabelle werden unter den Nummern 43 und 61 bis heute noch Namen von angeblich in der Natur existierenden Elementen „Masurium" ($Z = 43$) und „Illinium" ($Z = 61$) aufgeführt. In Wirklichkeit handelte es sich bei der „Entdeckung" beider Elemente um Irrtümer.

Deshalb ist es für die allgemeine Kennzeichnung der Zusammensetzung eines gegebenen Kernes ausreichend, wenn man neben seiner Ladung seine *Massenzahl* angibt. Wir werden sie in den meisten Fällen zusammen mit dem chemischen Symbol des Kerns angeben. Dieses Symbol wird sehr häufig mit zwei Zahlen versehen, von denen die eine die Atomnummer und die andere die Massenzahl angibt; ${}_{8}O^{18}$ bedeutet z. B. Sauerstoff mit der Atomnummer $Z = 8$ und der Massenzahl $A = 18$. Die erste Ziffer wird links angeordnet, damit sie nicht mit der Ziffer verwechselt wird, die in der Chemie die Anzahl der Atome im Molekül angibt.

Isobaren. Neben den Isotopen, die verschiedene Massenzahlen A bei ein und derselben Kernladung Z besitzen, gibt es Kerne, die gleiches A und verschiedene Z haben. Solche Kerne nennt man Isobare. Wenn zwei Isobaren stabil sind, unterscheiden sich ihre Ladungen in der Regel um zwei Einheiten. Beispiele:

$${}_{18}Ar^{40} \quad {}_{20}Ca^{40}$$
$${}_{24}Cr^{54} \quad {}_{26}Fe^{54}$$
$${}_{32}Ge^{76} \quad {}_{34}Se^{76}$$

Es gibt auch Triaden von stabilen Isobaren, z. B.

$${}_{40}Zr^{96} \quad {}_{42}Mo^{96} \quad {}_{44}Ru^{96}$$
$${}_{52}Te^{130} \quad {}_{54}Xe^{130} \quad {}_{56}Ba^{130}$$

Wenn ein stabiles Isotop ein Isobar hat, das sich von ihm um eine Z-Einheit unterscheidet, dann ist das letztere gewöhnlich radioaktiv und wandelt sich in ein stabiles Isobar um. Das stabile Isotop ${}_{8}O^{17}$ des Sauerstoffs hat z. B. das Isobar ${}_{9}F^{17}$. Das letztere ist jedoch β-radioaktiv und wandelt sich in ${}_{8}O^{17}$ um. Eine große Zahl ähnlicher Beispiele findet man in der Tabelle des Anhangs XIV. Als seltene Ausnahmen gibt es auch einige Paare und sogar Triaden von *stabilen* Isobaren mit Kernladungen, die sich um 1 unterscheiden. Weitere Angaben und theoretische Überlegungen zu dieser Frage siehe in § 292.

Isomere. Unter den radioaktiven Kernen gibt es solche, die gleiche Ladung Z und gleiche Massenzahl A besitzen, d. h., eine vollkommen identische Zusammensetzung haben, deren Halbwertszeiten jedoch verschieden sind. Solche Kerne nennt man *Isomere.* So entspricht z. B. dem Bromisotop ${}_{35}Br^{80}$, das einem β-Zerfall mit der Halbwertszeit 18 Minuten unterliegt, das Isomere ${}_{35}Br^{80*}$ mit der Halbwertszeit 4,4 Stunden. Gegenwärtig kennt man etwa 70 Paare von isomeren Kernen.[1])

Zusammensetzung des Kerns. Es besteht heute kein Zweifel darüber, daß alle Kerne nur aus zwei Sorten von Elementarteilchen mit nahezu gleicher Masse bestehen — aus Protonen (Kernen des Wasserstoffs) mit einer positiven Ladung, die gleich der absoluten Größe der Elektronenladung ist, und Neutronen, die keine Ladung besitzen. Die Anzahl der Protonen im Kern ist gleich der Atomnummer (der Kernladung) Z, und die Zahl der Neutronen ist gleich der Differenz zwischen Massenzahl A und Kernladung Z, $N = A - Z$. In Abhängigkeit vom Verhältnis, das zwischen der Anzahl der beiden Elementarteilchen im gegebenen Kern besteht, besitzt dieser eine größere oder geringere Stabilität. Dabei ist es zweckmäßig,

[1]) Die Bezeichnung „Isomer“ wurde diesen Kernen in Analogie zu den in der Chemie bekannten Molekülen gegeben, die gleiche Zusammensetzung, aber verschiedene Eigenschaften besitzen.

von einer Stabilität sowohl der stabilen als auch der radioaktiven Kerne zu sprechen. In den nach kosmischen Zeitmaßstäben weit zurückliegenden Epochen, in denen die heute existierenden chemischen Elemente entstanden, bildeten und erhielten sich mit der größten Wahrscheinlichkeit solche Kerne, bei denen das Verhältnis zwischen der Zahl der Protonen und der Neutronen für die Stabilität am günstigsten war. Kerne, bei denen

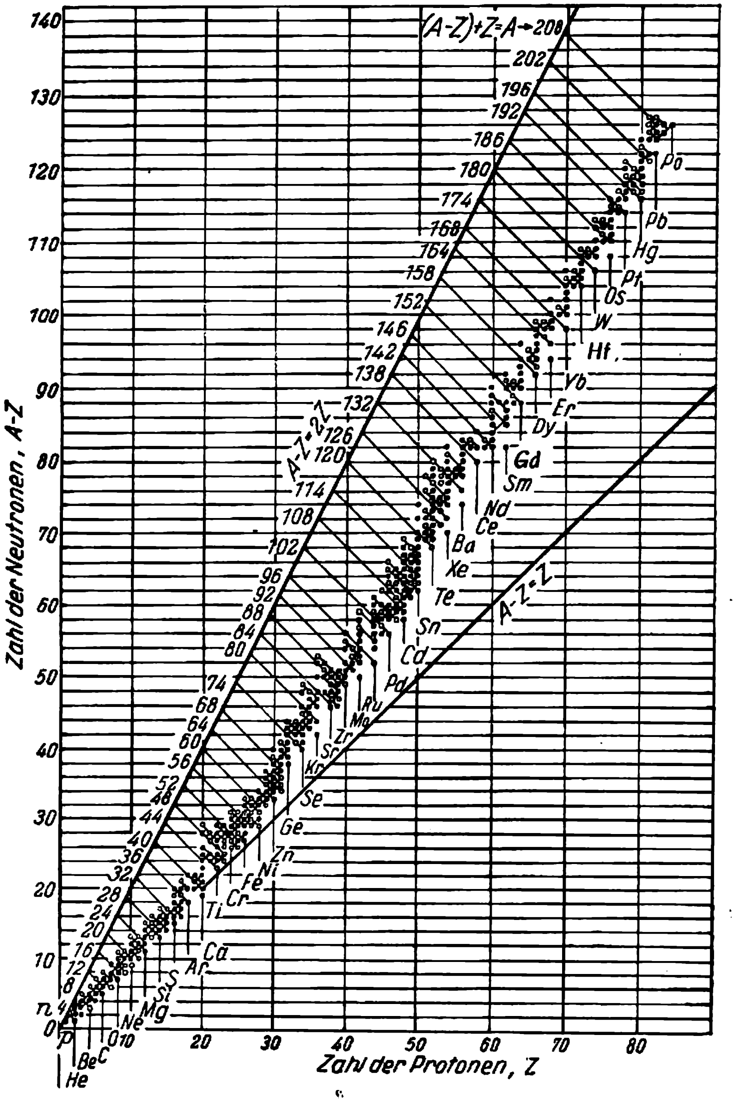


Abb. 296. Stabile und radioaktive Isotope

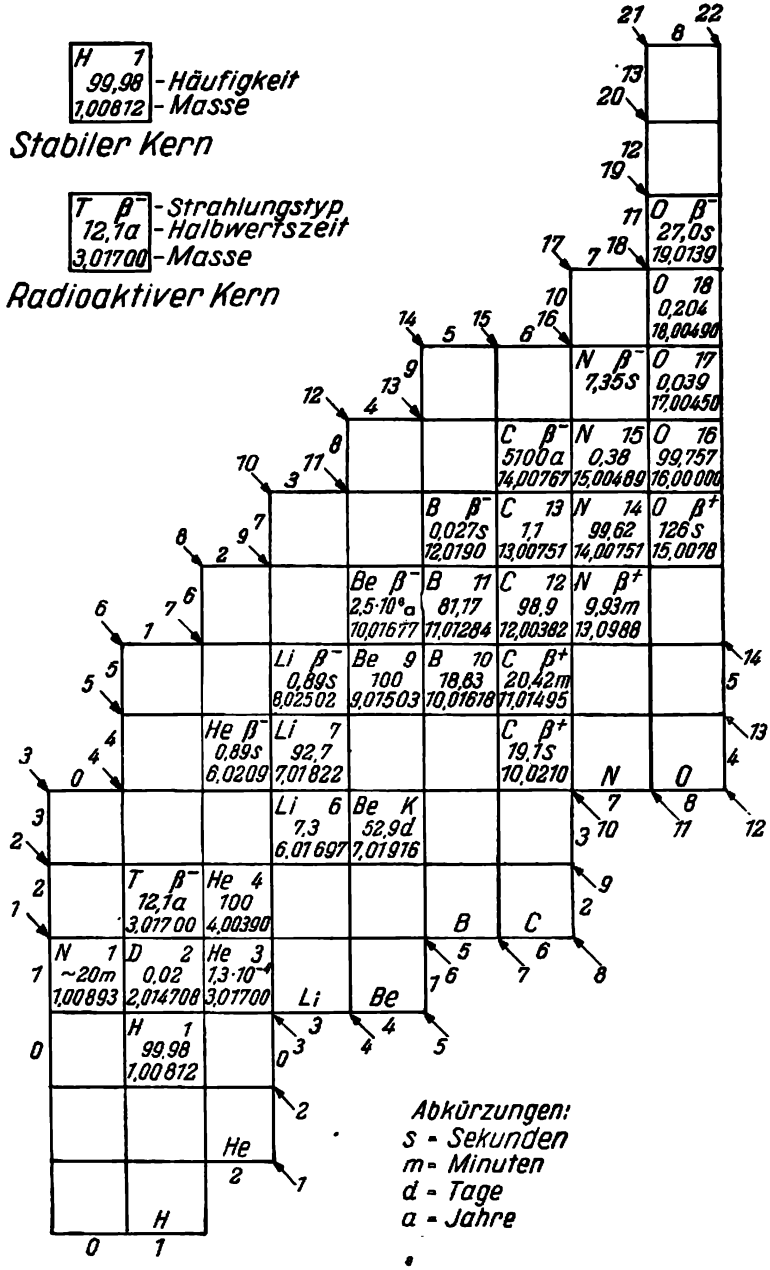


Abb. 297. Ausschnitt aus einem ausführlichen Diagramm der stabilen und radioaktiven Isotope

dieses Verhältnis weniger günstig liegt, doch aber noch der Stabilitätsbedingung genügt, entstanden in kleineren Mengen. Deshalb kann der prozentuale Anteil eines stabilen Isotops in einem gegebenen Element, der auch seine *Häufigkeit* genannt wird, als Maß für die Stabilität des Kerns dienen.

Im Diagramm der Abb. 296 ist auf der Abszissenachse die Zahl der Protonen Z und auf der Ordinatenachse die Zahl der Neutronen $N = A - Z$ aufgetragen. Die stabilen Isotope sind im Diagramm durch schwarze, die radioaktiven durch weiße Kreise gekennzeichnet. Man sieht, daß alle Isotope auf einer vertikalen Geraden liegen. Alle Isobaren liegen dagegen auf geneigten Geraden, neben denen die Ziffern stehen, die der Summe $N + Z$ gleich sind, d. h. die Massenzahlen A. In diesem Diagramm sieht man deutlich, daß die stabilen Isotope (schwarze Kreise) eine schmale „Gasse" bilden. Das bedeutet, daß es bei einer gegebenen Zahl von Protonen nur eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten für den Anbau von Neutronen zur Bildung eines stabilen Kerns gibt. Die Höchstzahl der stabilen Isotope: 10 bei Zinn, 9 bei Xenon. Alle Isotope, die stabilen und die radioaktiven, liegen zwischen den Geraden $A - Z = Z$ und $A - Z = 2Z$. Die erste entspricht einer Kernzusammensetzung, bei der die Zahl der Neutronen gleich der Zahl der Protonen ist. Aus dem Diagramm ist ersichtlich, daß sich die stabilen Isotope mit kleinen Massenzahlen eng um diese Gerade gruppieren. Daraus folgt, daß bei kleiner Protonenzahl solche Kerne am stabilsten sind, bei denen die Zahl der Protonen gleich der Zahl der Neutronen ist. Je größer A, um so stärker ist in den Kernen die Zahl der *Neutronen* im Gegensatz zu der der Protonen vertreten.

In Abb. 297 ist der Anfang des Diagramms ausführlicher dargestellt. Hier sind Angaben über die Häufigkeit der stabilen Isotope, die Art der Radioaktivität der unbeständigen Isotope und die Zerfallszeiten zusammengestellt. Es fällt auf, daß bei einer überschüssigen (in bezug auf die Stabilität) Neutronenzahl der Kern radioaktiv ist und negative Elektronen ausstrahlt (β^--Radioaktivität); bei zu kleiner Neutronenzahl ist die Radioaktivität des Kerns mit der Ausstrahlung von positiven Elektronen verbunden (β^+-Radioaktivität). In beiden Fällen stellt sich durch den radioaktiven Prozeß wieder das Verhältnis zwischen der Neutronen- und Protonenzahl her, das für die Stabilität des Kerns notwendig ist.

§ 238. Der Kernspin

Das wichtigste Merkmal des Kerns ist neben Ladung und Masse sein Spin, d. h. sein Eigendrehimpuls. Die Existenz des Kernspins wurde spektroskopisch festgestellt. Früher haben wir gesehen (Kapitel XV), daß die sogenannte „Feinstruktur" der Spektrallinien, d. h. die Duplizität, Triplizität und überhaupt Multiplizität, durch den Elektronenspin bedingt ist. Im einfachsten Fall der Atome mit einem Valenzelektron spaltet sich jedes Niveau $p, d, f, \ldots$ in Abhängigkeit von der gegenseitigen Orientierung des Bahn- und Spinmoments auf; infolgedessen sind die Linien der Hauptserie einfache Dubletts und die Linien der anderen Serien zusammengesetzte Dubletts.

1928 zeigten die sowjetischen Physiker A. N. Terenin und L. N. Dobrezow, daß beide Linien des Natriumdubletts D_1 und D_2 selbst wieder in zwei sehr eng benachbarte Linien aufgelöst werden, wenn man Spektralapparate mit hohem Auflösungsvermögen und Lichtquellen besonderer Konstruktion, die sehr schmale Spektrallinien liefern, benutzt. Weiter oben haben wir gesehen (siehe Abb. 277), daß das Natriumdublett bei Übergängen zwischen den angeregten Niveaus $3^2P_{\frac{3}{2}}$ und $3^2P_{\frac{1}{2}}$ und dem Grundniveau des Natriums $3^2S_{\frac{1}{2}}$ entsteht,

und zwar wird die Komponente D_1 mit der Wellenlänge 5895,930 Å durch den Übergang $3^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P_{\frac{1}{2}}$ und die Komponente D_2 mit $\lambda = 5889{,}963$ Å durch den Übergang $3^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P_{\frac{3}{2}}$ hervorgerufen. Der Abstand zwischen den beiden Komponenten beträgt 6 Å. Genaue Messungen zeigten, daß die Linie D_1 ihrerseits aus zwei Komponenten besteht, deren Abstand voneinander 0,023 Å beträgt. Die Linie D_2 spaltet sich in zwei Komponenten mit einem Abstand von 0,021 Å auf.

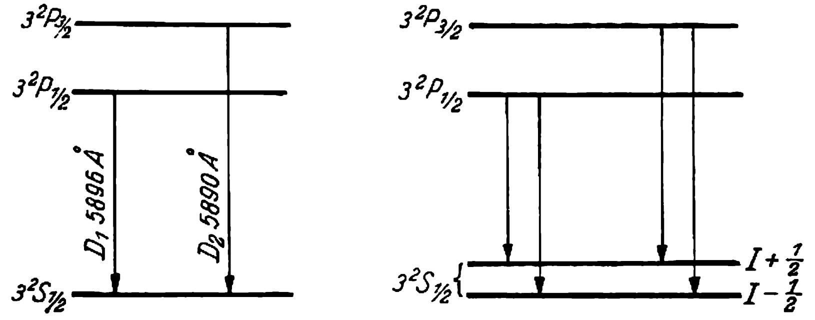


Abb. 298. Schemata zur Erklärung der Fein- und Hyperfeinstruktur der D-Linien des Natriums

Diese Aufspaltung ist also ungefähr 300mal kleiner als der Abstand zwischen den Linien D_1 und D_2 und wird deshalb *Hyperfein*struktur genannt.

Man sieht sofort, daß die Hyperfeinstruktur nicht durch den Elektronenspin erklärt werden kann, da dieser nur die Aufspaltung des 3 P-Niveaus in *zwei* Unterniveaus $3^2P_{\frac{1}{2}}$ und $3^2P_{\frac{3}{2}}$ und damit das Auftreten der zwei Komponenten D_1 und D_2 erklärt. Die Aufspaltung jeder dieser Komponenten kann erklärt werden, wenn man außer dem Bahn- und Spinmoment des *Elektrons* noch den *Kernspin* berücksichtigt. In Abb. 298 sind Schemata wiedergegeben, die das Auftreten der Hyperfeinstruktur der Linie D_1 erläutern. Das linke Schema gibt die übliche Erklärung für das Dublett D_1 und D_2 durch Berücksichtigung des Bahn- und Spinmoments des Elektrons. Das rechte Schema erläutert die Hyperfeinstruktur der Linie D_1. Das Bahnmoment ist im Grundzustand des Natriums gleich Null (Zustand des S-Typs), das Spinmoment des Elektrons ist gleich $\frac{1}{2}$. Wir berücksichtigen jetzt den Kernspin und bezeichnen ihn vorläufig, ohne seine Größe zu kennen, mit I[1]. Das Gesamtmoment des Atoms, das gleich der Summe aller Momente ist, bezeichnen wir mit F. Zur Berechnung des Gesamtmoments F ist das Vektorschema anzuwenden. Da im Grundzustand des Natriums das Moment, das vom Elektron herrührt, gleich $\frac{1}{2}$ ist, wird das Moment F entweder gleich $I + \frac{1}{2}$ oder $I - \frac{1}{2}$ sein. Bei Berücksichtigung des Kernspins spaltet sich also das Grundniveau in zwei Unterniveaus mit den Quantenzahlen $I \pm \frac{1}{2}$ auf. Das angeregte Niveau $3^2P_{\frac{1}{2}}$ spaltet sich ebenfalls in zwei Unter-

[1]) Wir verstehen hier und weiterhin unter „Moment" die Quantenzahl des Moments. Der absolute Wert des Moments ist $\sqrt{I(I+1)}\,\frac{h}{2\pi}$.

niveaus auf. Da aber diese Aufspaltung bedeutend kleiner ist als die Aufspaltung des Grundniveaus[1]), braucht man sie nicht zu berücksichtigen. Wir erhalten also auf diese Weise die Erklärung für die Hyperfeinstruktur der Linie D_1, wie sie im rechten Schema der Abb. 298 dargestellt ist.

Die Größe des Kernspinmoments I von Na^{23} kann aus dem Intensitätsverhältnis der Hyperfeinstrukturkomponenten folgendermaßen gefunden werden. Nach der Regel für die Intensitäten (§ 234) ist das Intensitätsverhältnis der Linien, die durch Übergänge von den zusammenfallenden Unterniveaus des $3^2P_{\frac{1}{2}}$-Terms zu den zwei aufgespaltenen Unterniveaus des Grundzustandes $3^2S_{\frac{1}{2}}$ zustande kommen, gleich dem Verhältnis der statistischen Gewichte der aufgespaltenen Unterniveaus. Das statistische Gewicht, d. h. die Zahl der Aufspaltungskomponenten des gegebenen Unterniveaus im Magnetfeld, ist allgemein gleich $2F + 1$. Da in unserem Falle

$$F = I \pm \frac{1}{2}$$

ist, muß das Verhältnis der statistischen Gewichte und folglich auch das Verhältnis der Intensitäten gleich

$$\frac{2\left(I - \frac{1}{2}\right) + 1}{2\left(I + \frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{2I}{2(I + 1)}$$

sein. Für $I = \frac{1}{2}$ wird dieses Verhältnis 1:3; für $I = 1$ wird es 1:2; für $I = \frac{3}{2}$ ist das Verhältnis der statistischen Gewichte 1:1,67 und schließlich für $I = 2$ wird es 1:1,5. Das Experiment hat gezeigt, daß das Intensitätsverhältnis der Hyperfeinstrukturkomponenten der D_1-Linie gleich 1:1,7 ist. Daraus folgt, daß der Kernspin des Na^{23} gleich $\frac{3}{2}$ ist. Dieser Wert von I wurde auch durch die Versuche von S. E. Frisch bestätigt, der die Hyperfeinstruktur einer Linie des einfach ionisierten Natriums untersuchte.

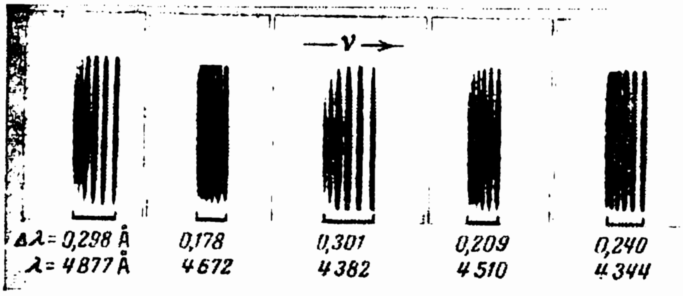


Abb. 299. Hyperfeinstruktur von Linien des Praseodyms

[1]) Nach genauen Messungen ist die Aufspaltung des $3^2P_{\frac{1}{2}}$-Niveaus fast 10mal kleiner als die Aufspaltung des Grundniveaus $3^2S_{\frac{1}{2}}$.

Die Hyperfeinstruktur wurde bei einer großen Anzahl von Atomen untersucht. Wie kompliziert diese Struktur sein kann, ersieht man aus Abb. 299, wo eine Photographie der Linien des Praseodyms, das zu den seltenen Erden gehört, wiedergegeben ist. Sie wurde mit Hilfe eines Spektralapparates von hohem Auflösungsvermögen erhalten. Die Untersuchung der Hyperfeinstruktur ist eine sehr leistungsfähige Methode zur Kernspinbestimmung. Es gibt jedoch eine Reihe anderer Methoden, die in den nächsten Paragraphen behandelt werden. Um die weiteren Untersuchungen zu erleichtern, führen wir hier (Tabelle XL) einige Beispiele von Zahlenwerten des Kernspins an (einige von ihnen wurden nach anderen Methoden bestimmt).

Tabelle XL

Element und Isotop	Protonenzahl	Neutronenzahl	*I*	Element und Isotop	Protonenzahl	Neutronenzahl	*I*
Neutron	0	1	$\frac{1}{2}$	$_4Be^9$	4	5	$\frac{3}{2}$
				$_5B^{11}$	5	6	$\frac{3}{2}$
Proton	1	0	$\frac{1}{2}$	$_6C^{12}$	6	6	0
				$_7N^{14}$	7	7	1
$_1D^2$	1	1	1	$_7N^{15}$	7	8	$\frac{1}{2}$
$_2He^4$	2	2	0	$_8O^{16}$	8	8	0
$_3Li^6$	3	3	1	$_9F^{19}$	9	10	$\frac{1}{2}$
$_3Li^7$	3	4	$\frac{3}{2}$				

§ 239. Spin und Statistik der Atomkerne

In § 215 wurde schon darauf hingewiesen, daß in der Natur zwei Arten von Teilchen vorkommen. Die Elektronen und überhaupt alle Teilchen, die einen halbzahligen Spin besitzen, genügen dem Pauli-Prinzip und der Fermi-Statistik. Die Wellenfunktion, die den Zustand eines Systems identischer Teilchen dieser Art beschreibt, ist antisymmetrisch; sie ändert ihr Vorzeichen bei Umstellung jedes Teilchenpaares. In einem Zustand, der durch eine bestimmte Kombination aller Quantenzahlen gegeben ist, kann sich nur ein Teilchen befinden. Andererseits genügen Photonen und überhaupt Elementarteilchen mit ganzzahligem Spin der Bose-Einstein-Statistik. Ein System von identischen Teilchen dieser Art wird durch eine symmetrische Wellenfunktion beschrieben. Die Einschränkungen, die sich aus dem Pauli-Prinzip ergeben, treten in diesem Falle nicht auf, d. h., in einem bestimmten Quantenzustand kann sich eine beliebige Anzahl von Teilchen befinden.

Wie wir gesehen haben, besitzen Protonen und Neutronen einen halbzahligen Spin. Daher genügen die einen wie die anderen der Fermi-Statistik. Für zusammengesetzte Kerne gibt es eine Regel, nach der Kerne, die aus einer ungeraden Anzahl von Teilchen bestehen, d. h. Kerne mit ungerader Massenzahl, der Fermi-Statistik genügen, dagegen genügen Kerne mit gerader Massenzahl der Bose-Einstein-Statistik. Die Kerne He^4, O^{16}, N^{14} z. B. genügen der Bose-Einstein-Statistik, dagegen die Kerne He^3, Li^7 usw. der Fermi-Statistik. Die Kernladung spielt dabei keine Rolle; wichtig ist nur die Gesamtzahl der Elementarteilchen im Kern, d. h. die Summe der Protonen- und Neutronenzahlen.

Die oben formulierte Regel kann am einfachsten auf folgende Weise bewiesen werden. Wir betrachten zwei Kerne; jeder besteht aus Z Protonen und N Neutronen. Das System

aller Teilchen, die diese zwei Kerne bilden, wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, die von den Koordinaten und Spins aller Teilchen abhängt. Da sowohl die Protonen wie auch die Neutronen dem PAULI-Prinzip gehorchen, ist diese Wellenfunktion in bezug auf die Koordinaten und Spins dieser Teilchen antisymmetrisch. Stellen wir uns jetzt vor, daß wir die Plätze zweier Protonen vertauschen, von denen eines zum ersten und das andere zum zweiten Kern gehört. Die Wellenfunktion ändert dabei ihr Vorzeichen, d. h. sie wird mit -1 multipliziert. Bei Vertauschung eines zweiten Protonenpaares ändert sie erneut ihr Vorzeichen, d. h., sie wird mit $(-1)^2$ multipliziert. Man sieht, daß durch fortgesetzte Umstellung aller Protonen und aller Neutronen der erste Kern schließlich den Platz des zweiten einnimmt und umgekehrt. Die Wellenfunktion wird dabei mit $(-1)^{N+Z} = (-1)^A$ multipliziert, wobei $A = N + Z$ die Massenzahl des Kerns ist. Die Vertauschung identischer Kerne ändert daher das Vorzeichen der Wellenfunktion nicht, wenn A gerade ist; die Wellenfunktion ist symmetrisch in bezug auf Vertauschung der Kerne, und die Kerne gehorchen der BOSE-Statistik. Ist A jedoch ungerade, dann ändert die Wellenfunktion ihr Vorzeichen bei Vertauschung der Kerne; sie ist antisymmetrisch, und die Kerne genügen der FERMI-Statistik. Damit ist die oben formulierte Regel bewiesen.

Die einfachste Möglichkeit zur experimentellen Ermittlung der Kernstatistik und Bestimmung des Kernspins ist die Untersuchung der Rotationsstruktur von Molekülspektren. Rotationsspektren entstehen bei Übergängen zwischen Termen, die verschiedenen Rotationszuständen des Moleküls als *Ganzem* entsprechen. Experimentell fand man, daß sich die Linien der Rotationsspektren gesetzmäßig in ihrer Intensität abwechseln, wenn das Molekül aus zwei gleichen Atomen besteht (z. B. das Stickstoffmolekül $N^{14}\,N^{14}$, aber nicht $N^{14}\,N^{15}$), d. h., neben einer kräftigen Linie liegt eine schwache, dann wieder eine kräftige usw. Wenn die Kerne dabei der BOSE-Statistik gehorchen, sind die geradzahligen Linien kräftiger, wenn die FERMI-Statistik gilt, sind die ungeradzahligen Linien kräftiger.

Die Erklärung dieser interessanten Tatsache hängt mit den Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen zusammen. Die Gesamteigenfunktion eines Systems zweier Kerne hängt sowohl von ihren Lagekoordinaten als auch von ihren Spins ab. Wenn wir die Gesamtheit aller Koordinaten mit x und den Gesamtspin mit σ bezeichnen und beachten, daß wegen der Kleinheit des magnetischen Kerneigenmoments seine Wechselwirkung mit dem „Bahn"-moment gering ist, können wir die Wellenfunktion mit ausreichender Näherung als Produkt

$$\Psi(x, \sigma) = \psi(x)\,\varphi(\sigma)$$

darstellen. Wenn der Kern der FERMI-Statistik gehorcht, ist $\Psi(x, \sigma)$ antisymmetrisch. Da jedoch die Gesamtfunktion $\Psi(x, \sigma)$ ein Produkt der Koordinaten- und Spinfunktion ist, kann die Koordinatenfunktion $\psi(x)$ sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein. Entsprechend ist dann $\varphi(\sigma)$ im ersten Fall antisymmetrisch und im zweiten symmetrisch.

In § 216 haben wir uns bei der Untersuchung des analogen Falls für ein System zweier Elektronen davon überzeugt, daß dann, wenn die Koordinatenfunktion $\psi(x)$ symmetrisch ist, die Spinfunktion antiparallelen Spins entspricht (Gesamtspin $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, Singulettzustand), und umgekehrt, $\varphi(\sigma)$ bei antisymmetrischen $\psi(x)$ parallelen Spins (Gesamtspin $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, Triplettzustand) entspricht. Diese Regel, die an einem einfachen Beispiel gefunden wurde, kann

durch sehr allgemeine theoretische Überlegungen begründet werden[1]), so daß in symmetrischen (*in bezug auf die Koordinaten*) Zuständen der Gesamtspin der Kerne des Moleküls gleich der Summe und in antisymmetrischen Zuständen gleich der Differenz der Kernspins der Atome ist. Die statistischen Gewichte der Zustände beider Symmetriearten (in bezug auf die Koordinaten) sind jedoch verschieden. Die Berechnung der Anzahl der bei gegebener Größe I des Spins eines einzelnen Kerns möglichen symmetrischen und antisymmetrischen Zustände zeigt, daß das Verhältnis der statistischen Gewichte für Moleküle, deren Kerne der FERMI-Statistik gehorchen, gleich

$$\varrho = \frac{g_a}{g_s} = \frac{I+1}{I} \tag{239,1}$$

sein muß, wobei g_a und g_s entsprechend die Gewichte der antisymmetrischen und symmetrischen Zustände sind.[2])

Für die BOSE-Statistik bleiben alle Überlegungen bestehen. Der Unterschied besteht nur darin, daß die vollständige Wellenfunktion $\Psi(x, \sigma) = \psi(x) \cdot \varphi(\sigma)$ symmetrisch sein muß. Deshalb ist $\varphi(\sigma)$ bei symmetrischer Koordinatenfunktion auch symmetrisch, bei antisymmetrischem $\psi(x)$ ist auch $\varphi(\sigma)$ antisymmetrisch. Es verhält sich also alles umgekehrt wie bei der FERMI-Statistik. Deshalb ist auch das Verhältnis der statistischen

---

[1]) Siehe L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ: „Quantenmechanik", Bd. I, S. 243 (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц: „Квантовая механика", Гостехиздат, 1948) oder G. LUDWIG: „Die Grundlagen der Quantenmechanik", Springer-Verlag 1954.

[2]) Diese Formel wird auf folgende Weise abgeleitet: Das statistische Gewicht eines Zustandes mit dem Impulsmoment I ist bekanntlich gleich der Anzahl der möglichen Projektionen von I auf eine beliebige Achse, d. h. $2I + 1$. Der Zustand eines Systems zweier identischer Kerne A und B wird bei schwacher Wechselwirkung durch das Produkt $\psi_{m_1}(A) \cdot \psi_{m_2}(B)$ beschrieben, wobei m_1 und m_2 die Projektionen des Moments auf die Achse bedeuten. Da jede Projektion $2I + 1$ Werte annehmen kann, gibt es $(2I + 1)^2$ solcher Funktionen. Berechnen wir, wie viele davon symmetrisch und wie viele antisymmetrisch sind. Man sieht, daß alle Funktionen, die gleichen Werten von m_1 und m_2 entsprechen, symmetrisch sind, da für $m_1 = m_2$ $\psi_{m_1}(A) \cdot \psi_{m_2}(B) = \psi_{m_1}(B) \cdot \psi_{m_2}(A)$ wird. Solche Funktionen gibt es genau so viele wie es mögliche Werte von m gibt, d. h. $(2I + 1)$. Die übrigen Funktionen, deren Anzahl gleich

$$(2I + 1)^2 - (2I + 1) = 2I(2I + 1)$$

ist, sind teils symmetrisch, teils antisymmetrisch. Man kann sich leicht überlegen, daß für $m_1 \neq m_2$ die Anzahl beider Funktionen gleich ist. Für $m_1 \neq m_2$ kann man tatsächlich aus jedem Paar der Funktionen $\psi_{m_1}(A) \cdot \psi_{m_2}(B)$ und $\psi_{m_1}(B) \cdot \psi_{m_2}(A)$ eine symmetrische oder eine antisymmetrische Funktion konstruieren, und zwar

$$\psi_{m_1}(A) \cdot \psi_{m_2}(B) \pm \psi_{m_1}(B) \cdot \psi_{m_2}(A).$$

Die Hälfte, d. h. $I(2I + 1)$ von den $2I(2I + 1)$ Funktionen, ist also symmetrisch. Die Gesamtzahl der symmetrischen Funktionen ist deshalb

$$(2I + 1) + I(2I + 1) = (2I + 1)(I + 1).$$

Die Anzahl der antisymmetrischen Funktionen beträgt nach dem Gesagten $I(2I + 1)$. Das Verhältnis beider ist gleich

$$\varrho = \frac{(2I + 1)(I + 1)}{I(2I + 1)} = \frac{I + 1}{I}.$$

Gewichte umgekehrt:

$$\frac{g_a}{g_s} = \frac{I}{J+1}. \tag{239,2}$$

Wegen des Kombinationsverbots für Terme verschiedener Symmetrie (siehe § 216) können Übergänge entweder nur zwischen symmetrischen¹) oder nur zwischen antisymmetrischen Zuständen erfolgen. Da jedoch die statistischen Gewichte der Zustände beider Symmetriearten verschieden sind, ist auch die Intensität der entsprechenden Linien verschieden. Dabei sieht man durch Vergleich der Formeln (239,1) und (239,2), daß ein und dieselben Linien bei Zugehörigkeit des Kerns zur Fermi-Statistik intensiver, bei Zugehörigkeit des Kerns zur Bose-Statistik dagegen schwächer sind und umgekehrt. Eine ergänzende Untersuchung der Eigenschaften des Rotationsanteils der Wellenfunktion für das Molekül zeigt, daß im ersten Fall die ungeraden und im zweiten Fall die geraden Linien intensiver sind.

Wir sehen also, daß man aus dem Charakter des Intensitätswechsels der Rotationslinien, d. h. je nachdem, ob die geraden oder die ungeraden Linien intensiver sind, die Art der Kernstatistik feststellen kann. Weiterhin erlaubt die Messung des Intensitätsverhältnisses benachbarter Linien eine Bestimmung des Kernspins I. Beim Wasserstoffmolekül H^1H^1 weist z. B. der Intensitätswechsel, wie zu erwarten war, auf die Fermi-Statistik hin, und das Intensitätsverhältnis ist gleich 3:1, d. h.

$$\frac{I+1}{I} = 3.$$

Daraus folgt $I = \frac{1}{2}$. Der Fall des Wasserstoffs ist noch in einer anderen Beziehung bemerkenswert. Wasserstoffmoleküle haben in antisymmetrischen Zuständen¹) einen Gesamtkernspin von $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ und in symmetrischen Zuständen $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Das Übergangsverbot zwischen Zuständen verschiedener Symmetrie würde absolut streng gelten, wenn kein Spin vorhanden wäre; die Störungen, die durch die Anwesenheit des Spins bewirkt werden, ermöglichen diese Übergänge; die Übergangswahrscheinlichkeit ist aber gering. Infolge dieser geringen Wahrscheinlichkeit kann man den molekularen Wasserstoff gewissermaßen als ein Gemisch zweier Gase ansehen, deren Moleküle sich durch ihren Gesamtkernspin (1 und 0), durch ihre Symmetrieeigenschaften und deshalb auch durch ihr thermodynamisches Verhalten unterscheiden. Das Gas, deren Moleküle den Kernspin 1 haben, heißt *Orthowasserstoff*; die Moleküle mit dem Gesamtkernspin 0 bilden den *Parawasserstoff*. Da die Übergangswahrscheinlichkeit Ortho—Para zwar gering, aber doch von Null verschieden ist, kann man diese beiden Gase unter bestimmten Bedingungen (bei tiefen Temperaturen und in Anwesenheit von Aktivkohle) praktisch vollkommen voneinander trennen und einzeln untersuchen.

Wir wollen noch zwei Folgerungen aus den dargelegten statistischen Kerneigenschaften erwähnen:

a) Wenn der Kernspin gleich Null ist, dann gehorchen diese Kerne der Bose-Statistik. Nach Formel (239,2) existieren für $I = 0$ keine antisymmetrischen Zustände. Deshalb muß im Rotationsspektrum jede zweite Linie verschwinden. Das wird z. B. bei den Molekülen $O^{16}\,O^{16}$ auch wirklich beobachtet.

---

¹) Hier und im Folgenden bezieht sich der Hinweis auf die Symmetrieeigenschaften eines Zustandes *auf die Koordinaten*.

b) Wenn das Molekül eines gegebenen Elements aus verschiedenen Isotopen besteht, z. B. $N^{14}N^{15}$, $Cl^{35}Cl^{37}$, dann darf kein Intensitätswechsel auftreten. Auch das wird bei den angeführten und anderen „isotopen" Molekülen beobachtet.

§ 240. Das magnetische Dipolmoment des Kerns

Ein geladenes Teilchen, das ein mechanisches Moment besitzt, muß auch ein magnetisches Moment haben. Man kann deshalb erwarten, daß auch der Kern ein magnetisches Moment besitzt. Diese Erwartung wird tatsächlich bestätigt.

Wir haben bereits gesehen (Kapitel XV), daß das Elektron neben dem Spin $\frac{1}{2}$ ein magnetisches Moment besitzt, das gleich einem Bohrschen Magneton ist:

$$M_0 = \frac{eh}{4\pi m_0 c} = 9{,}273 \cdot 10^{-21}\,\text{erg} \cdot \text{Gauss}^{-1}. \tag{240,1}$$

Da das Proton die gleiche Ladung und den gleichen Spin wie das Elektron besitzt, dürfte man erwarten, daß sein magnetisches Moment durch eine der Gleichung (240,1) analoge Beziehung mit den universellen Konstanten verbunden ist:

$$\mu_k = \frac{he}{4\pi m_p c}, \tag{240,2}$$

wobei m_p die Masse des Protons ist. Die Quanteneinheit (240,2) ist die Einheit des magnetischen Kernmoments. Sie heißt *Kernmagneton.* Da in den Ausdruck für das Kernmagneton die Masse des Protons eingeht, ist μ_k 1836,5mal kleiner als das Bohrsche Magneton:

$$\frac{M_0}{\mu_k} = \frac{m_p}{m_0} = 1836{,}5\,.$$

Wegen dieser Kleinheit des Kernmagnetons stellt die unmittelbare Bestimmung von magnetischen Kernmomenten eine sehr schwierige experimentelle Aufgabe dar.

Es gelang Stern und seinen Mitarbeitern zuerst, die Methode der Molekularstrahlen im inhomogenen Magnetfeld (Stern-Gerlach-Versuch, § 198) so weit zu vervollkommnen, daß die Messung des magnetischen Moments des Protons möglich wurde. Bei diesen Experimenten erreichte die Inhomogenität des äußeren Feldes dank der besonderen Form der Polschuhe 200000 Oersted · cm^{-1}. Das Manometer, das die Ablenkung des Molekularstrahls anzeigte, konnte Druckänderungen von 10^{-8} — 10^{-9} mm Hg registrieren. Auf dem Gebiete des Kernmagnetismus jedoch konnte selbst die vervollkommnete Methode von Stern und Gerlach infolge der oben angeführten Schwierigkeiten keine genauen Resultate liefern. Deshalb wurden verschiedene Abänderungen der ursprünglichen Molekularstrahlmethode ausgearbeitet. Von all diesen Modifikationen[1]) wollen wir nur die sogenannte magnetische Resonanzmethode oder Methode der Hochfrequenzspektroskopie, die von Rabi und seinen Mitarbeitern ausgearbeitet wurde, besprechen.

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung des Kernmagnetismus findet sich in der Monographie von J. G. Dorfmann: „Magnetische Eigenschaften des Atomkerns". (Я. Г. Дорфман: „Магнитные свойства атомного ядра", Гостехиздат, 1948) und auch H. Kopfermann: „Kernmomente", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1941.

Erinnern wir uns zunächst an einige Beziehungen, die das mechanische und magnetische Moment miteinander verbinden. Auf Grund des Theorems von LARMOR (Teil I, § 72, Teil II, §§ 209 und 210) führt ein atomarer Magnetkreisel, der sich im Magnetfeld $\mathfrak{H}$ befindet, eine Präzession um die Richtung des Feldes mit der Kreisfrequenz

$$o = g \frac{e}{2Mc} \mathfrak{H} \tag{240,3}$$

aus, wobei der Koeffizient g das gyromagnetische Verhältnis ist. Das Produkt $g \frac{e}{2Mc}$ ist gleich dem Verhältnis des magnetischen Moments zum mechanischen:

$$g \frac{e}{2Mc} = \frac{\mu}{J}.$$

Für das Bahnmoment der Elektronenhülle (wenn kein Spin vorhanden ist) ist M gleich der Elektronenmasse und $g = 1$.

Bei einem reinen Spinmoment des Elektrons ist $g = 2$. Wenn μ die Zahl der BOHRschen Magnetonen des magnetischen Moments angibt und J durch die Quantenzahl des mechanischen Moments (d. h. durch die Zahl, die die Projektion des Impulsmoments auf die Richtung des Feldes in Einheiten $\frac{h}{2\pi}$ mißt) gekennzeichnet wird, kann man an Hand des gyromagnetischen Verhältnisses g sofort das magnetische Moment berechnen, wenn J bekannt ist. So ist z. B. für das Spinmoment des Elektrons $J = S = \frac{1}{2}$ und $g = 2$. Deshalb ist $\frac{\mu}{S} = 2$ und $\mu = 2S = 1$ (in BOHRschen Magnetonen). Dasselbe gilt auch für einen Kern-Magnetkreisel, mit dem einzigen Unterschied, daß als Masse M die Protonenmasse einzusetzen ist und entsprechend das magnetische Moment μ in Kernmagnetonen ausgedrückt wird; an Stelle von J geht die Quantenzahl des Kernspins I ein. Wenn man schließlich von der Kreisfrequenz o zur Frequenz ν übergeht, erhält man Formel (240,3) in der Form

$$\nu = \frac{o}{2\pi} = g \frac{e}{4\pi Mc} \mathfrak{H}. \tag{240,4}$$

Auf diese Weise kann die Bestimmung des magnetischen Moments auf die Messung der Frequenz der LARMOR-Präzession zurückgeführt werden. Wenn ν bekannt ist, kann man nach (240,4) g berechnen, und daraus ergibt sich, wenn der Kernspin bekannt ist, auch sofort das magnetische Moment des Kerns.

Das Prinzip der magnetischen Resonanzmethode besteht in folgendem: Der Molekularstrahl, der von dem Spalt O (Abb. 300) ausgeht, gelangt in das inhomogene Feld des Magneten A, wo auf jedes Teilchen des Strahls die Kraft

$$F_A = \mu_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z}\right)_A$$

wirkt. μ_z ist die Projektion des magnetischen Moments des Atoms (oder Moleküls) auf die z-Achse. In diesem Feld beschreibt der atomare Kreisel eine gekrümmte Bahnkurve, die auf dem Bild durch eine ausgezogene Linie dargestellt ist. Nachdem der Strahl den Spalt S

passiert hat, gelangt er ins Feld des Magneten B, das auch inhomogen und in jeder Beziehung dem Magnetfeld A gleich ist, dessen Gradient der Inhomogenität $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z}$ jedoch die entgegengesetzte Richtung hat. Im Feld B wirkt deshalb auf den atomaren Kreisel die Kraft

$$F_B = -\mu_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z}\right)_B,$$

die der Kraft, mit der das inhomogene Feld A auf ihn wirkt, entgegengesetzt gerichtet ist. Wenn sich μ_z im Raum zwischen den Magneten A und B nicht ändert, dann kann man leicht das Feld B so wählen, daß es die Ablenkungen, die durch das Feld A hervorgerufen werden, genau kompensiert. Unter diesen Bedingungen registriert der bei D angeordnete Teilchenempfänger bei eingeschalteten Feldern dieselbe Intensität des Atom- oder Molekularstrahls wie ohne Feld.

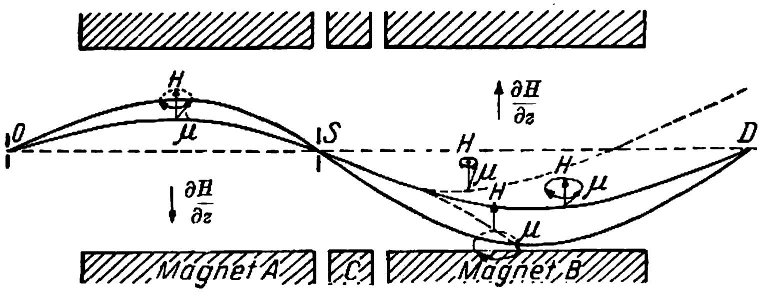


Abb. 300. Schema der magnetischen Resonanzmethode

Zwischen den Magneten A und B ist ein dritter Magnet C angeordnet, der ein starkes *homogenes* Magnetfeld von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ erzeugt.[1]) In diesem Feld vollführen die Atomkreisel eine Larmor-Präzession mit der Frequenz

$$\nu = g \frac{e}{4\pi M c} \mathfrak{H}.$$

Wenn jetzt senkrecht zu $\mathfrak{H}$ zusätzlich ein schwaches magnetisches *Wechsel*feld $\mathfrak{H}_1$ der Frequenz f angelegt wird, dann wird, wie wir unten noch ausführlich auseinandersetzen, das letztere Feld bei entsprechend gewählter Frequenz f eine Drehung des Atomkreisels hervorrufen, die den Winkel zwischen seiner Achse und der Richtung von $\mathfrak{H}$ vergrößert oder verkleinert. Deshalb wird sich die Projektion μ_z im Raum zwischen den Magneten A und B im allgemeinen ändern, und deshalb ändert sich auch die Kraft, die auf den Atomkreisel im Felde B wirkt. Die Bahn der Atome im Felde B verändert sich also. In Abb. 300

[1]) Dieses Feld muß so stark sein, daß die Kopplung zwischen dem magnetischen Kernmoment und den magnetischen Momenten der Elektronenhülle, z. B. dem Moment, das dem mechanischen Rotationsmoment des Moleküls entspricht, auseinandergerissen wird. Man wählt, wie wir noch sehen werden, solche Objekte für den Versuch aus, bei denen sich die Spinmomente der Elektronenhülle gegenseitig kompensieren. Die Bedingungen in diesem konstanten Magnetfeld sind also ähnliche wie beim Paschen-Back-Effekt, siehe § 210.

sind zwei solche veränderte Bahnen angegeben (Punktlinie); die eine biegt wegen einer Verkleinerung des Winkels zwischen μ und $\mathfrak{H}$ nach oben ab, die andere biegt wegen einer Vergrößerung dieses Winkels nach unten ab. Das bringt eine Störung der Kompensation mit sich, und in den Empfänger D fällt eine kleinere Anzahl Teilchen. Wie wir sofort sehen werden, ist dieser Effekt dann besonders stark, wenn die Frequenz f mit der LARMOR-Frequenz ν übereinstimmt, d. h. im Falle einer Resonanz beider Frequenzen.

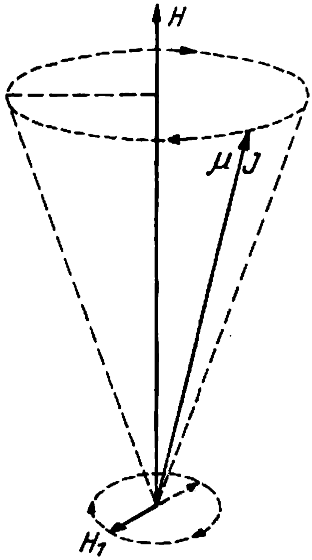


Abb. 301. Einfluß eines schwachen magnetischen Drehfeldes auf den Winkel zwischen μ und H

Untersuchen wir diese Frage ein wenig ausführlicher, und zwar zunächst vom Standpunkt der klassischen Mechanik. Wir betrachten einen Kreisel mit dem mechanischen Moment J und dem magnetischen Moment μ. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß die Richtungen beider Momente gleich seien. Der Vektor J wird um $\mathfrak{H}$ mit der LARMOR-Frequenz (240,4) präzessieren. Wir legen jetzt ein zusätzliches schwaches magnetisches *Dreh*feld $\mathfrak{H}_1$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$ und J an und setzen zunächst voraus, daß die Drehrichtung dieses Feldes mit der Präzessionsrichtung und die Frequenz f mit der LARMOR-Frequenz ν übereinstimmen. Man sieht, daß in einem Koordinatensystem, das sich mit J dreht, auf den Kreisel ein Kräftepaar wirkt, das J umzudrehen versucht und den Winkel $(J, \mathfrak{H})$ vergrößert oder verkleinert. Wenn die Frequenzen f und ν, wie wir voraussetzen, übereinstimmen, wird sich dieser Effekt im Verlaufe der Zeit verstärken und die Winkeländerung kann sehr groß werden. Wenn jedoch ν und f nicht übereinstimmen, werden die Phasen der Präzessionsrotation und der Feldrotation schnell verstimmt, und die Winkeländerung wird kleiner. Man sieht, daß die Resonanz entweder durch Änderung der Frequenz des Drehfeldes oder der Feldstärke des Feldes $\mathfrak{H}$, was eine Änderung der LARMOR-Präzessionsfrequenz nach sich zieht, erreicht werden kann.

Natürlich taucht die Frage auf: Wie groß ist die zur Resonanz erforderliche Frequenz f und kann sie mit modernen experimentellen Hilfsmitteln realisiert werden? Es erwies sich für

die beschriebene magnetische Resonanzmethode als äußerst günstig, daß bei Feldern $\mathfrak{H}$ von der Größenordnung einiger 10000 Oersted, die man bei Versuchen mit Molekularstrahlen und beim ZEEMAN-Effekt anwendet, die Frequenz der LARMOR-Präzession gerade in das Hochfrequenzgebiet der Mikrowellen fällt (siehe die Übung zu § 72 des ersten Teils).

Obwohl man zur Erklärung des Prinzips der magnetischen Resonanzmethode ein magnetisches Drehfeld benutzt, erwies es sich in der Praxis als günstiger, nicht ein Drehfeld, sondern ein schwankendes Feld zu benutzen. Das bringt jedoch keine wesentlichen Änderungen in die vorangegangenen Ausführungen. Das schwankende Feld kann man als Überlagerung zweier Drehfelder gleicher Frequenz und entgegengesetzten Drehsinns ansehen. Dabei ruft das Feld, das sich im Sinne der LARMOR-Präzession dreht, die beschriebene Wirkung hervor. Durch das Feld aber, das sich in entgegengesetzter Richtung dreht, entsteht im Mittel keine Ablenkung, denn in einer Halbperiode vergrößert dieses Feld den Winkel zwischen J und $\mathfrak{H}$, und in der anderen verkleinert sie ihn.

Alle bisherigen Überlegungen haben wir für einen makroskopischen Kreisel, der der klassischen Mechanik gehorcht, durchgeführt. Die Atomkreisel gehorchen jedoch der Quantenmechanik; so geht z. B. die Orientierungsänderung bei ihnen nicht stetig vor sich, sondern erfolgt entsprechend den Regeln für die räumliche Quantelung sprunghaft. Man kann jedoch bereits nach dem Korrespondenzprinzip erwarten, daß dieser Umorientierungseffekt, der von einer Änderung der magnetischen Quantenzahl begleitet wird, auch für Atomkreisel eintritt. Quantentheoretische Rechnungen bestätigen diese Erwartung. Es zeigt sich, daß der Einfluß des zusätzlichen magnetischen Wechselfeldes sehr wesentlich von dem Verhältnis zwischen der Frequenz des Feldes f und der Frequenz der LARMOR-Präzession ν abhängt. Wenn f bedeutend kleiner als ν ist, ändert sich das Feld während einer Periode der LARMOR-Präzession wenig. Das Atom hat in diesem Fall genug Zeit, um sich der Änderung des äußeren Feldes anzupassen; sein Zustand ändert sich, wie man zu sagen pflegt, adiabatisch. Das bedeutet, daß sich seine Quantenzahlen nicht ändern; speziell bleibt die magnetische Quantenzahl, die die Orientierung charakterisiert, erhalten.[1]) Wenn aber f größer oder kleiner, jedoch von derselben Größenordnung wie ν ist, so vollzieht sich die Zustandsänderung des Atoms unter Einwirkung des äußeren Feldes „nichtadiabatisch“, es treten Quantenübergänge zwischen den Unterniveaus des gegebenen Terms auf, die durch Quantelung der Orientierung bedingt sind, d. h., die Atomkreisel ändern ihre Orientierung, indem sie elektromagnetische Strahlung absorbieren oder emittieren. Die Wahrscheinlichkeit für eine solche Umorientierung der Atomkreisel ist besonders in dem Falle groß, in dem f mit ν übereinstimmt, d. h. im Falle der Resonanz.

Um diese Methode zur Bestimmung von Kernmomenten benutzen zu können, müssen solche Bedingungen geschaffen werden, unter denen das magnetische Moment des Elektrons keinen Einfluß ausübt, da dieses um drei Größenordnungen größer ist als das magnetische Moment des Kerns. Aus diesem Grunde werden die Versuche nicht mit Atomen, sondern mit Molekülen,

---

[1]) EHRENFEST hat schon im Rahmen der alten Quantentheorie folgendes Theorem bewiesen: Ein System möge sich anfangs in einem bestimmten stationären Zustand befinden. Wenn man auf dieses System einwirkt, indem man einen äußeren Parameter ändert (z. B. die Feldstärke eines äußeren Feldes), dann bleibt das System im gleichen Quantenzustand, wenn sich der äußere Parameter langsam genug ändert. Solche langsamen Einwirkungen, die den Zustand des Systems nicht ändern, nennt man adiabatisch.
Andererseits ist bei genügend schneller Änderung des Parameters der Übergang von einem stationären Zustand zu einem anderen möglich.

bei denen sich die Elektronenspins kompensieren, durchgeführt. Die Bestimmung des magnetischen Moments des Protons kann man z. B. mit H_2-Molekülen durchführen; die Bestimmung des Kernmoments der Lithiumisotope Li^6 und Li^7 erfolgt an den Molekülen LiCl, LiBr, LiJ usw.

Beim Versuch geht man so vor, daß man entweder die Frequenz des magnetischen Wechselfeldes f oder die Feldstärke des konstanten Feldes $\mathfrak{H}$ bei konstanter Frequenz f ändert und gleichzeitig die Intensität des auf den Detektor D fallenden Molekularstrahls mißt. Wenn die Resonanz erreicht ist, durchläuft diese Intensität ein Minimum. In der Praxis mißt man häufiger $\mathfrak{H}$ bei konstanter Frequenz f. Die Resonanzschärfe kann man nach den Kurven der Abb. 302 und 303 für Li^7 und H^1 beurteilen. In beiden Fällen wurde die Frequenz des Wechselfeldes konstant gehalten. Sie betrug einige tausend Megahertz. In Abb. 303 ist gezeigt, daß bei einer Änderung des Feldes um 0,2 % ein scharfes Minimum auftritt.

Wenn man die Resonanzfrequenz f (oder, was dasselbe ist, die Larmor-Frequenz ν) gefunden hat, kann man sofort das gyromagnetische Verhältnis g ausrechnen, und daraus das magnetische Kernmoment μ ableiten. Im Falle der Resonanz muß nämlich die Frequenz ν (240,4) der Frequenz des Feldes f gleich sein, d. h.

$$g \frac{e}{4\pi Mc} \mathfrak{H} = f,$$

woraus man

$$g = \frac{4\pi Mc}{e} \cdot \frac{f}{\mathfrak{H}} \tag{240,5}$$

erhält. Wenn der Kernspin I bekannt ist, findet man das magnetische Moment μ (in Kernmagnetonen) aus der Beziehung

$$\mu = gI. \tag{240,6}$$

So erhielt man z. B. für das gyromagnetische Verhältnis des Protons

$$g = 5{,}5791 \pm 0{,}0016$$

und, da der Spin des Protons gleich $\frac{1}{2}$ ist,

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 5{,}5791 = 2{,}7896.$$

Dieses Ergebnis, das Stern schon früher mit geringerer Genauigkeit erhalten hatte, ist erstaunlich. Das magnetische Moment des Protons ist nicht, wie man erwartet hatte, gleich einem Kernmagneton, sondern 2,79mal größer. Nicht weniger erstaunlich ist die Tatsache, daß sich auch beim Neutron, das keine Ladung besitzt, ein magnetisches Moment zeigte, das gleich − 1,91 ist (das Minuszeichen weist darauf hin, daß das magnetische Moment des Neutrons dem Spin entgegengerichtet ist).[1] Es ist angebracht, schon hier darauf hinzuweisen, daß die Differenz der magnetischen Momente des Neutrons und Protons nur wenig von 1 abweicht. Einige Beispiele magnetischer Kernmomente sind in Tabelle XLI auf Seite 295 aufgeführt.

[1] Die Bestimmung des magnetischen Moments des Neutrons wurde mit einer modifizierten Methode der Hochfrequenzspektroskopie durchgeführt, siehe Kapitel XXII, § 297.

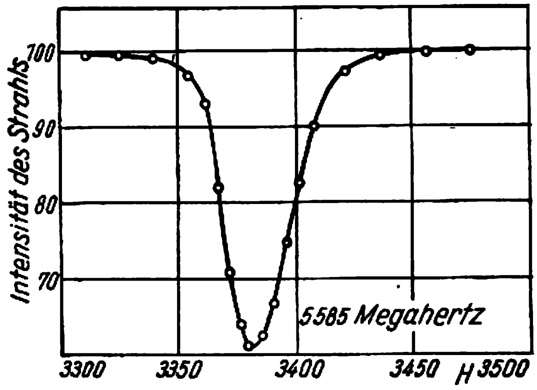


Abb. 302. Resonanzkurve für Li^7

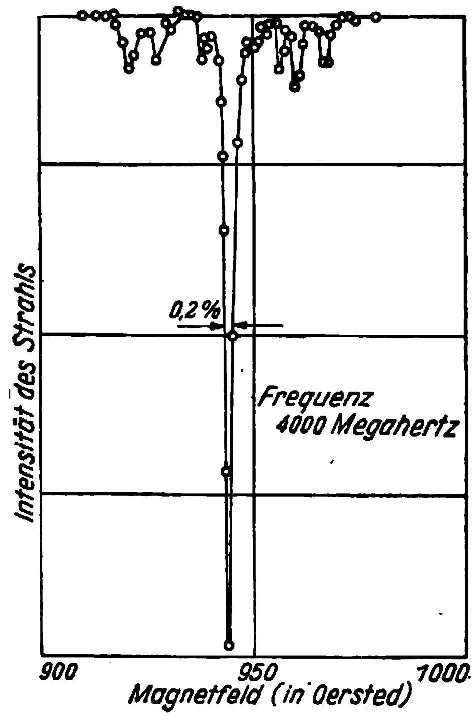


Abb. 303. Hochfrequenzspektrum des Wasserstoffkerns im HD-Molekül

Die Methode der Hochfrequenzspektroskopie erlebte bei der Anwendung auf die Erforschung des Kernmagnetismus in den letzten Jahren in Zusammenhang mit den gewaltigen Fortschritten der Radiotechnik eine bedeutende Entwicklung. Neben der Anwendung dieser Methode, die im vorigen Paragraphen beschrieben wurde, hat man eine ganze Reihe von Modifikationen entwickelt, deren gemeinsames Merkmal die gleichzeitige Anwendung eines konstanten und eines veränderlichen Magnetfeldes ist. Die Methode wird nicht nur auf Atom- und Molekularstrahlen, sondern auch auf feste, flüssige und gasförmige Körper angewandt, wobei die Resonanz an Hand der selektiven Absorption elektromagnetischer Wellen des Hochfrequenzbereichs festgestellt wird. Schließlich war es möglich, die elektromagnetische Induktion in einer Spule zu beobachten, die neben einem Körper lag, an den ein konstantes und senkrecht dazu ein hochfrequentes magnetisches Wechselfeld angelegt waren. Bei Resonanz zwischen der Frequenz des Wechselfeldes und der Frequenz der LARMOR-Präzession der magnetischen Kernmomente um die Richtung des konstanten Feldes kann die elektromagnetische Induktion in der Spule beobachtet werden. Die auf dieser Grundlage begründete Methode der Kerninduktion gibt auch die Möglichkeit, die Größe magnetischer Kernmomente zu bestimmen.[1])

Tabelle XLI

Kern	Beobachteter Wert von g	Spin I	Magnetisches Moment
H^1	5,5791 ± 0,0016	$\frac{1}{2}$	+ 2,7896
D (H^2)	0,8565 ± 0,0004	1	+ 0,8565
Li^6	0,8213 ± 0,0005	1	− 0,8213
Li^7	2,1688 ± 0,0010	$\frac{3}{2}$	+ 3,2532
Be^9	0,784 ± 0,003	$\frac{3}{2}$	− 1,176
B^{11}	1,791 ± 0,005	$\frac{3}{2}$	+ 2,686
N^{14}	0,403 ± 0,002	1	+ 0,403
N^{15}	0,560 ± 0,006	$\frac{1}{2}$	+ 0,280
F^{19}	5,250 ± 0,005	$\frac{1}{2}$	+ 2,625
Na^{23}	1,4765 ± 0,0015	$\frac{3}{2}$	+ 2,215
Al^{27}	1,452 ± 0,004	$\frac{5}{2}$	+ 3,630
K^{39}	0,260 ± 0,001	$\frac{3}{2}$	+ 0,391
K^{40}	—	4	− 1,290
K^{41}	0,143 ± 0,001	$\frac{3}{2}$	+ 0,215
In^{113}	1,22 ± 0,001	$\frac{9}{2}$	+ 5,49
In^{115}	1,22 ± 0,001	$\frac{9}{2}$	+ 5,49
Ba^{135}	0,554 ± 0,002	$\frac{3}{2}$	+ 0,831
Ba^{137}	0,619 ± 0,002	$\frac{3}{2}$	+ 0,929

Die Grundlagen der Methode der Hochfrequenzspektroskopie wurden schon lange vor der Entstehung der Quantenmechanik geschaffen; in ihren ersten Anfängen wurde sie nicht auf Atomkerne angewandt. W. K. ARKADJEW beobachtete 1913 als erster die

[1]) Um den ausgedehnten Problemkreis, der mit dem Kernmagnetismus und der Methode der Hochfrequenzspektroskopie verknüpft ist, kennenzulernen, verweisen wir den Leser speziell auf die Monographie von H. KOPFERMANN, siehe Anmerkung auf Seite 288.

selektive Absorption von Radiowellen bestimmter Frequenzen und die sie begleitende Veränderung der Magnetisierung in ferromagnetischen Stoffen. Die Kurven, die diese selektive Absorption charakterisieren, wurden von ARKADJEW als magnetische Spektren des Stoffes bezeichnet. Die quantentheoretische Erklärung dieser Erscheinung wurde zehn Jahre später durch J. G. DORFMAN gegeben. In letzter Zeit beobachteten E. K. SAWOISKI und unabhängig von ihm GORTER eine ähnliche selektive Absorption von Radiowellen in paramagnetischen Stoffen. In diesen wie auch in den Versuchen ARKADJEWS ist die selektive Absorption durch die magnetischen Eigenschaften der Elektronenhülle bedingt. Die Grundlagen für die theoretische Erklärung dieser Erscheinungen sind jedoch dieselben wie beim Kernmagnetismus.

§ 241. Elektrisches Quadrupolmoment des Kerns

Außer dem magnetischen Moment besitzt der Kern auch ein gewisses elektrisches Moment. Wenn die positive Ladung des Kerns kugelsymmetrisch verteilt wäre, dann würde der Kern in genügend großen Entfernungen wie eine Punktladung wirken; sein elektrisches Feld wäre auch kugelsymmetrisch. Es gibt jedoch eine ganze Reihe von experimentellen Ergebnissen, die darauf hinweisen, daß sehr kleine, jedoch über die Meßfehler hinausgehende Abweichungen von der Kugelsymmetrie in der Ladungsverteilung bestehen. Nach diesen Befunden hat die Ladungsverteilung im Kern die Symmetrie eines Rotationsellipsoids, das sich nur sehr wenig von einer Kugel unterscheidet. Aus der Elektrostatik ist bekannt, daß das Potential eines Systems von Ladungen in großer Entfernung (im Vergleich zu den Ausmaßen des Systems) im allgemeinsten Fall durch eine Reihe dargestellt werden kann[1]), deren erstes Glied dem gewöhnlichen COULOMB-Potential einer Punktladung entspricht; das zweite Glied entspricht dem Potential eines Dipols, das dritte dem Potential eines Quadrupols, das vierte und die folgenden entsprechen Multipolen höherer Ordnung (Oktupolen usw.). Bei vollständiger Kugelsymmetrie ist nur das erste Glied dieser Reihe von Null verschieden. Bei Abweichung von der Kugelsymmetrie sind im allgemeinen auch die folgenden Glieder von Null verschieden. Insbesondere ist das dritte Glied von Null verschieden, wenn die Verteilung die Symmetrie eines Rotationsellipsoids hat, d. h., das Potential des Feldes stellt sich als Summe eines COULOMBschen Punktpotentials und eines Quadrupolpotentials dar, wobei das letztere natürlich die Rolle einer kleinen Korrektur zum ersteren spielt. Die Rechnung liefert für das Quadrupolmoment des Rotationsellipsoids die Formel

$$Q = \frac{2}{5} \frac{\varrho V}{e} (a^2 - b^2),$$

wobei a und b die große bzw. kleine Halbachse, ϱ die elektrische Ladungsdichte und V das Volumen bezeichnen. Für einen Kern mit der Ladung Ze ist $\varrho V = Ze$ und

$$Q = \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2).$$

Wie man aus diesem Ausdruck sieht, hat das Quadrupolmoment die Dimension cm^2, und seine Größe weist auf den Grad der Abweichung von der Kugelsymmetrie ($Q = 0$ für $a = b$)

[1]) Siehe z. B. L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ: „Feldtheorie", § 40, S. 113 (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц: „Теория поля", Гостехиздат, 1948) vgl. auch W. WEIZEL: „Lehrbuch der Theoretischen Physik 1", S. 329, Verlag Springer, Berlin 1949.

hin. Das Quadrupolmoment ist positiv für $a > b$, d. h., wenn das Ellipsoid längs der Spinachse auseinandergezogen ist, und negativ für $a < b$, d. h. bei zusammengedrückter Form.

Die Existenz eines Quadrupolmoments könnte man unmittelbar daran erkennen, daß die Kernenergie in einem äußeren inhomogenen elektrischen Feld nicht nur von der Lage, sondern auch von der Orientierung des elektrischen Kernmoments hinsichtlich des Feldgradienten abhängen müßte. Wegen des äußerst kleinen Betrags des Kernquadrupolmoments ist jedoch eine solche direkte Beobachtung noch nicht möglich.

Experimentelle Ergebnisse, die auf das Vorhandensein eines Kernquadrupolmoments schließen lassen, bestehen in der Verschiebung einiger Energieniveaus des Atoms gegenüber anderen. Diese Verschiebungen treten als Abweichungen von der spektroskopischen Intervallregel auf[1]) (siehe § 218). Als Einheit des Quadrupolmoments nimmt man gewöhnlich 10^{-24} cm^2; dieser Wert hat die Größenordnung des Flächeninhalts eines Kernquerschnitts. Das Quadrupolmoment des Lutetiums $_{71}Lu^{175}$ ist z. B. gleich $+5{,}9 \cdot 10^{-24}$ cm^2, das Quadrupolmoment des Galliums $_{31}Ga^{69}$ ist gleich $+0{,}20 \cdot 10^{-24}$ cm^2. In den meisten Fällen ist das Quadrupolmoment positiv. Daraus folgt, daß die Kerne meist eine langgestreckte, zigarrenähnliche Form haben.

§ 242. Feld und Radius des Kerns

In § 28, Teil I, haben wir gesehen, daß die Theorie der Streuung von α-Teilchen, die unter der Voraussetzung einer Coulombschen Wechselwirkung zwischen dem Kern und dem α-Teilchen aufgebaut war, für schwere Kerne und nicht zu schnelle α-Teilchen gut bestätigt wird. Wegen der großen Kernladung können α-Teilchen mit einer Energie von 5 — 7 MeV nicht nahe genug an den Kern herankommen. Wir können also fürs erste sagen, daß in großen Entfernungen vom Kern sein Feld ein elektrostatisches Coulomb-Feld ist. Die Untersuchung der Streuung von α-Strahlen großer Energie an Kernen mit kleinem Z zeigte jedoch schon, daß sich der Wechselwirkungscharakter in geringen Entfernungen vom Kern schroff ändert. Man konnte nämlich aus dem Verlauf der Streuung schließen, daß sich in unmittelbarer Kernnähe der Coulombschen Abstoßung eine *Anziehungs*kraft überlagert, die sich bedeutend schneller als mit r^{-2} ändert. Diese Kraft ist also keine elektrostatische, sondern eine spezifische *Kernkraft*.

Besonders deutlich ist die Wirkung der Kernkraft bei einer Streuung von Protonen an Protonen. Sehr sorgfältige experimentelle Untersuchungen, bei denen Protonen verschiedener Energie an Wasserstoff gestreut wurden, zeigten, daß die Abweichungen von der Rutherfordschen Formel wesentlich vom Streuwinkel und von der Energie der gestreuten Protonen abhängen. Dabei ist die Rutherfordsche Formel gemeint, die durch Berücksichtigung der von der Wechselwirkung identischer Teilchen herrührenden Quanteneffekte vervollkommnet ist. Die Rolle beider Faktoren bei der Streuung an Coulomb-Kraftzentren ist offenbar: je mehr sich die Teilchen nähern, um so größer ist der Streuwinkel. In Abb. 304 ist auf der Ordinatenachse das Verhältnis der beobachteten Protonenzahl zur Protonenzahl, die nach der vervollkommneten Rutherfordschen Formel berechnet ist, aufgetragen. Die Kurven zeigen, daß die größte Abweichung gerade großen Winkeln entspricht. Für 15° gehorchen die Protonen aller Energien bis zu 2,4 MeV noch dem Gesetz der

[1]) Ausführliches siehe S. E. Frisch: „Spektroskopische Bestimmung von Kernmomenten", S. 100ff. (С. Э. Фриш: „Спектроскопическое определение ядерных моментов", Гостехиздат 1948); vgl. auch H. Kopfermann: „Kernmomente", Leipzig, Akademische Verlags-Ges. 1940.

Coulomb-Streuung, bei einem Winkel von 45° jedoch übersteigt die Zahl der Protonen mit der Energie 0,86 MeV die nach der Rutherfordschen Formel berechnete Zahl um das Vierfache und die Protonen mit 2,392 MeV die berechnete Zahl um das 43fache.

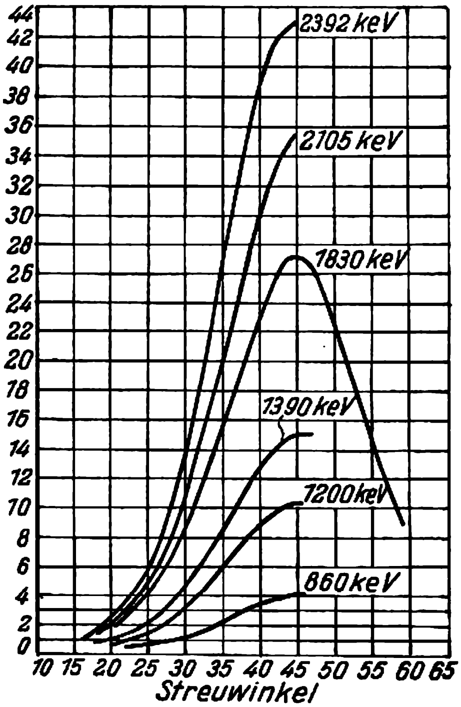


Abb. 304

Aus der theoretischen Analyse dieser Ergebnisse muß man schließen, daß sich bei hinreichend enger Annäherung zweier Protonen der Coulombschen Abstoßung eine Anziehungskraft überlagert, die in Entfernungen der Größenordnung 10^{-13} cm die Coulombsche Abstoßung bedeutend übersteigt. Wegen der schnellen Abnahme dieser Kraft mit der Entfernung kann man von ihrem Wirkungsradius sprechen, d. h., außerhalb dieses Radius ist die Kraft gleich Null.

Die allgemeine Form der Potentialkurve des Kerns ist in Abb. 305 dargestellt. Bei großen r-Werten sind die Kernkräfte gleich Null, und es besteht nur eine Coulombsche Abstoßungskraft; die Potentialkurve hat die Form einer Hyperbel, die über der Abszissenachse liegt. Andererseits wachsen in sehr kleinen Entfernungen die Kernkräfte so schnell an, daß die Coulomb-Kräfte im Vergleich zu ihnen nicht ins Gewicht fallen; das Potential ändert sein Vorzeichen, und die Kurve fällt schnell ab. Sie bildet dabei einen Potentialtopf, dessen unterer Teil im Gebiet negativer Potentialwerte liegt.

Wegen der außerordentlich starken Abhängigkeit der Kernkräfte von der Entfernung fällt die Kurve so steil ab, daß man die Wände des Potentialtopfes als vertikal ansehen kann. Aus diesem Grunde ist das Wirkungsgebiet der Kernkräfte scharf begrenzt, so daß

man von einem gewissen „Radius“ des Kerns sprechen kann. Dabei muß man sich jedoch vor Augen halten, daß man unter dem „Kernradius“ immer nur den Radius des Wirkungsbereichs der Kernkräfte und keinen geometrischen Radius verstehen darf.

Der Übergang vom Wirkungsbereich der Coulomb-Kräfte zu dem der Kernkräfte ist durch das Maximum der Potentialkurve, durch den Potentialwall gekennzeichnet. Die Höhe dieses Walls hängt sowohl von der Kernladung $+Ze$ als auch von der Ladung ze des sich im Kernfeld bewegenden Teilchens ab. Die dem Wall entsprechende potentielle Energie kann wie die Coulomb-Energie der Wechselwirkung beider Ladungen für eine Entfernung, die dem „Kernradius“ gleich ist, berechnet werden:

$$B = \frac{zZe^2}{R}. \qquad (242{,}1)$$

Der Wall des Urans für α-Teilchen ergibt sich nach dieser Formel zu

$$B = \frac{2 \cdot 92 \cdot 23 \cdot 10^{-20}}{9 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 29{,}5\,\mathrm{MeV}$$

(in MeV, bei $R = 9 \cdot 10^{-13}$ cm). Wie man sieht, ist der Wall des Urans für Protonen nur halb so hoch.

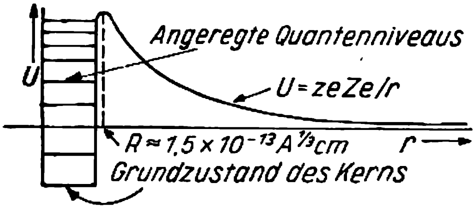


Abb. 305. Potentialkurve des Kerns

Es gibt einige Methoden zur Bestimmung der Kerngröße. Eine von ihnen beruht darauf, daß nach der Quantentheorie des α-Zerfalls (§ 284) die Zerfallzeit α-radioaktiver Kerne sehr stark von der Kerngröße abhängt. Rechnungen, die für schwere Kerne der Uran — Radium- und Thoriumreihe durchgeführt wurden, gaben für all diese radioaktiven Substanzen wenig verschiedene Werte von R, die zwischen $8{,}4 \cdot 10^{-13}$ und $9{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm liegen. Wenn man als mittlere Massenzahl dieser Kerne 222 und als mittleren Radius $\frac{1}{2}(8{,}4 + 9{,}8) \cdot 10^{-13} = 9{,}1 \cdot 10^{-13}$ cm annimmt, kann man R durch die Formel

$$R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{cm} \qquad (242{,}2)$$

darstellen. Für $A = 222$ ist tatsächlich

$$R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{222} = 1{,}5 \cdot 6{,}05 \cdot 10^{-13} = 9{,}07 \cdot 10^{-13}$$

in guter Übereinstimmung mit dem Mittelwert $R = 9{,}1 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Formel (242,2) ist näherungsweise auch für Kerne mittlerer und kleiner Masse richtig.

Den Ausdruck für die Höhe des Potentialwalls (242,1) kann man durch die Formel (242,2) vereinfachen:

$$B = \frac{zZe^2}{1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}} = \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2 zZ}{1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}} \text{erg} = 0{,}96\, zZA^{-\frac{1}{3}} \text{MeV}. \qquad (242{,}3)$$

Für Kerne mittlerer und kleiner Masse, für die man $A = 2Z$ setzen kann, erhalten wir

$$B = 0{,}76\, zZ^{\frac{2}{3}} \text{MeV}. \qquad (242{,}4)$$

Die Brauchbarkeit der einfachen Formel $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ für die Berechnung des Kernradius zeigt, daß das Kernvolumen $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ der Massenzahl A proportional ist, d. h., daß das Volumen, das auf ein Nukleon kommt, konstant ist. Dies ist eine Folge der besonderen Eigenschaften der Kernkräfte, ihres kleinen Wirkungsbereichs und ihrer Fähigkeit zur „Absättigung".

Die Konstanz des Volumens, das auf ein Nukleon entfällt, kann man auch so verstehen, daß die Kernsubstanz auf das ganze Volumen mit konstanter Dichte verteilt ist, so wie es bei einem Flüssigkeitstropfen der Fall ist. Die Dichte der „Kernflüssigkeit" hat hier einen kolossalen Wert. Wenn wir die Masse eines Nukleons gleich der Protonenmasse setzen, d. h. $1{,}7 \cdot 20^{-24}$ g, finden wir

$$1{,}7 \cdot 10^{-24} = \frac{4}{3}\pi (1{,}5 \cdot 10^{-13})^3 \varrho,$$

und daraus

$$\varrho = 6 \cdot 10^{14} \text{g/cm}^3.$$

Den Kernradius kann man auch abschätzen, indem man annimmt, daß auf die Kernlänge wenigstens eine De-Broglie-Welle kommen muß, die der Energie eines Kernteilchens entspricht. Als genaueres Maß für r_0 muß $\frac{\lambda}{2\pi}$ genommen werden, da man den Kern nicht als linearen, sondern sphärischen Potentialkasten betrachten muß. Deshalb ist

$$r_0 = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h/2\pi}{\sqrt{2ME}}.$$

Wenn man als kinetische Energie eines Teilchens 8,5 MeV, also die mittlere Bindungsenergie pro Teilchen, annimmt, erhält man

$$r_0 = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} \cdot 8{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}}} = 1{,}56 \cdot 10^{-13} \text{cm}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem obigen

$$r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

überein.

§ 243. Der Aufbau des Kerns aus Protonen und Neutronen

Betrachten wir jetzt die Tatsachen und Überlegungen, nach denen der Kern nur aus Protonen und Neutronen aufgebaut ist. Bekanntlich nahm man in den ersten Entwicklungsetappen der Kernphysik, als die Neutronen überhaupt noch nicht bekannt waren, an, daß der Kern aus Protonen und Elektronen aufgebaut sei. Man glaubte, daß es im Kern mit der Massenzahl A und der Ladung Z gerade A Protonen gäbe, denen fast die gesamte Kernmasse zukommt. Da aber Z immer kleiner als A ist, schrieb man die Kompensation eines Teils der positiven Kernladung $A - Z$ Elektronen zu, die sich im Innern des Kerns befinden mußten. Als überzeugende Bestätigung dieses Bildes sah man die Existenz β-radioaktiver Kerne an, die spontan Elektronen ausschleudern.

Die erste ernste Schwierigkeit bereitete das Protonen-Elektronen-Modell des Kerns, als sich herausstellte, daß die Stickstoffkerne $_7N^{14}$ nicht der Statistik gehorchen, die auf Grund dieses Modells zu erwarten war. Wenn der Kern $_7N^{14}$ aus Protonen und Elektronen bestehen würde, so müßte er aus $14 + 7 = 21$ Teilchen aufgebaut sein, d. h., der Kern müßte der Fermi-Statistik gehorchen (§ 239). Dagegen konnte man aber auf Grund der thermodynamischen und spektroskopischen (Intensitätswechsel in Rotationsspektren) Eigenschaften mit Sicherheit behaupten, daß der Kern $_7N^{14}$ der Bose-Statistik gehorcht. Diese Schwierigkeit war so wesentlich und so prinzipiell, daß man sie die „Stickstoffkatastrophe" nannte.

Kurz nach der Entdeckung des Neutrons wies der sowjetische Physiker D. D. Iwanenko darauf hin, daß die „Stickstoffkatastrophe" vollkommen beseitigt ist, wenn man annimmt, daß der Kern nicht aus Protonen und Elektronen, sondern aus Protonen und Neutronen besteht. In diesem Fall müssen im Kern $_7N^{14}$ sieben Protonen und sieben Neutronen enthalten sein, das ergibt insgesamt 14, d. h. eine gerade Anzahl von Teilchen, und wenn man dem Neutron auch den Spin $\frac{1}{2}$ zuschreibt, ist der Gesamtspin ganzzahlig und die Bose-Statistik zuständig.

Das Protonen-Neutronen-Modell, das dann von W. Heisenberg entwickelt wurde, sagt in allen Fällen den Spin und die Kernstatistik richtig voraus, während das Protonen-Elektronen-Modell meist falsche Aussagen darüber macht. Nach dem letzteren muß der Kern Z^A aus $A + (A - Z) = 2A - Z$ Teilchen bestehen. Wenn das richtig wäre, dann müßte der Kernspin sowohl von der Massenzahl A als auch von der Kernladung Z abhängen, und die Statistik würde durch die Atomnummer Z bestimmt. Bei geradem Z ist auch $2A - Z$ gerade, der Spin ganz, und es gilt die Bose-Statistik; umgekehrt wäre es bei ungeradem Z. Man kann jedoch außer dem Stickstoff viele Beispiele angeben, wo diese Regel den experimentell bestimmten Spinwerten völlig widerspricht. So hat der Kern $_3Li^6$ den Spin 1 und der Kern $_4Be^9$ den Spin $\frac{3}{2}$, im ersten Fall müßte der Spin nach dem Protonen-Elektronen-Modell halbzahlig und im zweiten Fall ganzzahlig sein. Die Kerne $_{48}Cd^{111}$ und $_{48}Cd^{113}$ haben beide den Spin $\frac{1}{2}$, während $2A - Z$ in beiden Fällen gerade ist und der Spin ganz sein müßte usw.

Wenn man die Tabelle der Kernspins betrachtet, kann man leicht eine andere Regel aufstellen, die mit dem Protonen-Neutronen-Aufbau des Kerns in Einklang steht und bisher keine Ausnahme kennt: Die Ganzzahligkeit oder Halbzahligkeit des Kernspins hängt nur von der *Massenzahl* ab, und zwar der Art, daß bei geradem A der Spin ganzzahlig und

bei ungeradem A halbzahlig ist. Außer den oben angeführten Beispielen sind eine genügende Anzahl weiterer in der Tabelle auf Seite 295 zu finden.

Auch die Größe des magnetischen Kernmoments entspricht in keiner Weise der Protonen-Elektronen-Struktur. Das magnetische Kernmoment ist, wie wir in § 240 sahen, von der Größenordnung eines Kernmagnetons, d. h. 1836,5mal kleiner als das Elektronenmagneton (BOHRsches Magneton). Deshalb wäre das magnetische Kernmoment, wenn sich Elektronen im Kern befinden würden, viel größer als das tatsächlich beobachtete. Schließlich wird die Anwesenheit von Elektronen im Kern auch durch energetische Überlegungen ausgeschlossen. Wir werden zeigen, daß bei vernünftigen Energiewerten, die man dem Kernelektron zuschreiben müßte, das letztere „zu wenig Platz" im Kern hätte.

Berechnen wir also die DE-BROGLIE-Wellenlänge des im Kern „eingeschlossenen" Elektrons. Die linearen Abmessungen des Kerns wurden in § 242 berechnet. Da das Elektron ein leichtes Teilchen ist, benimmt es sich bei einer Energie von einigen Millionen eV relativistisch, und λ muß nach der Formel

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

berechnet werden, wobei man für p die relativistische Impulsgröße und nicht einfach mv nehmen muß. Den relativistischen Impuls erhält man aus der Beziehung (Teil I, § 61)

$$E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4,$$

daher ist

$$c^2p^2 = E^2 - m_0^2c^4 = (E - m_0c^2)(E + m_0c^2) = E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2m_0c^2) \qquad (243,1)$$

(das letztere gilt wegen $E \approx m_0c^2 + E_{\text{kin}}$). Wenn $E_{\text{kin}} \gg 2m_0c^2$ ist (für das Elektron ist $m_0c^2 = 0{,}5$ MeV), gilt

$$c^2p^2 \approx E_{\text{kin}}^2 \quad \text{und} \quad p = \frac{E_{\text{kin}}}{c},$$

so daß man

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{c}{E_{\text{kin}}}$$

erhält.

Für Kerne mittlerer Masse, z. B. $A = 120$, bewährt sich die Formel $R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ gut und liefert

$$R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \cdot (120)^{\frac{1}{3}} = 7{,}5 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Da

$$\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{c}{E_{\text{kin}}} = \frac{\lambda}{2\pi} \leqslant R$$

sein muß, ist

$$E_{\text{kin}} \geqslant \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{7{,}5 \cdot 10^{-13}} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{erg} = 26{,}2\ \text{MeV}.$$

Diese Energie ist einigemal größer als die nach dem Energieerhaltungssatz (d. h. auf unbedingt zuverlässigem Wege) berechnete mittlere Energie, die auf ein Kernteilchen kommt. Außerdem ist kein Fall bekannt, wo β-Teilchen mit einer solchen Energie ausgesandt worden wären. Wenn man andererseits für E_{kin} eine bedeutend kleinere Energie

annimmt, erhält man für die DE-BROGLIE-Wellenlänge einen Wert, der viel größer als der Kernradius ist. Dies rechtfertigt die Bemerkung, daß für das Elektron „zu wenig Platz" im Kern ist.

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie man die Abwesenheit von Elektronen im Kern mit ihrer Aussendung bei β-Umwandlungen des Kerns in Einklang bringen soll. Die Antwort, die die moderne Physik der Elementarteilchen auf diese Frage gibt, ist äußerst interessant. Bei all ihrer Eigentümlichkeit wird sie durch so viele Tatsachen bestätigt, daß man sie als Charakteristikum all der Objekte ansehen kann, die wir als „Elementarteilchen" bezeichnen. Diese Antwort lautet folgendermaßen: Obgleich Proton und Neutron „Elementarteilchen" sind, d. h. nach modernen Vorstellungen nicht aus kleineren Teilchen „bestehen", können sie sich aber ineinander umwandeln; das Neutron verwandelt sich in ein Proton und sendet dabei ein negatives Elektron aus, und das Proton verwandelt sich in ein Neutron unter Aussendung eines Positrons. In beiden Fällen wird noch ein Teilchen ausgesandt, das eine kleine Masse und keine Ladung hat, das Neutrino ν. Es spielen sich also folgende Prozesse ab:

$$n \to p + e^- + \nu, \tag{243,2}$$

$$p \to n + e^+ + \nu. \tag{243,3}$$

In der Theorie des β-Zerfalls betrachtet man Protonen und Neutronen überhaupt nicht als verschiedene Elementarteilchen, beide Teilchen werden vielmehr als *Nukleonen* bezeichnet, die sich in verschiedenen Quantenzuständen mit und ohne Ladung befinden können. Das Nukleon im geladenen Zustand ist das Proton, im nicht geladenen Zustand das Neutron. Die Aussendung eines Elektrons oder Positrons (und Neutrinos) vollzieht sich bei Übergängen eines Nukleons von einem Quantenzustand in einen anderen.

Als Analogie zur β-Umwandlung kann die Aussendung von Photonen durch die Elektronenhülle des Atoms dienen. Wenn wir es mit einem angeregten Atom zu tun haben, dann *nehmen wir nicht an*, daß seine Hülle aus Elektronen und *Photonen besteht*, wir halten vielmehr nur die Elektronen als Bestandteile der Atomhülle; die Photonen entstehen im Augenblick ihrer Aussendung auf Kosten des Energieüberschusses im Feld des angeregten Atoms. Ähnlich gibt es auch im Kern keine „fertigen" Elektronen (Positronen). Sie werden im Augenblick der Umwandlung eines Neutrons (Protons) auf Kosten des Energieüberschusses im Feld der Kernkräfte „geboren".

Zwischen den beiden Umwandlungsreaktionen von Elementarteilchen (243,2) und (243,3) besteht ein wesentlicher Unterschied. Die Masse des Neutrons, 1,00893, ist *größer* als die Masse des Wasserstoffatoms, 1,008123, d. h. größer als die Summe der Protonen- und Elektronenmassen, folglich ist die Umwandlung des Neutrons in ein Proton energetisch günstig. Aus diesem Grunde kann die Umwandlung des Neutrons in ein Proton spontan erfolgen, und das ist auch tatsächlich der Fall (siehe Kapitel XXII), denn das freie Neutron ist β-radioaktiv, seine Periode beträgt etwa 20 Minuten. Das Proton ist dagegen im freien Zustand beständig, und seine Umwandlung in ein Neutron kann in angeregten Kernen bei Vorhandensein eines Energieüberschusses, der die fehlende Masse kompensiert, erfolgen.

§ 244. Die Bindungsenergie

Wir wenden uns jetzt der außerordentlich wichtigen Frage der Bindungsenergie des Kerns zu. Die Bindungsenergie eines einzelnen Elementarteilchens im Kern ist gleich der Arbeit, die man aufwenden muß, um dieses Teilchen aus dem Kern zu entfernen, ohne ihm dabei

eine kinetische Energie mitzuteilen, d. h. gleich der Arbeit, die gerade zur Befreiung des Teilchens von seiner Bindung im Kern ausreicht. Die gesamte Bindungsenergie des Kerns ist dann gleich der Arbeit, die nötig ist, um den Kern in die Elementarteilchen zu zerlegen, aus denen er besteht.

Zur Bestimmung der Bindungsenergie braucht man keine eingehenden Kenntnisse über die Eigenschaften der Kernkräfte. Der Energiesatz eröffnet eine einfache Möglichkeit dazu. Wenn die gesamte Bindungsenergie des Kerns gleich Q ist, d. h., wenn man Q Arbeitseinheiten aufwenden muß, um den Kern in die ihn bildenden Protonen und Neutronen zu zerlegen, dann müssen nach dem Energiesatz selbstverständlich die gleichen Q Einheiten bei der Vereinigung dieser Protonen und Neutronen zum Kern frei werden, unabhängig davon, auf welche Art diese Vereinigung auch immer erfolgen möge. Schon ein sehr flüchtiger Überblick über die Eigenschaften der Atome überzeugt uns davon, daß die Bindungsenergie des Kerns sehr groß ist. Wir erinnern an die ungewöhnliche Beständigkeit der Kerne, durch welche die Atome ihre Individualität selbst bei Temperaturen bewahren, wie sie in den Sternatmosphären herrschen, wo das Spektroskop dieselben Elemente wie auf der Erde nachweist. Bei der Bildung von Atomkernen müssen also riesige Energiemengen frei werden. Andererseits lehrt die Relativitätstheorie, daß zwischen Energie und Masse die Beziehung (siehe Teil I, S. 169)

$$E = mc^2$$

besteht, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Wenn die Energieänderung $\Delta E = Q$ bei der Bildung des Kerns aus einigen elementaren Einheiten sehr groß ist, muß also die Masse, die dieser freigewordenen Energie entspricht,

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

eine merkliche Größe haben, obwohl c^2 sehr groß ist (Größenordnung 10^{21}).

Nehmen wir an, daß Z Protonen und $A - Z$ Neutronen, d. h. insgesamt A Nukleonen einen Kern mit der Masse m bilden. Wir bezeichnen die Massen des Protons und Neutrons mit m_p bzw. m_n und schreiben die Summe ihrer Massen als

$$Zm_p + (A - Z)\, m_n\,. \tag{244,1}$$

Da bei der Kernbildung die Energie in Form von Wärme frei wird, ist die Masse m des entstandenen beständigen Kerns nicht gleich der Summe (244,1), sondern um den Betrag Δm kleiner, d. h.

$$Zm_p + (A - Z)\, m_n = m + \Delta m\,. \tag{244,2}$$

Die Größe Δm ist daher gerade ein Maß der Bindungsenergie oder, was dasselbe ist, ein Maß für die Stabilität des Kerns. Man sieht, daß

$$E = c^2 \Delta m = c^2 \left\{ [Zm_p + (A - Z)\, m_n] - m \right\}$$

ist.

Erläutern wir diese Ausdrücke durch die Berechnung der Bindungsenergie des Berylliumkerns Be^9. Wir benutzen dazu die Tabelle im Anhang XIII am Ende des Buches, in der die genauen Massenwerte angegeben sind.

Die Kernladung des Be^9 ist gleich 4 ($Z = 4$), folglich besteht dieser Kern aus vier Protonen und fünf Neutronen. Nach der Tabelle ist die Massensumme von vier Wasserstoffatomen und fünf Neutronen gleich

$$4 \cdot 1{,}00812 + 5 \cdot 1{,}00893 = 9{,}07713.$$

Diese Summe enthält die Masse des Kerns, der aus vier Protonen und fünf Neutronen besteht, und die Masse von vier Elektronen. Die Masse des Berylliumatoms, das aus dem Kern und ebenfalls vier Elektronen besteht, ist nach der physikalischen Massenskala ($O^{16} = 16$) gleich 9,01503. Folglich ist die Massendifferenz gleich

$$9{,}07713 - 9{,}01503 = 0{,}06210.$$

Obwohl wir bei der Rechnung die *Atom*massen (des Wasserstoffs und Berylliums) und nicht die Kernmassen verwendet haben, ist die berechnete Differenz 0,06210 gerade dem Massenverlust bei der Bildung des Beryllium*kerns* gleich, da die vier Elektronenmassen sowohl in die mit vier multiplizierte Masse des Wasserstoffatoms als auch in die Masse des Berylliumatoms eingehen und sich bei der Subtraktion herausheben.

Um von diesem Energieverlust in Masseneinheiten zu dem entsprechenden Ausdruck in erg überzugehen, darf man nicht vergessen, daß die Atommassen in formellen Einheiten angegeben werden. Es gibt zwei Massenskalen. In der chemischen setzt man die Atommasse des Sauerstoffs genau gleich 16, wobei in Wirklichkeit 16 der Mittelwert der Massen aller stabilen Sauerstoffisotope ist. In der physikalischen Massenskala setzt man die Masse des Hauptisotops O^{16} des Sauerstoffs gleich 16 (mit so vielen Nullen, wie der Meßgenauigkeit der übrigen Atommassen entspricht). *Alle Berechnungen in der Kernphysik müssen auf die physikalische Massenskala bezogen werden.*

Das Verhältnis der physikalischen zur chemischen Einheit beträgt 1,00027, und der Unterschied zwischen den Massen gleicher Atome in den beiden Systemen ist beträchtlich. Die Atommasse des Heliums z. B. ist in der chemischen Skala gleich 4,00216 und in der physikalischen 4,00390.

Wenn man mit M_0 die Masse des Sauerstoffatoms in Gramm bezeichnet ($M_0 = 2{,}64 \cdot 10^{-22}\,g$), so erhält man für die Bildungsenergie des Be^9

$$Q = 0{,}0621\, c^2 \frac{M_0}{16} = 0{,}0621 \cdot \frac{9 \cdot 10^{20} \cdot 2{,}64 \cdot 10^{-22}}{16} = 9{,}24 \cdot 10^{-5}\,\text{erg}.$$

Dieses Ergebnis wird anschaulicher, wenn man die erg in eV umrechnet. Da $1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg ist, erhalten wir

$$\frac{9{,}24 \cdot 10^{-5}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 5{,}77 \cdot 10^7\,\text{eV}.$$

Die Energie der Bildung des Berylliumkerns beträgt also 57,7 MeV, d. h., sie ist sehr groß.

Für das Folgende ist die Bemerkung nützlich, daß die Abnahme der Atommasse um eine Einheit in Energie-Einheiten gleich (für c^2 wird der genaue Wert $8{,}99 \cdot 10^{20}$ genommen):

$$1\ \text{Masseneinheit} = 8{,}99 \cdot 10^{20} \cdot \frac{M_0}{16} = \frac{8{,}99 \cdot 10^{20} \cdot 2{,}64 \cdot 10^{-22}}{16} =$$

$$= 1{,}49 \cdot 10^{-3}\,\text{erg} = 931\,\text{MeV}, \qquad (244{,}3)$$

ist; mit anderen Worten, bei einer Massenabnahme von einer Einheit in der dritten Dezimale wird eine Energie von rund 1 MeV frei.

Zur Vereinfachung der Rechnungen, mit denen wir es gewöhnlich in der Kernphysik zu tun haben, benutzen wir Tabelle XLII, in der die Koeffizienten für den Übergang von einer Energieeinheit (z. B. von MeV) zu einer anderen (z. B. zu Masseneinheiten, erg, g usw.) angegeben sind.

Wir unterstreichen nochmals, daß zur Berechnung der Bindungsenergie nicht erst die Kernmasse aufgefunden werden muß, d. h., man braucht nicht erst von der Atommasse die Summe der Elektronenmassen abzuziehen und die erhaltene Differenz mit der Summe der entsprechenden Protonen- und Neutronenmassen zu vergleichen. Für all diese Rechnungen kann man einfach die Atommassen (in der *physikalischen Skala*) selbst benutzen und sie mit der Summe der Wasserstoffmassen (entsprechend der Protonenzahl) und der Neutronenmassen vergleichen. Bei der Subtraktion der Atommasse von dieser Summe fällt die Masse der Elektronen automatisch heraus, wie es beim ausführlich betrachteten Fall des Berylliumkerns war.

Tabelle XLII

	MeV	ME[1])	erg	*g*	kg · m	cal
1 MeV =	1	$1{,}07390 \cdot 10^{-3}$	$1{,}602 \cdot 10^{-6}$	$1{,}782 \cdot 10^{-27}$	$1{,}634 \cdot 10^{-14}$	$3{,}827 \cdot 10^{-14}$
1 ME =	$9{,}3172 \cdot 10^{2}$	1	$1{,}492 \cdot 10^{-3}$	$1{,}660 \cdot 10^{-24}$	$1{,}521 \cdot 10^{-11}$	$3{,}565 \cdot 10^{-11}$
1 erg = 10^{-7} Ws =	$6{,}24 \cdot 10^{5}$	$6{,}70 \cdot 10^{2}$	1	$1{,}11276 \cdot 10^{-21}$	$1{,}01972 \cdot 10^{-8}$	$2{,}3892 \cdot 10^{-8}$
1 g =	$5{,}61 \cdot 10^{26}$	$6{,}02 \cdot 10^{23}$	$8{,}9864 \cdot 10^{20}$	1	$0{,}91651 \cdot 10^{13}$	$2{,}1474 \cdot 10^{13}$
1 kg · m =	$6{,}12 \cdot 10^{13}$	$6{,}57 \cdot 10^{10}$	$0{,}98067 \cdot 10^{8}$	$1{,}09112 \cdot 10^{-13}$	1	2,3430
1 cal =	$2{,}612 \cdot 10^{13}$	$2{,}804 \cdot 10^{10}$	$4{,}1855 \cdot 10^{7}$	$4{,}6576 \cdot 10^{-14}$	0,42680	1

[1]) ME ist die Masseneinheit der Kernphysik ($^1/_{16}$ der Masse von O^{16}).

Wenn man die genauen Massen kennt, kann man die Stabilität der Kerne beurteilen. Ein Kern ist stabil, wenn seine Masse kleiner als die Massensumme der Kerne ist, in die er zerfallen kann. So ist z. B. der Kern $_3Li^7$ in bezug auf den Zerfall in $_2He^4$ und $_1H^3$ stabil. In der Tabelle XIII im Anhang finden wir

$$\text{Masse Li}^7 = 7{,}01822\,,$$

$$\text{Massensumme He}^4 + H^3 = 4{,}0039 + 3{,}01702 = 7{,}02092\,,$$

d. h.

$$Li^7 < He^4 + H^3\,.$$

He^5 ist instabil in bezug auf den Zerfall in He^4 und ein Neutron. Wir schreiben die Massen auf

$$\text{Masse He}^5 = 5{,}0137\,,$$

$$\text{Massensumme He}^4 + n^1 = 4{,}0039 + 1{,}0089 = 5{,}0128\,.$$

Die Masse des He^5 ist also um $5{,}0137 - 5{,}0128 = 0{,}0009$ größer als die Massensumme $He^4 + n^1$, so daß der Kern He^5 instabil und seine Zerfallsenergie etwas kleiner als ein MeV ist. Genauso ist die Masse des Be^8 um

$$8{,}00785 - 8{,}00780 = 0{,}00005$$

größer als die Masse von $2 \cdot He^4$, d. h., der Kern Be^8 ist instabil in bezug auf den Zerfall in zwei α-Teilchen.

Für praktische Zwecke benutzt man oft die sogenannten Massendefekte und Packungsanteile, die auf folgende Weise berechnet werden. Es wird der Begriff Isotopenmasse M eingeführt, unter dem die Atommasse des Isotops in der physikalischen Massenskala verstanden wird.

Die negativ genommene Differenz zwischen der Massenzahl A (d. h. der auf die nächste ganze Zahl aufgerundeten Isotopenmasse) und M heißt Massendefekt und wird mit Δ bezeichnet:

$$-\Delta = A - M\,. \qquad (244{,}4)$$

Der Massendefekt des Wasserstoffs ist also gleich $+ 0{,}008123$, der Massendefekt des Neutrons $+ 0{,}00893$, der Massendefekt des Cl^{35} beträgt aber $- 0{,}02133$. Der Massendefekt des Sauerstoffs O^{16} ist definitionsgemäß gleich Null. Für die Berechnung von Bindungsenergien ist es jedoch bequemer, den sogenannten Packungsanteil P zu benutzen. Dieser wird als der auf ein Kernteilchen bezogener Massendefekt definiert:

$$P = \frac{\Delta}{A} = \frac{M - A}{A}\,. \qquad (244{,}5)$$

Der wesentliche Vorzug dieser Größe vor dem Massendefekt besteht darin, daß der Fehler von P für die verschiedensten Massen annähernd gleich oder auf alle Fälle von der gleichen Größenordnung ist. Gewöhnlich wird der Packungsanteil in Zehntausendsteln angegeben. Wenn also ein Packungsanteil zu $+ 5{,}4$ angegeben wird, dann bedeutet das $P = + 5{,}4 \cdot 10^{-4}$; für H^1 ist der Packungsanteil nach Tabelle XLIII gleich 81,23, das bedeutet $P = 81{,}23 \cdot 10^{-4}$ usw.

Die Kurve der Abb. 306 stellt die Abhängigkeit des Packungsanteils von der Massenzahl dar. Diese Kurve ist durch folgende Besonderheiten charakterisiert. P hat den größten Wert für das Neutron (+ 0,00893) und das Proton (+ 0,008123). P nimmt zuerst mit steigendem A schnell ab, geht beim Sauerstoff durch Null, wird dann negativ und bleibt in einem großen Intervall von A fast konstant: ungefähr von Si^{28} bis Ba^{138} unterscheiden sich die Packungsanteile nur wenig voneinander, etwa um — 0,001.

Tabelle XLIII

Isotop	Packungs-anteil	Isotopengewicht	Isotop	Packungs-anteil	Isotopengewicht
H^1	+ 81,23	1,008123 ± 0,00004	Cl^{35}	— 5,71	34,9800 ± 0,0008
D^2	+ 73,55	2,01471 ± 0,00007	Cl^{37}	— 6,10	36,9775 ± 0,0008
He^4	+ 9,77	4,00391 ± 0,00016	Ar^{36}	— 6,10	35,9780 ± 0,0010
B^{10}	+ 16,1	10,0161 ± 0,0003	Ar^{40}	— 6,15	39,9754 ± 0,0014
C^{12}	+ 2,96	12,00355 ± 0,00015	Ti^{48}	— 7,24	47,9652 ± 0,0008
N^{14}	+ 5,28	14,0073 ± 0,0004	Cr^{52}	— 8,18	51,9575 ± 0,0008
F^{19}	+ 2,36	19,0045 ± 0,0005	Kr^{78}	— 7,30	77,9430 ± 0,0020
Ne^{20}	— 0,70	19,9986 ± 0,0006	Kr^{82}	— 7,70	81,9369 ± 0,0015
Si^{28}	— 4,90	27,9863 ± 0,0007	Kr^{84}	— 7,60	83,9362 ± 0,0015
Si^{29}	— 4,7	28,9864 ± 0,0008	Kr^{86}	— 7,40	85,9363 ± 0,0015
P^{31}	— 5,30	30,9836 ± 0,0005	Xe^{129}	— 4,46	128,9424 ± 0,0020
S^{32}	— 5,53	31,9823 ± 0,0003			

Wenn man den Packungsanteil kennt, kann man die Größe der Bindungsenergie ausrechnen. Wir betrachten einen Kern mit der Ladung Z und der Massenzahl A. Wie man sieht, ist seine Bindungsenergie (in Masseneinheiten)

$$E = Zm_H + (A - Z)\, m_n - M = Z\,(m_H - m_n) + Am_n - M$$

(m_H und M sind die Atommassen, siehe Seite 315) oder, da nach (244,5) $M = A\,(1 + P)$ gilt,

$$E = Z\,(m_H - m_n) + A\,(m_n - 1) - AP.$$

Die Bindungsenergie pro Teilchen ist deshalb gleich

$$\frac{E}{A} = \frac{Z}{A}(m_H - m_n) + (m_n - 1) - P\,;$$

wegen

$$m_H - m_n = -\,0{,}00081\,, \quad m_n - 1 = 0{,}00893$$

ist

$$\frac{E}{A} = -\,0{,}00081\,\frac{Z}{A} + 0{,}00893 - P\,.$$

Diese Formel gestattet, aus dem Packungsanteil P die mittlere Energie pro Kernteilchen in Masseneinheiten zu berechnen. Beim Übergang zu Energieeinheiten, und zwar zu MeV ist das Resultat mit 931 zu multiplizieren.

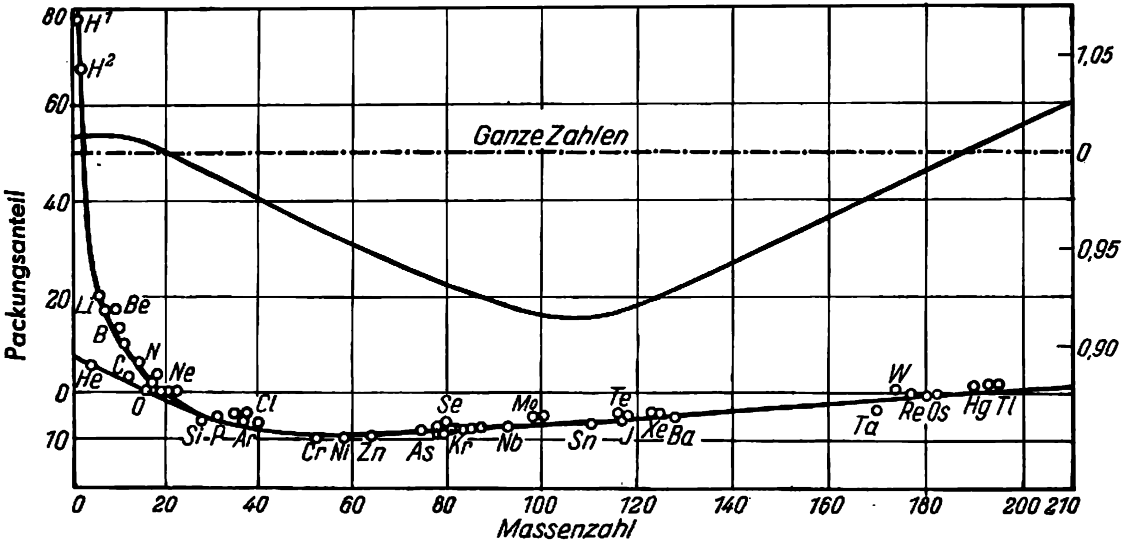


Abb. 306. Kurve der Massendefekte und der Packungsanteile (links ist längs der Ordinatenachse die Größe des Packungsanteils $P \cdot 10^4$ aufgetragen)

Tabelle XLIV

Kern	E (MeV)	$\frac{E}{A}$ (MeV)	Kern	E (MeV)	$\frac{E}{A}$ (MeV)
n^1	0	0	B^{11}	75,71	6,88
H^1	0	0	C^{12}	91,66	7,64
D (H^2)	2,18	1,09	C^{13}	96,54	7,43
T (H^3)	8,33	2,78	N^{14}	104,10	7,44
He^3	7,60	2,53	N^{15}	114,85	7,66
He^4	28,2	7,03	O^{16}	126,96	7,94
Li^6	31,81	5,30	Ne^{20}	159,85	7,99
Li^7	38,96	5,57	Ar^{40} — Sn^{120}	—	8,6
Be^9	57,80	6,42	U^{238}	1780	7,5
B^{10}	64,29	6,43			

In der Tabelle XLIV sind als Beispiel einige Werte der Größen E und $\frac{E}{A}$ aufgeführt. Wie man sieht, unterliegt die Bindungsenergie $\frac{E}{A}$ bei leichten Kernen periodischen Schwankungen, die bei $_2He^4$, $_4Be^8$ [1]), $_6C^{12}$, $_8O^{16}$ Maxima erreichen. Diese Tatsache weist auf die Bildung von stabilen Gruppierungen aus zwei Protonen und zwei Neutronen im Kern hin, die an die stabile Elektronenhülle der Edelgase erinnern. Da die Protonen und Neutronen den Spin $\frac{1}{2}$ haben, ist die Bildung solcher Hüllen mit dem Pauli-Prinzip verknüpft. Vom Ar^{40} bis zum Sn^{120} erweist sich die Bindungsenergie nahezu als konstant und etwa gleich 8,6 MeV pro Nukleon. Beim Übergang zu den schwersten Kernen schließlich nimmt $\frac{E}{A}$ allmählich ab.

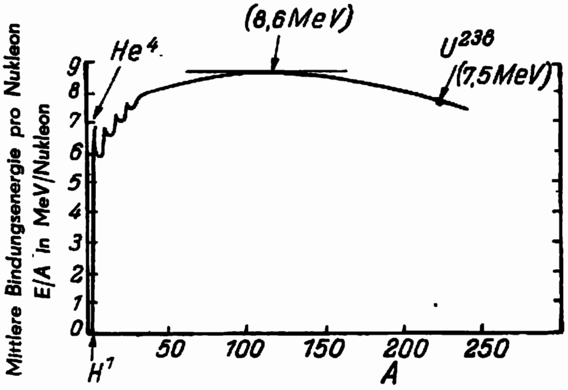


Abb. 307. Kernbindungsenergie

[1]) Die Bindungsenergie des Kerns Be^8 ist gleich 7,02 MeV. Der Kern ist jedoch instabil und zerfällt in zwei α-Teilchen.

In Abb. 307 ist eine Kurve dargestellt, die den Verlauf der Bindungsenergie in Abhängigkeit von der Massenzahl A wiedergibt. Man beachte, daß die Bindungsenergie $\frac{E}{A}$ bei Kernen mit mittlerem Wert von A um 1 MeV größer als beim schweren Kern U^{238} ist.

§ 245. Eine halbempirische Formel für die Bindungsenergie

Es gibt eine sehr nützliche Formel, die mit ziemlich großer Genauigkeit die Bindungsenergie eines beliebigen Kerns vorauszuberechnen gestattet. Diese Formel beruht z. T. auf Überlegungen über die Eigenschaften der Kernkräfte, die sich aus dem Experiment ergeben, z. T. enthält sie einige Konstanten, deren numerische Werte empirisch gefunden wurden. Sie wird deshalb als halbempirische Formel bezeichnet. Diese halbempirische Formel schreibt man meist in einer Form, die die genaue *Atommasse* aus der gegebenen Massenzahl A und Kernladung Z zu berechnen erlaubt. Die ersten zwei Glieder dieser Formel sind deshalb die Summe der Massen von Z Wasserstoffatomen und $A-Z$ Neutronen.

$$M_0 = 1{,}00812\, Z + 1{,}00893\,(A - Z)\,. \tag{245,1}$$

Wir wissen jedoch, daß die Atommasse immer kleiner als M_0 ist, da bei der Kernbildung eine Energie frei wird, die gleich der Bindungsenergie ist. Diese müssen wir jetzt aufsuchen, indem wir die Wechselwirkungskräfte der Kernteilchen berücksichtigen. Diese Kräfte sind keine elektrischen oder Gravitationskräfte, sondern spezifische Kernkräfte. Aus der Tatsache (§ 244), daß die Bindungsenergie pro Kernteilchen ungefähr konstant ist, schließen wir, daß die Bindungsenergie in erster Näherung der Teilchenzahl im Kern, d. h. der Massenzahl A, proportional ist. Folglich hat das erste Korrekturglied zu (245,1) die Form $a_1 A$, wobei der Koeffizient a_1 noch empirisch bestimmt werden muß. Diesem Korrekturglied muß man das Minuszeichen zuordnen, da die Anziehungskräfte offensichtlich die Kernenergie vermindern:

$$\Delta_1 M = -\,a_1 A\,. \tag{245,2}$$

Es zeigt sich jedoch, daß diese Korrektur zu groß ist, und einige zusätzliche Korrekturen eingeführt werden müssen, die (245,2) verkleinern. Die erste hängt damit zusammen. daß die Kernkräfte nur auf sehr kleinen Entfernungen wirken, sie sind Nahwirkungskräfte, Diese Eigenschaft der Kernkräfte wurde hauptsächlich bereits in der Formel (245,2) berücksichtigt, denn wenn jedes Kernteilchen mit jedem anderen in Wechselwirkung stehen würde, wäre die Wechselwirkungsenergie der Zahl der Kombinationen von A Teilchen zur zweiten Klasse, d. h. $\frac{1}{2}A\,(A-1)$ proportional. Sie wäre folglich eine quadratische und keine lineare Funktion der Teilchenzahl. Der Nahwirkungscharakter der Kernkräfte führt dazu, daß jedes Kernteilchen nur mit seinen nächsten Nachbarn, die im Abstand des „Wirkungsradius" der Kernkräfte r_0 von ihm liegen, in Wechselwirkung tritt. Ähnliche Bedingungen gelten bekanntlich auch in einem Flüssigkeitstropfen, wo jedes Molekül nur mit solchen Molekülen in Wechselwirkung tritt, die innerhalb der Wirkungssphäre seiner Molekularkräfte liegen. Die Analogie zwischen Kern und Flüssigkeitstropfen wird noch dadurch verstärkt, daß der Kernradius ziemlich genau zu $A^{\frac{1}{3}}$ proportional ist (siehe § 242).

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}\,,$$

$$r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{cm}\,.$$

Dieses rechtfertigt die Annahme (natürlich nur näherungsweise), daß die Substanz im Kern mit gleicher Dichte verteilt ist. Man kann also den Kern als Tröpfchen einer kondensierten „Flüssigkeit" mit einer Dichte von der Größenordnung 10^{14} g/cm³ betrachten (siehe S. 300).

Wenn man den Kern als Flüssigkeitstropfen ansieht, muß man aber auch berücksichtigen, daß die Teilchen an der Oberfläche nur mit Nachbarn in Wechselwirkung stehen, die innerhalb einer Halbkugel liegen, während auf die Teilchen, die im Innern liegen, von allen Seiten andere Teilchen wirken. Man sieht also, daß die Bindungsenergie der Teilchen an der Oberfläche kleiner ist als die der Teilchen im Innern. Dadurch ist man gezwungen, die Korrektur (245,2) durch ein positives Glied zu verkleinern. Die Form dieses Gliedes finden wir durch Weiterführung der Analogie zum Flüssigkeitstropfen. Wie bei einer gewöhnlichen Flüssigkeit führt die erhöhte potentielle Energie der Teilchen an der Oberfläche (oder anders ausgedrückt, ihre kleinere Bindungsenergie) dazu, daß man zur Vergrößerung der Oberfläche eine gewisse Arbeit leisten muß. Der Tropfen der Kernflüssigkeit besitzt mit anderen Worten eine seiner Oberfläche proportionale „Oberflächenenergie" oder, anders gesagt, eine Oberflächenspannung[1]). Wenn wir eine Kugelform des Kerntropfens voraussetzen und die Oberflächenenergie pro cm² mit σ bezeichnen, erhalten wir

$$E_{\text{Obfl}} = 4\pi R^2 \sigma = 4\pi r_0^2 \sigma A^{\frac{2}{3}}. \qquad (245,3)$$

Die Abschätzung des Wertes der Oberflächenenergie σ, die man aus Kenntnis der Abtrennungsenergie eines Teilchens von der Kernoberfläche („Verdampfungswärme") durchführen kann, liefert den gewaltigen Wert von $\sigma = 10^{20}$ erg/cm², während für Wasser $\sigma = 10^2$ erg/cm² ist. Um die Korrektur (245,3) in Masseneinheiten zu erhalten, muß man den rechten Teil von (245,3) mit dem Umrechnungsfaktor $6{,}70 \cdot 10^2$ (siehe Tabelle XLII) multiplizieren. Da jedoch weder r_0 noch σ genau bekannt sind, ist es zweckmäßiger, den gesamten Koeffizienten bei $A^{\frac{2}{3}}$ durch Vergleich der Endformel mit dem genauen Massenwert zu bestimmen. Wir bezeichnen diesen Koeffizienten vorläufig mit a_2 und schreiben

$$\Delta_2 M = a_2 A^{\frac{2}{3}}. \qquad (245,4)$$

Weiterhin zeigt die Verteilungsstatistik der stabilen Kerne, daß die Kerne, bei denen die Anzahl der Protonen annähernd gleich der Anzahl der Neutronen, d. h. $Z = \frac{A}{2}$, ist, die größte Stabilität besitzen. Das erfordert die Einführung einer weiteren Korrektur mit positivem Vorzeichen, die von der Differenz $Z - \frac{A}{2}$ abhängt und bezüglich Z und $\frac{A}{2}$ symmetrisch ist, d. h. von $\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2$ abhängt. Diese Forderung erfüllt die Formel

$$\Delta_3 M = a_3 \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A}. \qquad (245,5)$$

---

[1]) Die Oberflächenenergie wird in erg/cm² ausgedrückt, aber wegen erg/cm² = dyn cm/cm² = dyn/cm wird das Auftreten der Oberflächenenergie, die die Oberfläche der Flüssigkeit zu verringern sucht, gewöhnlich der Existenz von besonderen Kräften, nämlich der Oberflächenspannung zugeschrieben.

Die Korrektur wächst bei Abweichungen des Z von $\frac{A}{2}$ nach beiden Seiten und verschwindet für $Z = \frac{A}{2}$, wie es auch gefordert wird.

Schließlich muß man die COULOMBsche Abstoßung der Protonen berücksichtigen, die die Bindungsenergie verkleinert und somit auch die Stabilität des Kerns verringert. Daher überwiegt in stabilen schweren Kernen die Neutronenzahl die Protonenzahl, und zwar um so mehr, je größer Z ist.

Bei kleiner Protonenzahl spielt die COULOMBsche Abstoßung im Vergleich zu den Kernkräften eine unbedeutende Rolle. Sie wird jedoch bei schweren Kernen wesentlich, da die COULOMB-Kräfte einen wesentlich größeren Wirkungsradius als die Kernkräfte besitzen (die COULOMB-Kräfte ändern sich umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstands, während die Kernkräfte mit der Entfernung bedeutend schneller abnehmen). Jedes Proton tritt also mit allen übrigen in Wechselwirkung. Deshalb ist die Gesamtenergie, die durch die COULOMBsche Abstoßung bei einer Anzahl von Z Protonen hervorgerufen wird, proportional $\frac{1}{2} Z(Z-1)$ oder für $Z \gg 1$ proportional Z^2. Eine einfache Rechnung[1]) zeigt, daß die Energie der elektrostatischen Abstoßung jedes Protonenpaars gleich $\frac{6}{5}\frac{e^2}{R}$ ist, wobei R den Kernradius bezeichnet. Folglich ist die potentielle Energie der COULOMB-Abstoßung in einem Kern aus Z Protonen gleich

$$E_{\text{Coul}} = \frac{6}{5}\frac{e^2}{R} \cdot \frac{1}{2} Z(Z-1) \approx \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R}. \tag{245,6}$$

Wenn wir in (245,6) $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0} Z^2 A^{-\frac{1}{3}}. \tag{245,7}$$

Wir berechnen den konstanten Faktor $\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}$. Dabei bemerken wir, daß (siehe Bd. I, S. 29) $\frac{e^2}{mc^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm ist (m ist die Elektronenmasse und $mc^2 = 0{,}51$ MeV). Wir geben deshalb dem Ausdruck $\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}$ die folgende Form:

$$\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0} = 0{,}6\, mc^2 \frac{\frac{e^2}{mc^2}}{r_0} = 0{,}6 \cdot 0{,}51 \cdot \frac{2{,}8 \cdot 10^{-13}}{1{,}5 \cdot 10^{-13}} = 0{,}58 \text{ MeV},$$

oder in Masseneinheiten

$$0{,}58 \cdot 1{,}07 \cdot 10^{-3} = 6{,}21 \cdot 10^{-4}.$$

Die genauere Rechnung liefert $6{,}27 \cdot 10^{-4}$.

Die Korrektur, die der COULOMB-Abstoßung Rechnung trägt, ist also gleich

$$\Delta_4 M = 0{,}000627 Z^2 A^{-\frac{1}{3}}. \tag{245,8}$$

---

[1]) Siehe Anhang VIII am Ende des Buches.

Wir addieren (245,1), (245,2), (245,4), (245,5) und (245,8) und erhalten als Ausdruck für die Masse des Atoms Z^A

$$M = 1{,}00893\,A - 0{,}00081\,Z - a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + 0{,}000627 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}. \qquad (245{,}9)$$

Den Koeffizienten a_3 kann man folgendermaßen berechnen. Wir suchen das Z, das der größten Stabilität des Atoms bei beliebigem A entspricht. Wir bilden $\frac{\partial M}{\partial Z} = 0$ und erhalten

$$0 = \frac{\partial M}{\partial Z} = -0{,}00081 - 2a_3 \frac{\frac{A}{2} - Z}{A} + 0{,}000627 \cdot 2 \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}},$$

und daraus

$$Z = \frac{A\,(0{,}00081 + a_3)}{2a_3 + 0{,}001254\,A^{\frac{2}{3}}}. \qquad (245{,}10)$$

Die Einsetzung von Z und A für die stabilsten Atome liefert $a_3 = 0{,}083$. Diesen Wert setzen wir wieder in (245,10) ein und finden

$$Z = \frac{A}{1{,}981 + 0{,}015\,A^{\frac{2}{3}}}. \qquad (245{,}11)$$

Wir sehen, daß für kleine A wirklich $\frac{Z}{A} \approx \frac{1}{2}$ gilt; $\frac{Z}{A}$ nimmt mit wachsendem A wegen der Vergrößerung des Gliedes $0{,}015\,A^{\frac{2}{3}}$ im Nenner, das die Coulombsche Abstoßung berücksichtigt, ab.

Wenn man jetzt (245,11) in (245,9) einsetzt, erhält man den Ausdruck für die genaue Masse M als Funktion der Massenzahl A allein mit zwei unbekannten Koeffizienten a_1 und a_2. Wenn man genau bekannte Massen stabiler Isotope einsetzt, kann man a_1 und a_2 berechnen. Die besten Ergebnisse liefern folgende Werte:

$$a_1 = 0{,}01504, \qquad a_2 = 0{,}014.$$

(245,9) nimmt also die Form

$$M = 0{,}99389\,A - 0{,}00081Z + 0{,}014A^{\frac{2}{3}} + 0{,}083 \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + 0{,}000627 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \qquad (245{,}12)$$

an.

In Formel (245,9) ist jedoch noch eine kleine Korrektur nicht berücksichtigt. Die Verteilungsstatistik der stabilen Isotope zeigt, daß am häufigsten solche Isotope vorkommen, deren Kerne eine gerade Anzahl von Protonen und eine gerade Anzahl von Neutronen enthalten (gerade-gerade Kerne). Bedeutend seltener sind die Isotope mit gerade-ungeraden oder ungerade-geraden Kernen, und schließlich gibt es fast keine ungerade-ungeraden Kerne (mit vier Ausnahmen unter den leichtesten Kernen, und zwar ${}_1D^2$, ${}_3\mathrm{Li}^6$, ${}_5\mathrm{B}^{10}$ und ${}_7\mathrm{N}^{14}$). Die stabilen Isotope verteilen sich tatsächlich folgendermaßen:

gerade-gerade (Z gerade, N gerade)	162
gerade-ungerade (Z gerade, N ungerade)	56
ungerade-gerade (Z ungerade, N gerade)	52
ungerade-ungerade (Z ungerade, N ungerade)	4

Die theoretische Erklärung dieses Übergewichts der Isotope mit gerade-geraden Kernen besteht darin, daß bei der Auffüllung der tiefen Energieniveaus der Kerne die Neutronen und Protonen die Tendenz haben, diese Niveaus paarweise aufzufüllen und dadurch die stabilste Gruppierung zu bilden. Diese Erscheinung ist dem Verhalten der Elektronen in der Atomhülle ähnlich. Zweifellos besteht in jedem Fall ein direkter Zusammenhang zwischen der Isotopenhäufigkeit und der Stabilität der entsprechenden Kerne.

Die Berücksichtigung dieser Tatsache erfolgt in der halbempirischen Formel durch die Einführung einer weiteren Korrektur. Sie nimmt verschiedene Werte an, je nachdem, ob die Zahl der Protonen und Neutronen gerade oder ungerade ist. Die Endformel für die Masse sieht nun folgendermaßen aus:

$$M(A, Z) = 0{,}99389\,A - 0{,}00081\,Z + 0{,}014\,A^{\frac{2}{3}} + 0{,}083\,\frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + 0{,}000627\,\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta(A, Z), \qquad (245{,}13)$$

wo die Korrektur $\delta(A, Z)$, die rein empirisch gefunden wurde, folgende Gestalt hat:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } A, \\ -0{,}036/A^{\frac{3}{4}} & \text{für gerade-gerade Kerne,} \\ +0{,}036/A^{\frac{3}{4}} & \text{für ungerade-ungerade Kerne.} \end{cases}$$

Die Formel (245,13) liefert ausgezeichnete Resultate, wie man aus folgender Tabelle sieht:

Tabelle XLV

Kern	$_{42}Mo^{98}$	$_{24}Cr^{52}$
M experimentell ermittelt	97,943	51,956
M nach Formel (245,13) berechnet	97,947	51,959

Wir führen ein Beispiel für die Anwendung der Formel (245,13) an.

Es soll die Bindungsenergie eines Neutrons im Kern U^{235} berechnet werden[1].

$$\begin{array}{rl} & M(U^{235}) = 235{,}11240 \text{ [nach Formel (245,13)]} \\ + & \\ & M(n) \;\;\;\;= \underline{\;\;1{,}00893\;\;} \\ - & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;236{,}12133 \\ & M(U^{236}) = 236{,}11401 \text{ [nach Formel (245,13)]} \end{array}$$

Differenz ΔM = Bindungsenergie = 0,00732 ME = 6,81 MeV.

[1]) Nach dem Buch „The science and engineering of nuclear power“, unter Redaktion von C. Goodman, Bd. I, S. 69, 1947.

Eine analoge Rechnung liefert für die Bindungsenergie des Neutrons in den Kernen U^{236}, U^{237}, U^{238} entsprechend, 5,51, 6,56 und 5,31 MeV. Diese Zahlen werden uns bei der Behandlung der Spaltungsprozesse schwerer Kerne zustatten kommen.

Übungen:

1. Es ist zu zeigen, daß der Kern des Samariumisotops $_{62}Sm^{152}$ in bezug auf den α-Zerfall instabil ist; die Energie der α-Teilchen ist zu berechnen. [*Hinweis*: Der α-Zerfall besteht in der Aussendung von α-Teilchen. Wenn der im Aufgabentext angeführte Prozeß möglich ist, dann muß er nach dem Schema

$$_{62}Sm^{152} \to {}_{60}Nd^{148} + {}_2He^4$$

verlaufen. Zur Beantwortung der Frage muß man die genaue Masse der linken Seite mit der genauen Massensumme der rechten vergleichen, indem man die Massen $_{62}Sm^{152}$ und $_{60}Nd^{148}$ nach der Formel (245,13) berechnet.]

2. Unter Anwendung der halbempirischen Formel (245,13) ist die Energie eines α-Teilchens des U^{238} zu berechnen.

§ 246. Die Elementarteilchen

Wir möchten jetzt eine kurze Übersicht über die Eigenschaften der Elementarteilchen geben.

1. *Photonen.* Mit den Eigenschaften der Photonen haben wir uns bereits im Kapitel IX des ersten Bandes vertraut gemacht. Sie sind spezifische „Lichtteilchen“. Das Besondere an den Photonen besteht darin, daß ihre Ruhemasse gleich Null ist; ihre elektrische Ladung ist auch gleich Null. Im Unterschied zum Elektron ist der Spin des Photons ganz und gleich 1; deshalb gehorchen die Photonen nicht dem PAULI-Prinzip.

2. *Elektronen und Positronen.* Die Eigenschaften der Elektronen sind uns ebenfalls gut bekannt. Es sind leichte Elementarteilchen, die eine negative Ladung tragen. Ihre Ruhemasse ist in absoluten Einheiten gleich

$$m_e = 9{,}106 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g}\,.$$

Der Elektronenspin ist gleich $\frac{1}{2}$, und das magnetische Moment ist gleich einem BOHRschen Magneton.

Neben den negativen Elektronen existieren auch positive Elektronen, die Positronen, die die gleiche Masse und den gleichen Spin wie die Elektronen besitzen; sie tragen jedoch eine elektrische Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Das magnetische Moment der Positronen ist deshalb auch gleich einem BOHRschen Magneton.

Der charakteristische Unterschied der Positronen gegenüber den Elektronen ist ihre Kurzlebigkeit. Elektronen und Positronen können auf Kosten von Photonen mit ausreichender Energie gleichzeitig entstehen oder „geboren werden“; desgleichen können sie „verschwinden“, indem sie sich in ein oder zwei Photonen entsprechender Energie umwandeln. Wir werden ferner sehen, daß Elektronen und Positronen auch bei der Umwandlung schwerer Elementarteilchen, der Protonen und Neutronen, entstehen können.

3. *Neutrino.* Unter der Bezeichnung Neutrino versteht man leichte Elementarteilchen, die keine elektrische Ladung besitzen. Ihre genaue Ruhemasse ist unbekannt; sie ist

aber auf jeden Fall bedeutend kleiner als die Elektronenmasse. Der Spin des Neutrinos ist gleich $\frac{1}{2}$; dadurch unterscheidet sich das Neutrino wesentlich vom Photon.

Das Neutrino wurde anfangs als Hypothese zur Erklärung einiger scheinbarer Verletzungen des Energiesatzes beim radioaktiven β-Zerfall eingeführt (siehe § 287). Dieser Zerfall wird heute als Umwandlungsvorgang eines schweren Kernteilchens in ein anderes angesehen, und zwar als Umwandlungen eines Neutrons in ein Proton oder eines Protons in ein Neutron. Bei diesen Umwandlungen entsteht gleichzeitig mit dem Elektron oder Positron das Neutrino.

Heute gibt es eine Reihe überzeugender Beweise für die Existenz des Neutrinos. Der Nachweis dieses Teilchens ist äußerst schwierig, da das Neutrino wegen der fehlenden Ladung und geringen Masse fast keine Wechselwirkung mit der Materie ausübt.

4. *Proton.* Das Proton ist ein schweres Elementarteilchen mit positiver elektrischer Ladung. Die relative Masse des Protons in der physikalischen Massenskala ($O^{16} = 16$) ist gleich 1,007573 ($1{,}6724 \cdot 10^{-24}$ g); das Verhältnis seiner Masse zur Elektronenmasse m_e beträgt

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836{,}5\,.$$

Der Spin des Protons ist gleich $\frac{1}{2}$, und sein magnetisches Moment ist (ungefähr) gleich 2,8 Kernmagnetonen (§ 240). Der Wasserstoffkern besteht aus einem Proton. In den Höhenstrahlen sind die Protonen im freien Zustand anzutreffen.

Auf Grund der Dirac-Gleichung darf man erwarten, daß neben den Protonen, genau, wie es neben den Elektronen Positronen gibt, Antiprotonen existieren müssen, d. h. Teilchen mit der gleichen Masse und dem gleichen Spin, wie sie die Protonen aufweisen, jedoch mit negativer Ladung.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß solche Teilchen entdeckt werden, wenn Beschleuniger in Betrieb genommen werden, die die Teilchen auf eine Energie von einigen Milliarden eV bringen.

5. *Neutron.* Das Neutron ist ein schweres Elementarteilchen ohne elektrische Ladung. Die relative Masse des Neutrons in der physikalischen Skala beträgt 1,008941, d.h., sie ist ein wenig größer als die Protonenmasse; das Verhältnis der Neutronen- zur Elektronenmasse m_e ist gleich

$$\frac{m_n}{m_e} = 1839\,.$$

Der Spin des Neutrons ist gleich $\frac{1}{2}$; es besitzt auch ein magnetisches Moment von $-1{,}9103$ Kernmagnetonen.

Das freie Neutron ist radioaktiv; es verwandelt sich in Proton, Elektron und Neutrino

$$n \rightarrow p + e^- + \nu\,.$$

6. *Mesonen.* Als Mesonen oder Mesotronen bezeichnet man instabile Teilchen mit einer Masse, die zwischen der Elektronen- und Protonenmasse liegt; gerade darauf weist der Name „Meson“ hin („mesos“ bedeutet auf griechisch „mittlerer“).

Es gibt geladene und neutrale Mesonen. Ihre positive oder negative Ladung ist dem absoluten Betrag nach gleich der Ladung des Elektrons.

Die Existenz von Teilchen mit einer mittleren Masse wurde zuerst theoretisch von YUKAWA (1935) vorausgesagt. Später wurde eine Art dieser Teilchen (und zwar die sogenannten μ-Mesonen, siehe unten) in den Höhenstrahlen entdeckt (1937). Im Jahre 1948 wurde in den Höhenstrahlen ein neuer Mesonentyp gefunden: positiv und negativ geladene π^+- und π^--Mesonen, die sich in ihrer Masse von den früher entdeckten unterscheiden. Bis 1948 waren die Höhenstrahlen überhaupt die einzige bekannte Mesonenquelle. Diese Quelle ist äußerst schwach: auf 1 cm^2 der Erdoberfläche in Meereshöhe fällt im Mittel in einer Minute 1 Meson. Trotzdem wurden alle Eigenschaften der μ-Mesonen und die wichtigsten der π^+- und π^--Mesonen gerade in den Höhenstrahlen untersucht.

1948 gelang es zum ersten Mal, eine „Geburt" von π-Mesonen im Laboratorium zu verwirklichen, und seit dieser Zeit wurden Untersuchungen über die komplizierten Wechselwirkungen der Mesonen mit den Stoffen in Laboratorien vorangetrieben. Schließlich wurde 1949 festgestellt, daß bei der Wechselwirkung schneller Kernteilchen auch *neutrale π-Mesonen* (π^0-Mesonen) auftreten.

Wir beschreiben jetzt die wichtigsten Eigenschaften der heute bekannten Mesonen.

a) μ-Mesonen. Ihre Masse beträgt nach den genauesten Messungen $(212 \pm 6)\, m_e$, wobei m_e die Elektronenmasse ist. Die Ladung der μ-Mesonen ist gleich $\pm e$. Ihre mittlere Lebensdauer ist gleich 2,15 Mikrosekunden; beim Zerfall entstehen ein Elektron (oder Positron) und zwei neutrale Teilchen, wahrscheinlich Neutrinos:

$$\mu^{\pm} \to e^{\pm} + \nu + \nu .$$

Der Spin des μ-Mesons ist gleich $\frac{1}{2}$. Die μ-Mesonen stehen nur in sehr schwacher Wechselwirkung mit den Atomkernen; sie entstehen nicht bei Wechselwirkungen zwischen Kernteilchen, sondern beim Zerfall von $\pi^{\pm}$-Mesonen.

b) Die π-Mesonen entstehen bei Zusammenstößen schneller Kernteilchen. Diese Prozesse vollziehen sich häufig in den oberen Schichten der Atmosphäre bei Zusammenstößen von Teilchen der primären Höhenstrahlung mit Atomkernen. Massenbestimmungen für $\pi^{\pm}$- und π^0-Mesonen ergaben $\sim 280\, m_e$. Die mittlere Lebensdauer der $\pi^{\pm}$-Mesonen beträgt $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ sec, der π^0-Mesonen — $2{,}5 \cdot 10^{-14}$ sec. Die Zerfallsprodukte geladener π-Mesonen sind μ-Mesonen und Neutrinos:

$$\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu .$$

Das neutrale π-Meson zerfällt in zwei γ-Quanten

$$\pi^0 \to h\nu + h\nu .$$

Der Spin der π-Mesonen ist gleich 0.

In letzter Zeit erhielt man Ergebnisse, die darauf hinweisen, daß die π-Mesonen nicht der einzige Mesonentyp sind, der bei hochenergetischen Kernzusammenstößen entsteht. Es gibt Hinweise dafür, daß eine Gruppe schwererer Mesonen existiert.

In der folgenden Tabelle sind Daten über die Eigenschaften der Mesonen aufgeführt.

Tabelle XLVI

Typ	Masse M in m_e	Mc^2	Mittlere Lebensdauer im Vakuum, in sec	Spin	Zerfallsschema
$\pi^{\pm}$	(276 ± 6)	140 MeV	$\sim 10^{-8}$	0	$\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu$
π^0	~ 280	135 MeV	$2{,}5 \cdot 10^{-14}$	0	$\pi^0 \to 2h\nu$
$\mu^{\pm}$	(212 ± 6)	110 MeV	$2{,}15 \cdot 10^{-6}$	$\frac{1}{2}$	$\mu^{\pm} \to e^{\pm} + 2\nu$

§ 247. Das Deuteron

Das Deuteron ist das einfachste Kernteilchen nach dem Proton und Neutron. Es besteht nur aus einem Proton und einem Neutron und ist der Kern eines Wasserstoffisotops, des schweren Wasserstoffs oder Deuteriums $_1D^2$. Die Massenzahl des Deuterons ist $A = 2$, die Ladung beträgt $Z = 1$. Seine Bindungsenergie wurde experimentell durch die Untersuchung des sogenannten Kernphotoeffekts gefunden. Durch γ-Strahlen genügend hoher Frequenz wird das Deuteron in Proton und Neutron gespalten

$$_1D^2 + h\nu \to {}_1H^1 + {}_0n^1 .$$

Die kleinste Photonenenergie $h\nu$, bei der der Kernphotoeffekt bereits auftritt, ist gleich der Bindungsenergie; sie beträgt 2,18 MeV.

Das Deuteron gehorcht der Bose-Statistik; sein Spin ist gleich 1 (siehe Tabelle XL). Da im Grundzustand des Deuterons sein Bahndrehimpuls gleich Null ist (S-Zustand), entsteht das Moment 1 nur durch die Addition der Spinmomente des Neutrons und Protons. Daraus folgt, daß die Spins des Protons und Neutrons im Deuteronkern parallel sind. Sein Grundzustand ist der $^3S_1$-Triplettzustand. Daß ein solcher Zustand existiert, steht nicht im Widerspruch zum Pauli-Prinzip, da es sich nicht um identische Teilchen handelt, obwohl das Proton und Neutron auch gleiche Spins haben.

Die Parallelität des Neutronen- und Protonenspins führt dazu, daß ihre magnetischen Momente antiparallel sind, da das magnetische Moment des Neutrons negativ ist. Für das magnetische Moment des Deuterons hatte man deshalb folgenden Wert zu erwarten:

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2{,}7896 \text{ Kernmagnetonen,} \\ \mu_n &= -1{,}9103 \text{ Kernmagnetonen,} \\ \hline \text{Summe} &= 0{,}8793 \text{ Kernmagnetonen.} \end{aligned}$$

Das experimentell bestimmte magnetische Moment des Deuterons ist jedoch gleich 0,8565, und die Differenz von 0,0228 geht über den erwarteten Meßfehler hinaus.

Die Erklärung dieser Tatsache ist folgende. Der S-Zustand ist, wie wir wissen, durch vollständige Kugelsymmetrie gekennzeichnet. Unterdessen wurde experimentell gefunden, daß das Deuteron ein kleines elektrisches Quadrupolmoment (siehe § 241) von der Größe $+ 0{,}273 \cdot 10^{-26}$ cm² besitzt, das einer mittleren elektrischen Landungsverteilung in Form eines längs der Spinachse auseinandergezogenen Rotationsellipsoids entspricht. Daraus folgt, daß der Grundzustand des Deuterons kein reiner S-Zustand sein kann, da sich der S-Zustand

durch vollständige Kugelsymmetrie auszeichnet. Theoretische Überlegungen zeigen[1]), daß der Grundzustand des Deuterons eine Superposition des S- und D-Zustands sein muß (der P-Zustand ist ausgeschlossen, da ihm kein Quadrupol-, sondern ein Dipolmoment entspricht, das beim Deuteron nicht vorhanden ist); dabei muß man voraussetzen, um die richtigen Größen des magnetischen Moments und des elektrischen Quadrupolmoments zu erhalten, daß der Anteil des D-Zustands in der Überlagerung 4% ausmacht. Man kann sich deshalb vorstellen, daß das Deuteron 96% der Zeit im ${}^3S_1$-Zustand und 4% im ${}^3D_1$-Zustand verweilt.

Am Beispiel des Deuterons kann man einige Besonderheiten der Kernkräfte klären. Vor allem fällt die kleine Bindungsenergie des Deuterons auf. Vergleichen wir einmal mit Hilfe der Tabelle XLIV auf Seite 310 die Bindungsenergie des Deuterons mit den Bindungsenergien von Kernen, die sich von ihm nur um ein oder zwei Nukleonen unterscheiden, und zwar den Kernen des Tritiums ${}_1H^3$ und Heliums ${}_2H^4$:

Kern	E/A
Deuteron ${}_1D^2$	1,09
Tritium ${}_1H^3$	2,78
α-Teilchen ${}_2He^4$	7,03

Hier fällt nicht nur der kleine Wert von E/A auf, sondern auch die starke Veränderung dieser Größe, während sie bei Kernen mit ausreichend großer Teilchenzahl konstant ist. Die Erklärung dieser Tatsache hängt damit zusammen, daß die Kernkräfte Nahwirkungskräfte sind und Sättigung zeigen. In einem Kern mit großer Teilchenzahl tritt tatsächlich jedes Nukleon nur mit den nächsten Nachbarn, die es von allen Seiten umgeben, in Wechselwirkung. Ein neu hinzukommendes Teilchen ändert an diesem Bild nichts; die geringen Änderungen der Bindungsenergie, wie im vorigen Paragraphen dargestellt wurde, hängen nur von der Änderung der Oberflächenenergie und der elektrostatischen Abstoßung der Protonen ab.

Andererseits gibt es in Kernen mit sehr kleiner Nukleonenzahl (1 bis 4) noch keine Absättigung; alle Nukleonen stehen miteinander in Wechselwirkung, und die Gesamtzahl der Bindungen erweist sich als wesentlich. Im Deuteronkern haben wir ein Teilchenpaar und folglich eine Bindung; beim Tritium finden wir drei Teilchen, und die Zahl der Bindungen beträgt $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$; beim Heliumkern sind es schließlich vier Teilchen mit der Bindungszahl $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$. Man kann deshalb erwarten, daß sich die Bindungsenergien in diesen Kernen wie 1:3:6 verhalten, was auch annähernd mit den angegebenen Zahlen übereinstimmt.

Die Frage nach der vollen Ausnutzung der Kernkräfte zwischen zwei Nukleonen erfordert aber eine eingehendere Betrachtung. Wie schon mehrmals betont wurde, besteht die charakteristische Besonderheit der Kernkräfte in ihrer schnellen Abnahme mit der Entfernung, so daß sich die Wirkung dieser Kräfte nur auf sehr kleinen Entfernungen bemerkbar macht. Stellen wir uns vor, daß ein Proton im Koordinatenursprung befestigt ist und sich ihm ein

[1]) Siehe z. B. H. A. Bethe: „Elementary Nuclear Theory. A Short Course on Selected Topics", New York 1947.

Neutron nähert, so daß bei genügend kleiner Entfernung zwischen ihnen ein stabiler Kern, ein Deuteron, entsteht. Da in diesem Falle keine COULOMBsche Abstoßung auftritt, ist die potentielle Energie in Entfernungen, die über den Wirkungsradius der Kernkräfte hinausgehen, gleich Null; bei Annäherung der Teilchen auf eine Entfernung, die dem Wirkungsradius entspricht, fällt sie steil ab. Es entsteht ein Potentialtopf.

Den Potentialverlauf innerhalb dieses Topfes können wir nicht genau feststellen. Es zeigt sich aber, daß er gar nicht wesentlich ist[1]), so daß man sich mit dem einfachsten rechtwinkligen Kasten zufrieden geben kann (Abb. 308). Seine Höhe, die gleich der potentiellen Energie des Systems Proton-Neutron bei voller Ausnutzung der Kernkräfte zwischen ihnen ist, beträgt 20—25 MeV, wie aus dem Folgenden ersichtlich wird.

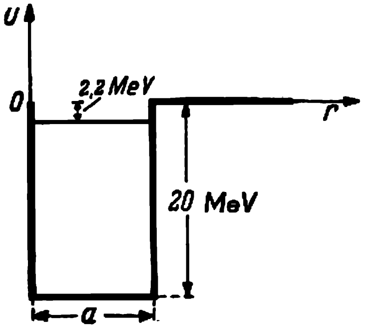


Abb. 308. Potentialtopf des Deuterons

Die Breite a des Kastens muß gleich dem Wirkungsradius der Kernkräfte sein, d. h. $1{,}5$—$2 \cdot 10^{-13}$ cm.

Die kinetische Energie des Nukleons, das im Raum mit diesen linearen Abmessungen eingeschlossen ist, finden wir aus dem Ausdruck für die DE-BROGLIE-Wellenlänge. Wir setzen $\frac{\lambda}{2\pi}$ gleich $2 \cdot 10^{-13}$ cm und erhalten

$$2 \cdot 10^{-13} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{2ME_k}},$$

und daraus

$$E_k = \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^2}{(2 \cdot 10^{-13})^2 \cdot 2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24}} = 8{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{erg} \approx 5\ \text{MeV}.$$

Dagegen beträgt die Bindungsenergie des Deuterons nach experimentellen Bestimmungen nur 2,2 MeV. Seine Existenzmöglichkeit wird dadurch gegeben, daß sich seine Nukleonen einen bedeutenden Teil der Zeit jenseits der Grenze des Wirkungsradius der Kernkräfte aufhalten. Quantitative Angaben über diese Frage werden im nächsten Paragraphen folgen.

[1]) Das folgt daraus, daß die Berechnungen des Deuterons bei verschiedenen Annahmen des Potentialverlaufs wenig verschiedene Resultate liefern.

§ 248. Theorie des Deuterons

Wenn wir das Problem des Deuterons quantenmechanisch behandeln wollen, müssen wir vor allem den Charakter der Kräfte, die zwischen dem Proton und Neutron im Deuteron wirken, kennen. Wir werden für das Weitere voraussetzen, daß diese Kräfte reine Zentralkräfte sind, d. h., daß ihr Potential U nur von der Entfernung r zwischen den Nukleonen abhängt. Diese Voraussetzung entspricht nicht ganz unseren empirischen Ermittlungen über die Eigenschaften des Deuterons. Wenn die Kräfte wirklich nur Zentralkräfte wären, müßte der Grundzustand ein S-Zustand sein; dagegen weist die Existenz eines Quadrupolmoments darauf hin, daß der Grundzustand ein Gemisch von S- (96%) und D- (4%) Zuständen ist. Das rührt davon her, daß die Kräfte nicht nur von der Entfernung zwischen den Nukleonen, sondern auch vom Winkel zwischen ihrer Verbindungslinie und der Spinrichtung abhängen. Wenn wir also annehmen, daß die Kräfte zentralen Charakter haben, idealisieren wir die Aufgabe etwas. Da jedoch das Gewicht des D-Zustands nur 4% beträgt, ist der nichtzentrale Charakter eine feinere Einzelheit, die wir vorläufig zurückstellen können.

Das Problem des Deuterons ist also ein Zweikörperproblem; die beiden Teilchen besitzen fast gleiche Massen; das Potential $U(r)$, hängt nur von r ab. Die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(r)]\,\psi = 0 \tag{248,1}$$

enthält die *reduzierte* Masse m (Bd. I, S. 176):

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \cong \frac{1}{2} m_p \quad \left(\text{oder } \frac{1}{2} m_n\right).$$

Wir bezeichnen die nahezu gleichen Massen des Neutrons und Protons einfach mit M und schreiben (248,1) mit dieser Masse

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2 M}{h^2}[E - U(r)]\,\psi = 0. \tag{248,2}$$

Bekanntlich ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für Zentralkräfte (siehe KEPLER-Problem, § 184) in Polarkoordinaten separierbar. Wir haben deshalb ψ als Funktion von r, ϑ, φ zu betrachten und Δ in räumlichen Polarkoordinaten aufzuschreiben.

Da wir jedoch den *kugelsymmetrischen* Zustand S betrachten werden ($l = 0$), hängt ψ nur von r ab, und die Gleichung (248,2) geht in eine bedeutend einfachere Form über. Die Umrechnungsformel des LAPLACE-Operators Δ von kartesischen in Polarkoordinaten (siehe Bd. I, § 124, Formel (124,6)] führt bei Kugelsymmetrie nur zu einem Glied

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) = \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr},$$

das auch durch

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi)$$

dargestellt werden kann, wie man sich leicht überzeugt. Die Gleichung (248,2) nimmt jetzt die Form

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) + \frac{4\pi^2 M}{h^2}[E - U(r)](r\psi) = 0 \tag{248,3}$$

an oder, wenn man $v = r\,\psi$ setzt,

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{4\pi^2 M}{h^2}[E - U(r)]\,v = 0\,. \tag{248,4}$$

Das Problem ist also auf die Lösung einer eindimensionalen Gleichung zurückgeführt.

Für die weitere Lösung muß man die Abhängigkeit des U von der Entfernung wählen. Wie schon im vorigen Paragraphen betont wurde, kann man die Wechselwirkung Proton—Neutron durch den einfachsten linearen Potentialtopf darstellen. Die potentielle Energie ist „außerhalb des Kerns“ gleich Null; innerhalb des Kerns, d. h. im Bereich des „Wirkungsradius“ a der Kernkräfte (Breite des Topfes) ist $U = -U_0$.

Die Gleichung (248,4) erlaubt bei bekannter potentieller Energie $U(r)$ die Eigenwerte E zu finden, insbesondere den des Grundzustandes E_0, der gleich der Bindungsenergie des Deuterons mit entgegengesetztem Vorzeichen ist. Man kann aber auch den umgekehrten Weg gehen. Wenn man E kennt, kann man U_0 aufsuchen oder genauer die Beziehung, die U_0 und a verbindet, da die Gleichung (248,4) nur einen Parameter liefert. So wollen wir auch vorgehen.

Ein stabiler Zustand kann offensichtlich nur dann existieren, wenn E negativ ist, $E = -E_0$. Die Gleichung (248,4) nimmt jetzt folgende Form an:

I. Für $r < a$ $(U = -U_0)$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{4\pi^2 M}{h^2}(U_0 - E_0)\,v = 0\,. \tag{248,5}$$

II. Für $r > a$ $(U = 0)$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} - \frac{4\pi^2 M}{h^2}E_0 v = 0\,. \tag{248,6}$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\frac{2\pi}{h}\sqrt{M(U_0 - E_0)} = k\,, \tag{248,7}$$

$$\frac{2\pi}{h}\sqrt{ME_0} = a \tag{248,8}$$

ein und schreiben die Lösung auf:

Im Gebiet I $(r < a)$ gilt

$$v = ae^{ikr} + be^{-ikr}\,;$$

wegen $v = r\psi$, ist

$$\psi = \frac{1}{r}(ae^{ikr} + be^{-ikr})\,.$$

Damit ψ für $r = 0$ nicht unendlich wird, muß man

$$a = b = \frac{A}{2i}$$

festsetzen, so daß man (für $r < a$)

$$v = A \sin kr \tag{248,9}$$

erhält.

Im Gebiet II ($r > a$) ist

$$v = Be^{-\alpha r}. \tag{248,10}$$

Zur Bestimmung der Konstanten A und B muß man die Stetigkeit von v und dessen erste Ableitung wie in Teil I, § 144, benutzen. Wir erhalten jedoch das uns interessierende Resultat schneller, wenn wir beachten, daß $\ln v$ und seine erste Ableitung dann überall stetig und beschränkt sind, wenn die Funktion v stetig und beschränkt ist. Wir erhalten

$$\ln v_{\mathrm{I}} = \ln A + \ln \sin kr,$$

$$\ln v_{\mathrm{II}} = \ln B - \alpha r.$$

Wegen der Stetigkeit der ersten Ableitung an der Grenze der Gebiete I und II

$$\frac{d}{dr}(\ln v_{\mathrm{I}})_{r=a} = \frac{d}{dr}(\ln v_{\mathrm{II}})_{r=a},$$

erhält man

$$k \operatorname{ctg} ka = -\alpha, \tag{248,11}$$

und daraus

$$\operatorname{ctg} ka = -\frac{\alpha}{k} = -\sqrt{\frac{E_0}{U_0 - E_0}}.$$

Der kleine Wert der Bindungsenergie des Deuterons weist darauf hin, daß $E_0 \ll U_0$ ist. Das erlaubt, E_0 im Nenner unter der Wurzel zu vernachlässigen, so daß

$$\operatorname{ctg} ka \approx -\sqrt{\frac{E_0}{U_0}} \tag{248,12}$$

folgt. Also ist $\operatorname{ctg} ka$ eine kleine ($E_0 \ll U_0$) negative Zahl. Das Minuszeichen vor $\operatorname{ctg} ka$ weist darauf hin, daß $ka > \frac{\pi}{2}$ ist (die Bedingung $ka > \frac{3\pi}{2}$ ist hier untauglich, da wir den Grundzustand, d. h. den tiefsten Zustand des Deuterons betrachten); da außerdem $\operatorname{ctg} ka$ einen kleinen absoluten Betrag hat, ist näherungsweise

$$ka \approx \frac{\pi}{2},$$

d. h.

$$\sqrt{M(U_0 - E_0)} \cdot a \approx \frac{h}{4},$$

woraus wir in grober Näherung unter nochmaliger Berücksichtigung von $U_0 \gg E_0$

$$U_0 a^2 \approx \frac{h^2}{16M} \tag{248,13}$$

erhalten, d. h., das Produkt aus der Tiefe des Potentialtopfes und dem Quadrat seiner Breite ist eine Konstante.

Da aber ctg ka negativ ist und einen *kleinen* Betrag hat, ist auf jeden Fall

$$ka < \pi,$$

woraus wir auf demselben Wege wie früher

$$U_0 a^2 < \frac{h^2}{4M}$$

erhalten.

Die Beziehung (248,13) sagt noch nichts über die Tiefe des Potentialtopfes aus. Sie kann breit und flach oder auch tief und schmal sein, wenn nur das Produkt $U_0 a^2$ konstant ist. Zur Bestimmung von U_0 muß die Größe von a auf unabhängigem Wege abgeschätzt werden.

Wir nehmen $R = 2{,}0 \cdot 10^{-13}$ cm an und finden aus (248,13) für $a = R$

$$U_0 = \frac{h^2}{16Ma^2} = \frac{43{,}6 \cdot 10^{-54}}{16 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24} \cdot 4 \cdot 10^{-26}} = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{erg} = 25\,\text{MeV}.$$

Das ist ein Wert, der annähernd mit den üblichen Abschätzungen für die Tiefe des Potentialtopfes des Kerns (~ 20 MeV) übereinstimmt.

Daraus folgt, daß der Topf eng und tief ist. Da andererseits die Bindungsenergie des Deuterons insgesamt gleich 2,2 MeV ist, liegt sein Grundniveau sehr nah am Rand des Topfes, was der geringen Stabilität des Deuterons entspricht.

Wir zeigen jetzt, daß die Bindung der Nukleonen im Deuteron so schwach ist, daß sogar der Rotationszustand $l = 1$, d. h. der P-Zustand, nicht existieren kann. Am einfachsten kann man sich folgendermaßen davon überzeugen. Wir drücken die Rotationsenergie durch das Drehmoment L aus:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I},$$

wo I das Trägheitsmoment ist. Wir ersetzen L^2 durch seinen Eigenwert $l\,(l+1)\,\frac{h^2}{4\pi^2}$ und setzen $I = Ma^2$; damit ergibt sich

$$E_{\text{rot}} = \frac{l\,(l+1)\,h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2Ma^2};$$

für $l = 1$ erhält man daraus

$$E_{\text{rot}} = \frac{h^2}{4\pi^2 Ma^2}.$$

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit der Tiefe des Potentialtopfes $U_0 = \frac{h^2}{16\,Ma^2}$ sehen wir, daß die Rotationsenergie $\frac{4}{\pi^2} = 0{,}4$ der Tiefe des Topfes ausmacht. Da aber das Niveau des Grundzustands schon fast am Rande des Topfes liegt, muß die Hinzufügung der Rotationsenergie vom genannten Betrag unvermeidlich zum Zerreißen der Bindung führen.

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung der Funktion v zu [Formeln (248,9) und (248,10)]. Wir sehen, daß v außerhalb des Topfes exponentiell abnimmt, d. h., nicht für $r > a$ Null wird, sondern sich asymtotisch dem Nullwert für $r \to \infty$ nähert (Abb. 309, ausgezogene Linie).

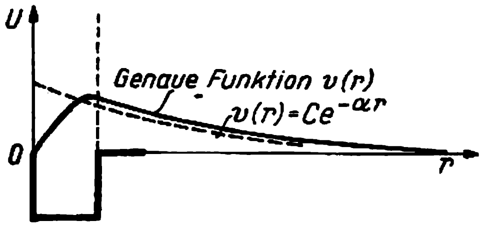


Abb. 309

Nach der Fläche, die von der Kurve innerhalb und außerhalb des Topfes begrenzt wird, kann man abschätzen, welche Zeit ein Nukleon in einer Entfernung $r > a$ relativ zum anderen verbringt. Die Rechnung zeigt, daß wir das Neutron in 40% der Fälle außerhalb des Topfes finden. Die „Abmessungen" des Deuterons sind also im Mittel größer als der Wirkungsradius der Kernkräfte. Die linearen Abmessungen des Deuterons kann man z. B. durch $r = \frac{1}{\alpha}$ kennzeichnen, d. h. durch die Entfernung, auf der v um den e-ten Teil abnimmt. Wenn wir $E_0 = 2{,}2$ MeV setzen, finden wir mit Hilfe von (248,8)

$$r = \frac{1}{\alpha} = \frac{h}{2\pi\sqrt{ME_0}} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{1{,}66 \cdot 10^{-24} \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}}} = 4{,}32 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}\,,$$

d. h., r ist bedeutend größer als der Wirkungsradius der Kernkräfte. Damit haben wir auch die Antwort auf die Frage, die wir am Ende des letzten Paragraphen stellten: Wie kann das Deuteron existieren, obwohl die kinetische Energie des Nukleons, das in einem Potentialkasten mit einer dem Wirkungsradius der Kernkräfte gleichen Breite „eingeschlossen" ist, größer als die Höhe des Topfes ist?

Da die Funktion v mit Ausnahme des kleinen Gebietes innerhalb des Topfes im ganzen Raum durch eine exponentiell abnehmende Funktion

$$v = Be^{-\alpha r} \tag{248,10}$$

dargestellt wird, kann man bei verschiedenen Berechnungen, in denen über den gesamten Raum integriert wird, z. B. bei Berechnungen von Mittelwerten, an Stelle der Funktion ψ einfach eine (248,10) entsprechende Funktion benutzen, d. h.

$$\psi = \frac{v}{r} = \frac{e^{-\alpha r}}{r}\,.$$

Damit ist auch die Eigenfunktion des Deuterons leicht normierbar:

$$1 = N^2 \int\int |\psi|^2 d\tau = N^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot \int_0^{\infty} r^2 \psi^2 dr = N^2 \cdot 4\pi \int_0^{\infty} e^{-2ar} dr = N^2 \frac{2\pi}{a}.$$

Daraus folgt

$$N = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}.$$

Die normierte Funktion ψ hat deshalb die Form[1])

$$\psi = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ar}}{r}.$$

Der genauere Wert des Normierungsfaktors wurde von J. A. Smorodinski berechnet,

$$N = \sqrt{\frac{3a}{4\pi}}.$$

Mit diesem Normierungsfaktor hat die ψ-Funktion entsprechend die Gestalt

$$\psi = \sqrt{\frac{3a}{4\pi}} e^{-ar}. \qquad (248,14)$$

Die Berechnungen, die mit dieser Funktion durchgeführt wurden, entsprechen der Wirklichkeit besser.

Übung:

Unter Benutzung der Funktion (248,14) ist zu beweisen, daß die mittlere Entfernung Proton — Neutron im Deuteron gleich

$$\frac{3}{4}\frac{1}{a} = 3{,}24 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{cm}$$

ist.

§ 249. Die Abhängigkeit der Kernkräfte vom Spin

Es wurde schon früher darauf hingewiesen, daß die Existenz eines Quadrupolmoments beim Deuteron auf den nicht vollständig zentralen Charakter der Kernkräfte hinweist. Weitere Beweise lieferte die Untersuchung der Neutronenstreuung an Protonen, wobei die Abhängigkeit der Kernkräfte von der Orientierung des Spins entdeckt wurde. Die Wahrscheinlichkeit der Streuung von Neutronen an Protonen kann man theoretisch berechnen, wenn man einen bestimmten Ausdruck für das Potential der Wechselwirkung Proton—Neutron vorgibt. Am einfachsten ist natürlich, wie es z. B. in der Theorie des Deuterons getan wurde (§ 248), vorauszusetzen, daß die Potentialkurve für diesen Fall ein rechtwinkliger Topf sei. Da es sich in der Theorie des Deuterons zeigte, daß der Charakter der

---

1) Diese Funktion wird unendlich für $r = 0$. Da aber der größte Teil des Normierungsintegrals das Gebiet $r > a$ betrifft, ruft der singuläre Punkt $r = 0$ keinen großen Fehler hervor.

Potentialkurve wenig Einfluß auf das Endergebnis hat, dürfte die Annahme der einfachsten Potentialkurve auch bei der Berechnung der Streuwahrscheinlichkeit der Neutronen an Protonen zu keinem wesentlichen Fehler führen. Dagegen hat man experimentell festgestellt, daß die Streuwahrscheinlichkeit sehr langsamer, sogenannter thermischer Neutronen, d. h. Neutronen, deren mittlere Energie von der Größenordnung kT ist, an freien Protonen den berechneten Wert bedeutend übersteigt. Diese Abweichung der Theorie vom Experiment kann man durch die Annahme beseitigen, daß die Wechselwirkung des Neutrons mit dem Proton auch von der gegenseitigen Orientierung ihrer Spins abhängt, d. h., daß die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton bei parallelen Spins (Triplett-Zustand) sich von ihrer Wechselwirkung bei antiparallelen Spins (Singulett-Zustand) unterscheidet.

Den überzeugendsten Beweis für die Abhängigkeit der Kernkräfte vom Spin gaben nicht die Streuversuche mit Neutronen an freien Protonen, sondern an den Molekülen des Ortho- und Parawasserstoffs. Das Prinzip dieser Versuche besteht in folgendem: Wie wir wissen, unterscheiden sich Ortho- und Parawasserstoff dadurch, daß beim ersteren die Spins der das Molekül aufbauenden Protonen parallel und im zweiten Fall antiparallel sind.

Wenn die Kernkräfte nicht von der gegenseitigen Orientierung der Spins abhängen, dann dürfte kein Unterschied bei der Streuung langsamer Neutronen an Ortho- und Paramolekülen zu beobachten sein. Andererseits muß ein Unterschied beobachtet werden, wenn eine Abhängigkeit der Kernkräfte vom Spin vorhanden ist. Dieser Unterschied rührt nun gerade davon her, daß im Molekül des Orthowasserstoffs die Spins beider Protonen parallel und im Molekül des Parawasserstoffs antiparallel sind. Deshalb können bei der Streuung des Neutrons am Molekül des Orthowasserstoffs zwei Fälle auftreten:

1. der Spin des Neutrons ist den Spins *beider* Protonen parallel,
2. der Spin des Neutrons ist den Spins der *beiden* Protonen antiparallel.

Dagegen wird der Spin des Neutrons bei der Streuung am Molekül des Parawasserstoffs immer dem Spin eines Protons parallel und dem Spin des anderen Protons antiparallel sein. Wenn man die Streuung vom Wellenstandpunkt aus betrachtet, muß man folgendes erwarten. Hängt die Amplitude der Streuung von der gegenseitigen Orientierung der Spins ab, dann wird der Interferenzeffekt der Neutronenwellen, die an beiden Protonen gestreut werden, sehr unterschiedlich sein, je nachdem, ob die Streuung an einem Ortho- oder einem Parawasserstoffmolekül erfolgt.

Die theoretische Berechnung der Streuung von Neutronen an Ortho- und Parawasserstoff wurde für den Fall so kleiner Neutronenenergie durchgeführt, daß die ihnen entsprechende, durch 2π dividierte Wellenlänge bedeutend größer als die Entfernung zwischen den Wasserstoffatomen im H_2-Molekül ist. Dieser Fall ist verwirklicht, wenn die Energie der Neutronen einer Temperatur von 20° K oder darunter entspricht.

Die Untersuchung der Neutronenstreuung an gasförmigem Para- und Orthowasserstoff bei einer Temperatur von 20° K zeigte, daß die Streuung an Parawasserstoffmolekülen nahezu 30 mal schwächer als an Orthowasserstoffmolekülen ist. Dieses Ergebnis ist eine ausgezeichnete experimentelle Bestätigung der Abhängigkeit der Kernkräfte vom Spin.

§ 250. Die Natur der Kernkräfte

Im letzten Abschnitt haben wir schon Besonderheiten der Kernkräfte kennengelernt, bis jetzt aber noch nichts über ihre Natur gesagt.

Stellen wir kurz die wichtigsten uns schon bekannten Eigenschaften der Kernkräfte zusammen.

1. Die Kernkräfte wirken zwischen gleichnamig geladenen Nukleonen (Proton-Proton), zwischen geladenen und neutralen Nukleonen (Proton-Neutron) und zwischen neutralen Nukleonen (Neutron-Neutron). Dabei sind die Kernkräfte in allen Fällen ihrem Charakter (Abhängigkeit von der Entfernung) und ihrer Größe nach ungefähr gleich.

2. Die Kernkräfte sind „Nahwirkungskräfte“; sie treten nur in Entfernungen von der Größenordnung 10^{-13} cm auf.

3. Die Kernkräfte besitzen Sättigungseigenschaften.

Die Sättigungseigenschaft ist die wichtigste Besonderheit der Kernkräfte, und wir müssen deshalb etwas ausführlicher darauf eingehen. Diese Eigenschaft drückt sich in der mehrmals erwähnten Beziehung zwischen Volumen und Masse (genauer, Massenzahl A) des Kerns aus. Wir stellten tatsächlich fest, daß der Kernradius zu $A^{\frac{1}{3}}$ proportional ist, folglich ist das Volumen proportional A, d. h. proportional der Nukleonenzahl des Kerns. Man kann diesen Sachverhalt auch anders formulieren: Das Volumen, das auf ein Nukleon kommt, ist immer dasselbe, wie groß auch die Nukleonenzahl des Kerns sein mag.

Diese Tatsache erscheint auf den ersten Blick ziemlich seltsam. Man könnte sich gerade das Gegenteil vorstellen, daß nämlich bei größerer Nukleonenzahl des Kerns die Nukleonen miteinander fester verbunden sind und auf jedes ein kleineres Volumen kommt. Es wird jedoch nichts derartiges beobachtet.

Diese Besonderheit der Kernkräfte kann man noch anders beschreiben. Da nach dem Gesagten das Volumen des Kerns seiner Masse A proportional ist, muß die Stoffdichte in beliebigen Kernen dieselbe sein. Dann können wir aber den Kern mit Recht so betrachten, als ob er aus einer gewissen universellen „Kernsubstanz“, die das Volumen mit konstanter Dichte ausfüllt, bestünde. Diese Eigenschaft der Kernsubstanz ähnelt der einer Flüssigkeit. Verschiedene Kerne kann man deshalb als Tröpfchen verschiedener Größe betrachten, die aus ein- und derselben „Kernflüssigkeit“ bestehen.

Bekanntlich erklärt sich die Proportionalität zwischen Masse und Volumen einer gewöhnlichen Flüssigkeit durch besondere Eigenschaften der Molekularkräfte. Die Kurve der potentiellen Energie dieser Kräfte hat den in Abb. 233 (S. 91) dargestellten Verlauf. Die potentielle Energie fällt (Anziehungskräfte) bei Annäherung der Teilchen bis zu einer gewissen Entfernung r_0; bei weiterer Annäherung steigt die potentielle Energie steiler als sie vorher gefallen war. Dieses Anwachsen wird gewöhnlich dadurch erklärt, daß neben den Anziehungskräften Abstoßungskräfte existieren, die sich umgekehrt proportional einer höheren Potenz des Abstands als die Anziehungskräfte ändern. Gerade diese Abstoßungskräfte verhindern, daß sich die Flüssigkeitsmoleküle auf einen Abstand annähern, der kleiner als r_0 ist, so daß letzten Endes auf jedes Molekül das gleiche Volumen r_0^3 kommt.

Natürlich entsteht der Wunsch, die konstante Dichte der Kernsubstanz durch analoge Abstoßungskräfte zwischen den Nukleonen zu erklären. Solche Erklärungsversuche wurden gemacht, sie führten aber zu keinem positiven Resultat, da es nicht gelang, alle Eigenschaften der Kerne durch Anziehungs- und Abstoßungskräfte zu erklären.

Wie kann man nun erklären, daß die Kerne, obwohl nur die Anziehungskräfte existieren, für eine beliebige Anzahl von Nukleonen immer dieselbe Dichte haben? Die Antwort auf diese Frage besteht darin, daß die Teilchen, wenn nur Anziehungskräfte existieren, sich dann in der beschriebenen Weise benehmen, wenn diese Kräfte Sättigungseigenschaften besitzen. Die Sättigung führt tatsächlich dazu, daß jedes Teilchen (Nukleon im Falle des Kerns) nur mit einer begrenzenden Zahl seiner nächsten Nachbarn in Wechselwirkung treten wird. Deshalb hat die Angliederung neuer Teilchen keinen Einfluß auf die Bindung der schon vorhandenen.

Damit das noch klarer wird, kehren wir zur Analogie mit der Flüssigkeit zurück und betrachten einen Tropfen flüssigen Wasserstoff. Flüssiger Wasserstoff besteht aus H_2-Molekülen, wobei bekanntlich nicht mehr als zwei Atome im Wasserstoffmolekül gebunden werden können. Wegen der Sättigung der chemischen Kräfte wird das dritte H-Atom, das sich dem H_2-Molekül nähert, von diesem abgestoßen. Dadurch ist die Gesamtbindungsenergie des flüssigen Wasserstofftropfens der Zahl der Moleküle proportional und damit auch der Zahl der Atome im Tropfen. Wenn jedes Atom mit allen anderen in Wechselwirkung stehen würde (d. h., wenn es keine Sättigung gäbe), wäre die Gesamtbindungsenergie $\frac{1}{2} N (N - 1) \sim \frac{1}{2} N^2$ proportional, d. h. dem *Quadrat* der Anzahl der Atome.

Die Tatsache, daß die Sättigungsfähigkeit eine charakteristische Besonderheit *sowohl* der Kernkräfte *als auch* der Kräfte der chemischen homöopolaren Bindungen ist, gab Anlaß, die Natur der Kernkräfte in der Analogie zur chemischen Bindung im Wasserstoffmolekül zu suchen; dort wird die Sättigung durch Vorstellungen über den „Austausch" mit Berücksichtigung der Elektronenspins erklärt. Dieser Umstand führte dazu, die Vorstellung über den Austausch auch für die Erklärung der Natur der Kernkräfte zu benutzen.

Es erwies sich jedoch, daß die Analogie zwischen den chemischen und den Kernkräften nicht sehr weitgehend ist, und die Vorstellung über den „Austausch" in der Theorie der Kernkräfte sich wesentlich vom Elektronen-„Austausch" in der Bindungstheorie des H_2-Moleküls unterscheidet, wo dieser „Austausch" im Grunde genommen ein Synonym der Identität der Elektronen ist. In der Theorie der Kernkräfte aber spielt zur Erklärung der Sättigung der Austausch zwischen verschiedenen Teilchen, und zwar zwischen den Protonen und Neutronen, eine wesentliche Rolle. Es gibt einige verschiedene Varianten von Austauschschemata, und man kann mathematisch zeigen[1]), daß diese Schemata zur Absättigung der Kernkräfte führen.

Zur Anwendung des Austauschgedankens für die Erklärung der Kernkräfte zeigen wir zuerst, daß man beliebige Wechselwirkungen so darstellen kann, als würden sie durch Austausch von Teilchen hervorgerufen (eben in solchen Fällen sprechen wir von „virtuellem" Austausch).

Beginnen wir mit den gewöhnlichen elektromagnetischen Wechselwirkungen. Eins der wichtigsten und aufschlußreichsten Ergebnisse der Physik des XIX. Jahrhunderts ist die Entdeckung der elektromagnetischen Natur des Lichts. Diese Entdeckung wurde bekanntlich durch die Tatsache ermöglicht, daß ein und dieselbe universelle Konstante c einerseits die magnetische Wechselwirkungen zwischen zwei bewegten Ladungen bestimmt und andererseits die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts darstellt. Dadurch hängen die elektromagnetischen Wechselwirkungskräfte mit den Eigenschaften des Lichts zusammen. Da aber die Eigenschaften des Lichts auch durch Teilchen, und zwar durch Photonen, beschrieben werden können, kann man auch die elektromagnetischen Wechselwirkungen als Austausch von Photonen beschreiben. Man kann folglich die Wechselwirkung zweier geladener Teilchen, z. B. sich bewegender Elektronen, als Wechselwirkung eines Elektrons mit dem Feld und dieses Feldes mit dem zweiten Elektron auffassen. Dieselbe Wechselwirkung kann man als Emission eines Photons durch das eine Elektron und Absorption

---

[1]) Siehe z. B. D. Iwanenko und A. Sokolow: „Klassische Feldtheorie", Akademie-Verlag, Berlin 1952; H. A. Bethe: „Elementary Nuclear Theory. A Short Course on Selected Topics". New York 1947.

dieses Photons durch das andere beschreiben. Beide Möglichkeiten sind vollkommen äquivalent. Man darf übrigens nicht vergessen, daß es sich bei der Beschreibung der Wechselwirkung durch Korpuskeln nur um einen *virtuellen* Photonenaustausch und nicht um einen realen Emissions- oder Absorptionsprozeß handelt (in einem stationären Zustand werden in Wirklichkeit keine Photonen „geboren"). Eine solche Korpuskelbeschreibung erwies sich als heuristische Methode außerordentlich fruchtbar.

Die sowjetischen Physiker J. E. Tamm und D. D. Iwanenko wiesen unabhängig voneinander darauf hin, daß man dieses Korpuskelbild der Wechselwirkung mit Erfolg zur Erklärung der Kernkräfte anwenden kann. Die Wechselwirkung der Nukleonen im Kern geschieht mit Hilfe des Feldes spezifischer Kernkräfte. Diesem Feld kann man wie jedem anderen bestimmte Teilchen zuordnen und die Wechselwirkungen als virtuellen Austausch dieser Teilchen ansehen. Was sind das nun für Teilchen? Anfangs wurde der Versuch unternommen, die Kernkräfte zwischen Proton und Neutron durch Austausch von Elektronen und Neutrinos zu erklären. Von diesem Standpunkt aus verwandelt sich das Neutron unter Aussendung eines Elektrons und Neutrinos in ein Proton, und das Proton verwandelt sich durch Absorption eines Elektrons und Neutrinos in ein Neutron. Dadurch kommt eine Art „Platz"wechsel zwischen dem Neutron und dem Proton zustande. Auf diesem Austausch beruht die Möglichkeit, die Sättigung der Kernkräfte zu erklären.

Obwohl dieses Wechselwirkungsbild die Eigenschaften der Kernkräfte durch das virtuelle „Hinüberwerfen" von Elektronen und Neutrinos qualitativ erklärt, zeigte J. E. Tamm, daß die so entstehenden Kräfte wenigstens 10^{10} mal kleiner als die tatsächlich beobachteten Kernkräfte sind. Daher stellte der japanische Physiker Yukawa 1935 die Hypothese auf, daß dieser Austausch nicht durch Elektronen, sondern durch besondere Teilchen, die wir jetzt als Mesonen bezeichnen (siehe § 246), vermittelt wird. Die Mesonen müssen nach der Yukawa-Hypothese für das Feld der Kernkräfte dieselbe Rolle spielen wie die Photonen für das elektromagnetische Feld. Yukawa zeigte ferner, daß man den Mesonen zur Erklärung des kleinen Wirkungsradius der Kernkräfte eine von Null verschiedene Ruhemasse zuschreiben muß, da Felder, deren Quanten ähnlich den Photonen keine Ruhemasse besitzen, Kräfte mit weitem Wirkungsradius liefern. Die unten angeführte Rechnung zeigt, daß zur Erklärung des experimentell bekannten Wirkungsradius der Kernkräfte von $1{,}5 - 2 \cdot 10^{-13}$ cm die Ruhemasse der Kernfeldquanten (Mesonen) ungefähr gleich 200 m_e sein muß (m_e ist die Elektronenmasse).

Die Mesonen wurden also hypothetisch eingeführt; erst später wurden sie in den Höhenstrahlen entdeckt und danach auch künstlich im Laboratorium hergestellt[1]).

Yukawa zeigte, daß man das Potential der Nahwirkungskräfte des Kerns durch die Formel

$$\varphi = g_1 \frac{e^{-ar}}{r} \tag{250,1}$$

darstellen kann. Hier spielt der Parameter g_1 für die Kernwechselwirkungen dieselbe Rolle wie die elektrische Ladung e für die elektromagnetischen Wechselwirkungen. Er wird deshalb als „Mesonenladung" bezeichnet. Die potentielle Energie der Wechselwirkung zweier

[1]) Yukawa führte in seiner Hypothese die Mesonen als elektrisch neutrale Teilchen mit mittlerer Masse ein. Zuerst wurden geladene Mesonen entdeckt, und erst in neuerer Zeit (1950) wurde unbestreitbar auch die Existenz von neutralen Mesonen festgestellt.

Nukleonen mit den „Mesonenladungen" g_1 und g_2 wird deshalb

$$U = - g_2 \varphi = - g_1 g_2 \frac{e^{-ar}}{r}. \qquad (250,2)$$

Die potentielle Energie ist negativ, da die Wechselwirkung immer Anziehung ist. Das exponentielle Abfallen des Potentials φ mit der Entfernung gewährleistet ein steiles Absinken der Kernkräfte mit wachsendem r. Die Konstante a, die die Dimension cm^{-1} hat, charakterisiert die Wirkungssphäre der Kernkräfte; in der Entfernung $r = \frac{1}{a}$ sinkt das Potential auf $\frac{1}{e}$ ab. Es ist sehr wichtig, daß sich $\frac{1}{a}$ folgendermaßen durch universelle Konstanten ausdrücken läßt (man kann dies mathematisch beweisen[1]),

$$\frac{1}{a} = \frac{h}{2\pi mc},$$

d. h., $\frac{1}{a}$ ist bis auf den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ gleich der „COMPTON-Wellenlänge" des Feldes der Kernkräfte. Wenn wir $\frac{1}{a}$ dem Wirkungsradius der Kernkräfte gleich setzen, d. h. $1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm, dann erhalten wir die Mesonenmasse m zu

$$m = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-13} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \approx 230 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{g},$$

d. h., sie ist etwa 260mal größer als die Elektronenmasse. Damit wird die Bezeichnung „Mesonen" für diese Teilchen mit einer Masse, die zwischen der Protonen- und der Elektronenmasse liegt, gerechtfertigt.

Auf diese Weise kann durch den Austausch neutraler Teilchen mit einer von Null verschiedenen Ruhemasse, der Nahwirkungscharakter der Kernkräfte erklärt werden. Da ferner diese Teilchen elektrisch neutral sind, erweisen sich die Kräfte zwischen Protonen, zwischen Neutronen und die Krafte Proton—Neutron alle als gleich; das entspricht auch ungefähr den experimentellen Befunden. Da jedoch in der umrissenen Theorie die Teilchen, die die Wechselwirkung übermitteln, elektrisch neutral sind, hängt der Austausch dieser Teilchen nicht mit einem „Platzwechsel" des Protons und Neutrons zusammen. Infolgedessen haben wir es hier mit „gewöhnlichen" Kräften, d. h., nicht mit Austauschkräften zu tun, und deshalb kann man mit ihrer Hilfe nicht die Sättigung der Kernkräfte erklären.

In der Tat zeigen die verschiedenen Mesonenarten, die man in den kosmischen Strahlen und im Laboratorium untersucht hat, verschiedene Eigenschaften. Es gibt Mesonen, die eine positive oder negative elektrische Ladung tragen, es gibt auch Mesonen verschiedener Masse, die mit den Kernen verschiedenartig in Wechselwirkung treten. Zur Erklärung der Sättigung der Kernkräfte wurde angenommen, daß die Wechselwirkung durch *geladene* Mesonen hervorgerufen wird. Außerdem erscheint es auf Grund der verschiedenen Eigenschaften der schweren und leichten π- und μ-Mesonen am wahrscheinlichsten, daß gerade die $\pi^{\pm}$-Mesonen

[1]) Siehe z. B. J. I. FRENKEL: „Prinzipien der Theorie der Atomkerne", S. 98, (Я. И. Френкел: „Принципы теории атомных ядер". АН СССР 1950); vgl. auch: L. ROSENFELD: „Nuclear Forces", p. 12, Amsterdam, North-Holland, Publishing-Comp., 1948.

die „Übermittler“ der Wechselwirkung sind. Für die Nukleonen sind folgende Reaktionen möglich:

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^-, \quad \pi^- + p_2 = n_2$$

oder auch

$$p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+, \quad \pi^+ + n_2 \rightarrow p_2.$$

So erweist sich das Proton auf dem Platz des Neutrons und das Neutron auf dem Platz des Protons, d. h., es findet ein Platzaustausch statt. Die dabei entstehenden Kräfte sind Austauschkräfte; sie besitzen Sättigungseigenschaften.

Die Theorie der geladenen Mesonen erklärt auch das Auftreten eines magnetischen Moments beim Neutron und die anomale Größe des magnetischen Moments des Protons. Da man Proton und Neutron als verschiedene Quantenzustände eines Kernteilchens, des Nukleons, betrachtet, muß der Zustand dieses Nukleons überhaupt eine Superposition beider Zustände sein. Das bedeutet, daß das Nukleon, welches wir als „Neutron“ bezeichnen, den größten Teil der Zeit im Zustand des „idealen“ Neutrons mit der Ladung 0 und dem magnetischen Moment 0 verbringt. Für kurze Zeit sieht es aber so aus, als ob es sich in ein „ideales“ Proton mit einem magnetischen Moment, das dem Kernmagneton gleich ist, und ein negatives Meson aufspaltet und sich dann wieder in ein ideales Neutron verwandelt:

$$n \rightleftarrows p + \pi^-.$$

Da die Masse des π-Mesons bedeutend kleiner als die des Protons ist, wird sein magnetisches Moment entsprechend größer als das magnetische Moment des „idealen“ Protons sein, und wegen des negativen Vorzeichens der elektrischen Ladung des π^--Mesons sind die beiden magnetischen Momente antiparallel gerichtet. Das π^--Meson teilt also gewissermaßen dem Neutron einen Teil seines magnetischen Moments mit; da sein Moment größer als das Moment des Protons und diesem entgegengerichtet ist, wird das resultierende Moment des Neutrons von Null verschieden sein und negatives Vorzeichen haben. Entsprechend gilt für das Nukleon, das wir „Proton“ nennen, die Reaktion

$$p \rightleftarrows n + \pi^+.$$

Folglich wird das magnetische Moment des Protons während der Zeit, in welcher es sich im gespalteten Zustand befindet, völlig durch das bedeutend größere magnetische Moment des π^+-Mesons bestimmt und hat positives Vorzeichen; während der ganzen übrigen Zeit ist das magnetische Moment des „idealen“ Protons gleich 1. Hierdurch wird es verständlich, weshalb das Proton ein magnetisches Moment besitzt, das größer als ein Kernmagneton ist. Wenn der Zeitraum, in dem sich das Nukleon im gespaltenen Zustand befindet, für das Proton und Neutron gleich ist, muß der Unterschied ihrer magnetischen Momente, wie man leicht sieht, gleich 1 sein; das entspricht gerade ungefähr dem beobachteten Wert.

In letzter Zeit wurden einige Tatsachen festgestellt, die man als experimentelle Bestätigung des Austauschcharakters der Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen ansehen kann. Es zeigte sich nämlich bei der Streuung von Neutronen mit einer Energie von 90 MeV, daß im Strahl nach dem Durchgang der Streusubstanz Protonen auftraten, die sich hauptsächlich vorwärts bewegten und eine Energie von ebenfalls 90 MeV besaßen. Diese Protonen konnten nicht durch Wechselwirkung mit gewöhnlichen Kräften herausgeschlagen worden sein, da das Proton in diesem Falle eine Energie von der Tiefe des Potentialtopfes, d. h. $\sim$ 10 MeV, erlangen müßte. Wenn es jedoch Austauschkräfte gibt

kann sich das Neutron „unterwegs“ in ein Proton verwandeln und seine Bewegung mit der gleichen Energie fortsetzen, während das Proton, an dem das schnelle Neutron vorbeiflog, im Kern mit einer Energie von der Größenordnung 10 MeV zurückbleibt.

Es wurde auch das umgekehrte Experiment ausgeführt; Protonen mit einer Energie von $\sim$ 400 MeV wurden an Neutronen gestreut. Dabei wurden Neutronen mit einer Energie bis zu 350 MeV beobachtet, die hauptsächlich vorwärts flogen. Diese Neutronen konnten nur durch Umwandlung von Protonen bei ihrer Wechselwirkung mit Kernneutronen entstehen.

Als Ergebnis dieses Paragraphen stellen wir fest, daß die Mesonentheorie der Kernkräfte eine beträchtliche Anzahl von Tatsachen qualitativ erklärt. Anscheinend existieren zwei Typen von Kräften: gewöhnliche, die beim Austausch neutraler Mesonen entstehen, und Austauschkräfte, die beim Austausch von $\pm$-Mesonen (π-Mesonen) entstehen. Eine quantitative Theorie befindet sich noch am Anfang ihrer Entwicklung.

XIX. EXPERIMENTELLE METHODEN DER KERNPHYSIK

In diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten experimentellen Methoden kennenlernen, die bei den verschiedensten Untersuchungen von Kernprozessen angewandt werden. Zu Beginn betrachten wir die Zählmethoden für einzelne Teilchen, danach beschreiben wir Teilchenbeschleuniger, die bei der Untersuchung von Kernreaktionen benutzt werden.

A. Zähl- und Beobachtungsmethoden für schnelle Teilchen

Bei der Untersuchung von Prozessen, die in Atomkernen vor sich gehen, hat man es meist mit Teilchen zu tun, die eine sehr große Energie besitzen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, Elementarprozesse zu beobachten, an denen einzelne Kerne teilnehmen, während die gewöhnlichen experimentellen Methoden der Physik ein statistisches Resultat von sehr vielen Elementarprozessen liefern.

§ 251. Methoden zur Teilchenzählung

1. *Der* GEIGER-MÜLLER-*Zähler.* Eine sehr umfassende Anwendung haben in der Kernphysik die Zählrohre von GEIGER-MÜLLER erfahren. Das GEIGER-MÜLLER-Zählrohr ist ein Ionisationsgerät, das auf einer Art „innerer Verstärkung" schwacher primärer Ionisationsprozesse beruht. Das Schema des Zählers ist in Abb. 310 dargestellt. Er stellt einen zylindrischen Kondensator dar. Die zentrale Elektrode, die gewöhnlich als Anode dient, ist ein feiner Draht, deren Radius einige hundertstel Millimeter beträgt. Die Kathode ist ein metallischer Zylinder mit einem Radius von etwa 1 cm. Der Zähler befindet sich in einer ausgepumpten Hülle, die mit verschiedenen Gasen, meist unter niedrigem Druck, gefüllt werden kann. Wenn man den Radius des Drahtes mit a, den des Zylinders mit b und die Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder mit V bezeichnet, dann ist der Potentialgradient, d. h. die Feldstärke $\mathfrak{E}$ in der Entfernung r von der Zählerachse ($a < r < b$)

$$\mathfrak{E} = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} .$$

Es sei z. B. $V = 1000$ Volt, $a = 4 \cdot 10^{-3}$ cm, $b = 1$ cm. Dann ist die Feldstärke am Zylinder ($r = 1$ cm) 181 Volt cm^{-1} und am Draht ($r = 4 \cdot 10^{-3}$ cm) $\mathfrak{E} = 4{,}52 \cdot 10^4$ Volt cm^{-1}. Man sieht aus dieser einfachen Rechnung, daß die Feldstärke am Draht, wenn dieser genügend dünn ist, bei verhältnismäßig kleinen Potentialdifferenzen zwischen ihm und dem Zylinder so große Werte annehmen kann, daß durch Stoßionisation in der Nähe des Drahtes neue Elektronen und Ionen auftreten können.

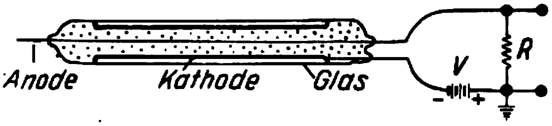


Abb. 310. GEIGER-MÜLLER-Zähler

Die Arbeitsweise des Zählers hängt in starkem Maße von der Potentialdifferenz V zwischen Draht und Zylinder ab. In Abhängigkeit von der Größe V arbeitet der Zähler entweder als gewöhnliche Ionisationskammer oder als sogenannter „Proportionalzähler" oder als eigentlicher Geiger-Müller-Zähler.

Stellen wir uns vor, daß durch die Einwirkung irgendeines ionisierenden Agens (schnelle geladene Teilchen oder kurzwellige Strahlung) im Innern des Zählers eine bestimmte Anzahl von Ionenpaaren entstanden sei. Wenn wir die Spannung allmählich vergrößern, wächst der Ionisationsstrom anfangs linear, dann aber nicht mehr so schnell, und schließlich hängt er nicht mehr von der Spannung ab (Sättigungsstrom, Abb. 311, Gebiet 0 — V_p). Die Stärke dieses Sättigungsstromes ist ein Maß für die Anzahl der entstandenen Ionenpaare. Offensichtlich ist ein Zähler, der mit einer Spannung arbeitet, die unter V_p liegt, eine gewöhnliche Ionisationskammer.

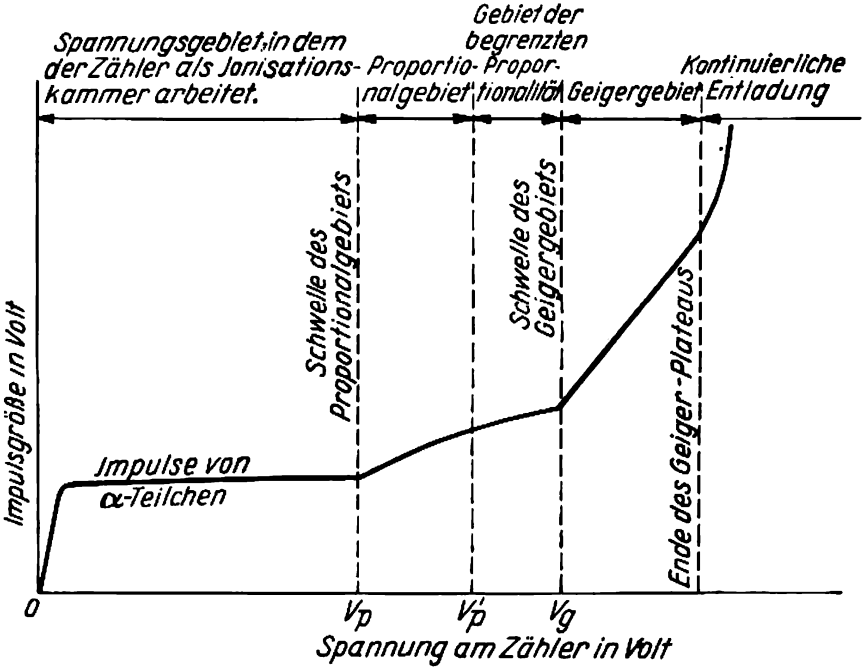


Abb. 311. Charakteristiken des Geiger-Müller-Zählers

Bei einer Spannung, die größer ist als V_p, beginnt die Stoßionisation, die ein Anwachsen der Ionenzahlen hervorruft. Wenn jedes Elektron auf dem Wege zum Draht durch Stoßionisation A neue Elektronen erzeugt, dann nennt man A den Koeffizienten der Gasverstärkung; er kann 10^7 erreichen. Im Spannungsgebiet von V_p bis V'_p hängt der Koeffizient der Gasverstärkung A nicht von der Anzahl der primär entstehenden Ionen ab. Wenn der primäre Ionisator n Ionenpaare liefert, ist der Strom deshalb wegen der Gasverstärkung n proportional und folglich auch der Anzahl der primären Ionenpaare. Ein Zähler, der in dieser Weise

arbeitet, heißt *Proportionalzähler*. Er erlaubt z. B., die Impulse von α- und β-Teilchen zu unterscheiden.

Wenn die Spannung weiter gesteigert wird, beobachtet man eine Abhängigkeit des A von der Stärke des Ionisators. Je mehr Ionenpaare das Primärteilchen erzeugt, um so kleiner wird A. Von einer gewissen kritischen Spannung V_g an werden die Impulse von Teilchen mit verschiedenen Ionisationsvermögen gleich. Ein Gerät, das in dieser Weise arbeitet, wirkt eigentlich schon als GEIGER-MÜLLER-Zähler. Der Verstärkungskoeffizient wächst dabei stark an, jedoch geht die Unterscheidungsmöglichkeit zwischen den ionisierenden primären Teilchen verloren.

Die Vorgänge im GEIGER-MÜLLER-Zähler sind ziemlich kompliziert[1]); sie beruhen im wesentlichen auf folgenden Prinzipien: Die Elektronen, die eine sehr große Beweglichkeit besitzen, befinden sich in ungefähr $10^{-7} - 10^{-8}$ sec bereits in der Nähe des Drahtes. Dort werden sie wegen des hohen Potentialgradienten so stark beschleunigt, daß sie unterwegs durch Stoßionisation neue Elektronen und Ionen und schließlich eine Lawine erzeugen. Eine wichtige Rolle spielt dabei auch die photoelektrische Auslösung von Elektronen an den Wänden des Zählers unter dem Einfluß ultravioletter Strahlung der angeregten Gasatome, die durch Stöße schneller Elektronen oder bei der Rekombination positiver Ionen und Elektronen entstehen.

Die positiven Ionen bleiben in einem Zeitraum von $10^{-7} - 10^{-8}$ sec, währenddessen sich die Lawine entwickelt, praktisch am gleichen Ort. Sie bilden in der Nähe des Drahtes eine positive Raumladungswolke, die den Potentialgradienten am Draht schließlich so stark schwächt, daß sich die Lawine nicht weiter entwickeln kann. Die positiven Ionen bewegen sich langsam auf den Zylinder (Kathode) zu. Sie neutralisieren sich an seinen Wänden, und die Entladung wird unterbrochen.

Für ein gutes Arbeiten des Zählers ist die Geschwindigkeit, mit der die Entladung erlischt, wichtig. Bei den sogenannten nicht selbstlöschenden Zählern wird die Löschung durch einen mit dem Draht in Reihe geschalteten hochohmigen Widerstand R (Abb. 310) von der Größenordnung $10^8 - 10^9\,\Omega$ erzielt. Der Spannungsabfall an diesem Widerstand verringert die Potentialdifferenz zwischen dem Draht und dem Zylinder und verhindert die weitere Entwicklung der Entladung. Wenn dieser Löschwiderstand angeschlossen ist, fällt das Potential der Raumladung nach dem Exponentialgesetz $e^{-t/RC}$, d. h., nach RC Sekunden ist es auf den e-ten Teil gesunken; C ist die verteilte Kapazität der gesamten Schaltung. Für $R \sim 10^8\,\Omega$ und $C \sim 10^{-11}$ Farad ist $RC \approx 10^{-3}$ sec. Dies ist die charakteristische Zeitkonstante des Zählers.

Von ihrer Größe hängt das „Auflösungsvermögen" des Zählers ab, d. h. seine Fähigkeit, schnell aufeinanderfolgende Teilchen einzeln anzuzeigen. Tatsächlich, ein neues Teilchen, das zu einem Zeitpunkt in den Zähler einfällt, zu dem die Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder ihren ursprünglichen Wert noch nicht erreicht hat, ruft keine Lawine und keine Entladung hervor („Totzeit").

Die Anwendung von Löschwiderständen verschlechtert jedoch die Arbeit des Zählers in anderen Beziehungen. Deshalb benutzt man heute zur Löschung spezielle „Löschkreise". Man verwendet auch „selbstlöschende" Zähler. Diese sind mit einem Gas gefüllt, das

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung der Wirkungsweise der Zähler findet man bei W. WEKSLER, L. GROSCHEW und B. ISSAJEW: „Ionisationsmethoden für Strahlungsuntersuchungen". (В. Векслер, Л. Грошев, Б. Исаев: „Ионизационные методы исследования излучений", Гостехиздат, 1950) und auch bei E. KOHLRAUSCH: „Praktische Physik", Bd. II, S. 462 ff. und dortige Zitate, Verlag Teubner, Leipzig, 1944.

aus komplizierten Molekülen besteht, z. B. einem Gemisch aus Argon und Alkoholdampf. Der Alkoholdampf besorgt die Löschung der Entladung. Dieser Vorgang wird folgendermaßen erklärt: Die Alkoholmoleküle absorbieren die ultraviolette Strahlung, die von den angeregten Argonatomen ausgestrahlt wird. Da komplizierte Moleküle die Fähigkeit haben, die Anregungsenergie auf eine große Anzahl von Freiheitsgrade zu verteilen, verwandeln sie die Energie der Elektronenanregung mit großer Wahrscheinlichkeit in Energie der Kernschwingungen. Dadurch wird die Zahl der photoelektrisch erzeugten Elektronen stark verringert; die Entladung erlischt daher schnell.

Früher benutzte man als Meßinstrumente am Ausgang des Zählers Fadenelektrometer, die eine geringe Trägheit haben. Heute wendet man gewöhnlich Verstärker an, die weitgehend vervollkommnet sind. Am Ausgang des Zählers befindet sich gewöhnlich kein Meßinstrument, sondern ein mechanisches Zählwerk, das die Zahl der Impulse automatisch registriert. Zur Registrierung sehr schnell aufeinanderfolgender Teilchen wendet man sogenannte Untersetzer an; diese setzen die Zählgeschwindigkeit um einen bestimmten Faktor herab.

Für viele experimentelle Arbeiten haben sogenannte Koinzidenzschaltungen große Bedeutung, die nur dann ansprechen, wenn ein Teilchen gleichzeitig durch zwei oder mehr Zählrohre hindurchgeht. Es gibt verschiedene Schaltungen dieser Art. Als Beispiel wollen wir nur eine von ihnen beschreiben. Am Gitter der Ausgangsröhre T (Abb. 312) liegt eine

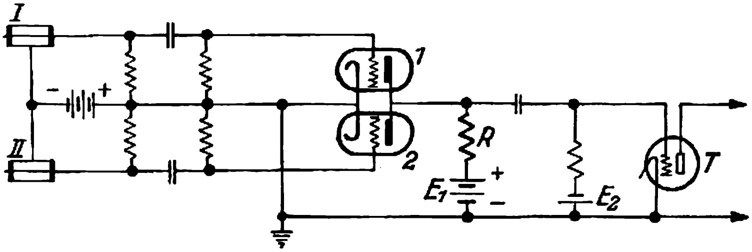


Abb. 312. Beispiel einer Koinzidenzschaltung

negative Spannung der Batterie E_2, die den Anodenstrom sperrt. Wenn durch das eine Zählrohr, z. B. I, ein schnelles Teilchen fliegt, lädt sich der Draht dieses Zählrohres augenblicklich bis zu einem bestimmten Betrag negativ auf. Dadurch wird auch das Gitter der Röhre 1 geladen und der Strom unterbrochen. Diese Änderung wirkt sich jedoch nur wenig auf den Betriebszustand der Ausgangsröhre aus, da in den Stromkreis der Röhren 1 und 2 ein hoher Widerstand R eingeschaltet ist. Da durch die Röhre 2 noch Strom fließt, fällt an diesem Widerstand fast die gesamte Spannung der Batterie E_1 ab. Wenn jedoch das Teilchen durch beide Zählrohre geht, wird der Strom in den beiden Röhren 1 und 2 unterbrochen, der Stromkreis der Batterie E_1 ist offen, und diese Batterie lädt das Gitter der Ausgangsröhre T positiv auf. In dieser fließt deshalb ein Strom, der das Zählwerk in Bewegung setzt.

In bestimmten Fällen wendet man „Antikoinzidenzschaltungen" an. Diese sprechen an, wenn ein Zählrohr nicht arbeitet, während die anderen in Tätigkeit sind.

Die Beschreibung dieser Schaltungen, wie überhaupt komplizierter radio-technischer Geräte, die in der modernen Kernphysik angewendet werden, sind in speziellen Handbüchern und Monographien zu finden[1]).

Die Geiger-Müller-Zähler können sowohl zur Zählung schwerer Teilchen (α-Teilchen, Protonen) als auch leichter Teilchen (β-Teilchen) benutzt werden. Man kann sie auch zur Zählung von γ-Quanten anwenden. In diesem Fall erfolgt die primäre Ionisation durch das Elektron, das durch das γ-Quant aus der Wand des Zählrohres herausgerissen wird.

2. *Die kleine Ionisationskammer.* Zur Zählung schwerer Teilchen benutzt man mit großem Erfolg kleine Ionisationskammern. Ihre Konstruktion ist in Abb. 313 dargestellt. Die zu untersuchenden Teilchen gelangen durch das Fenster *W* (Glimmerblättchen, das mit einer sehr dünnen, durch Zerstäubung hergestellten Goldschicht bedeckt ist) in das Innere der Kammer. Die dort entstehenden negativen Ionen sammeln sich wegen der angelegten Spannung V (etwa 240 V) auf dem Kollektor *C*. Die Entfernung des Kollektors vom Fenster beträgt 2 bis 15 mm. Das negative Potential des Kollektors wird dem Gitter der ersten Verstärkerröhre *T* mitgeteilt; danach wird der entstandene Impuls noch durch einen Linearverstärker spezieller Konstruktion verstärkt. Man erhält somit beim Durchgang eines Teilchens durch die Kammer am Ausgang einen Spannungsimpuls bis zu 100 V. Diesen Impuls kann man mit einem Oszillographen, der eine sehr kurze Eigenschwingungsdauer (5000 Hz) hat, registrieren. Die Auslenkungen des Oszillographen werden photo-

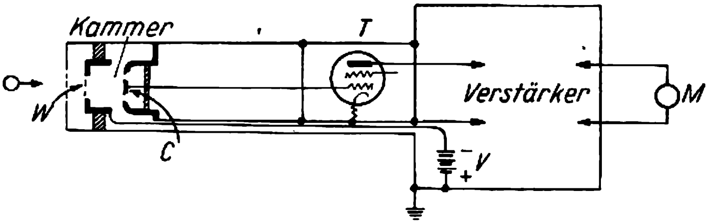


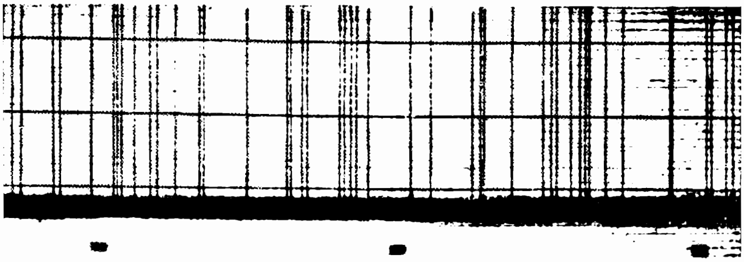
Abb. 313. Die kleine Ionisationskammer mit Verstärker

graphisch auf einem abrollenden Film registriert. Durch die besondere Konstruktion des Verstärkers ist die Länge der entstehenden Striche der Anzahl der in der Kammer entstehenden Ionen proportional; dadurch kann man die Teilchen nach den Aufzeichnungen unterscheiden. In Abb. 314 sind als Beispiel drei Aufzeichnungen wiedergegeben. Die vertikalen Linien sind die aufgezeichneten Auslenkungen des Oszillographenspiegels. Die in 1 mm Abstand aufeinanderfolgenden horizontalen Linien dienen zur leichteren Ausmessung der Länge der vertikalen Striche. Die schwarzen Rechtecke sind Zeitmarken, die jeweils nach einer Minute gesetzt werden. Jede vertikale Linie der Abb. 314a entspricht dem Durchgang eines Teilchens durch die Kammer; hier fielen α-Teilchen mit nahezu gleicher Energie und gleicher Richtung in die Kammer ein. Wir sehen, daß tatsächlich alle Linien annähernd gleichlang sind. Die Aufzeichnung 314b entspricht Protonen

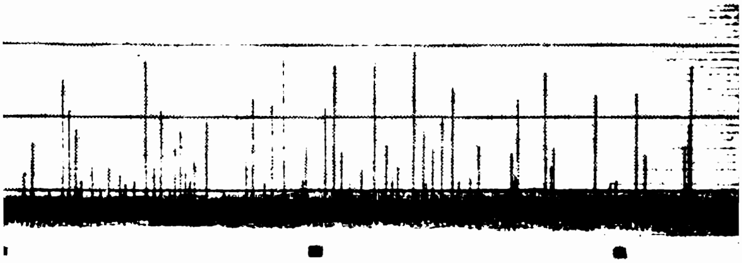
[1]) Siehe z. B. A. M. Bontsch-Brujewitsch: „Anwendung von Elektronenröhren in der Experimentalphysik", Kap. VIII, (А. М. Бонч-Бруевич: „Применение электоронных ламп в экспериментальной физике, Гостехиздат, 1950) und A. Korff: „Electron and Nuclear Counters. Theory and Use", New York, 1946.

ıer Energie: hier unterscheiden sich auch die Längen der Striche von
4c sind schließlich verschiedenartige Teilchen mit ungleichen Energien
ıtößen herrühren, registriert worden. Hier unterscheiden sich die Lä
r stark.

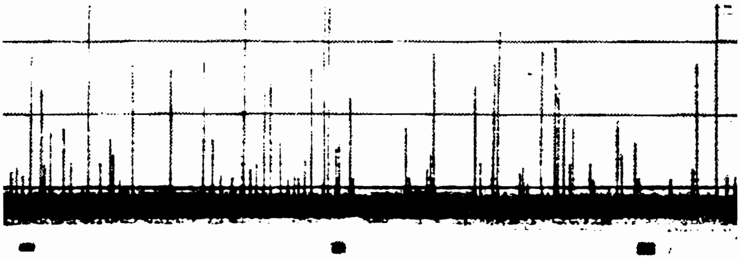
ıe Vorteil der Ionisationskammer im Vergleich zum Zählrohr besteht d
ıf γ-Strahlen reagiert und deshalb die Teilchenzählung frei von einem
der durch γ-Strahlen hervorgerufen wird.



a



b



c

Beispiele der Aufzeichnung einzelner Teilchen: *a* — *a*-Teilchen mit fa
gkeit; *b* — Protonen mit verschiedenen Geschwindigkeiten; *c* — verschi
Teilchen, die durch Neutronenstöße ausgelöst wurden.

3. *Kristallzähler.* Zur Zählung schneller ionisierender Teilchen wendet man auch Kristallzähler an. Einen Kristallzähler stellt ein Kristall dar, an den eine Spannung gelegt wird. Beim Durchgang eines ionisierenden Teilchens steigt die Leitfähigkeit des Kristalls stark an, und der entstehende Impuls kann in der üblichen Weise registriert werden. Als Kristalle können Silberchlorid, Diamant und einige andere verwendet werden. Bei all diesen Kristallen wächst die Leitfähigkeit auch bei Lichtbestrahlung an — sie besitzen wegen des inneren Photoeffekts eine Photoleitfähigkeit. Der Mechanismus, nach dem sich das Anwachsen der Leitfähigkeit unter dem Einfluß ionisierender Teilchen vollzieht, ist der gleiche wie bei der Photoleitfähigkeit.

Der Vorzug der Kristallzähler ist ihr einfacher Aufbau, das schnelle Anwachsen des Impulses und das Fehlen einer „Totzeit".

4. *Szintillationszählung.* Die älteste und einfachste Methode, die es ermöglicht, schnelle Teilchen zu zählen, ist die visuelle Methode des Zählens der Szintillationen.

Die einfachste Ausführung dieses Verfahrens ist als CROOKESsches Spinthariskop weit bekannt. Ein Zinksulfidschirm, der von schnellen Teilchen bestrahlt wird (im Spinthariskop von α-Teilchen), wird unter dem Mikroskop betrachtet, und man zählt die Lichtblitze, die durch die Stöße der einzelnen Teilchen hervorgerufen werden. Diese Methode wurde mit sehr großem Erfolg in den ersten Jahren der Entwicklung der Kernphysik angewandt; mit ihrer Hilfe wurden zuerst künstliche Umwandlungen von Atomkernen unter Einwirkung von α-Strahlen entdeckt und untersucht.

Obwohl dieses Verfahren sehr einfach zu sein scheint, ist es in Wirklichkeit doch sehr schwierig. Das menschliche Auge besitzt eine außerordentlich hohe Empfindlichkeit (siehe Teil I, § 115). Diese hohe Empfindlichkeit wird jedoch nur unter besonders günstigen Bedingungen erreicht, und bei Ermüdung des Beobachters fällt sie schnell ab. Überhaupt spielten die subjektiven Bedingungen bei dieser Methode eine wichtige Rolle, und wegen der starken Ermüdung, die durch das Zählen schwacher Szintillationen eintritt, war die Möglichkeit, langdauernde Experimente auszuführen, äußerst beschränkt. Aus all diesen Gründen wurde die visuelle Szintillationsmethode völlig durch andere Zählmethoden verdrängt.

In den letzten Jahren wurde jedoch die Szintillationsmethode in einer neuen, objektiven Form wieder aufgegriffen: die auf dem Fluoreszenzschirm hervorgerufenen Szintillationen werden nicht mit dem Auge, sondern mit einem hochempfindlichen photoelektrischen Gerät, dem Photoelektronen-Vervielfacher[1]) registriert. Der letztere ist ein Vakuumphotoelement, in dem außer einer empfindlichen Photokathode mehrere zusätzliche Elektroden (gewöhnlich 12 bis 14) untergebracht sind. An diese Elektroden wird ein Potential gelegt, das die Elektronen beschleunigt (etwa 100 V für jedes Elektrodenpaar). Die Elektronen, die durch Licht aus der Photokathode ausgelöst werden, fliegen auf die erste zusätzliche Kathode zu, wo sie einige neue Elektronen auslösen. Die letzteren gelangen an die zweite zusätzliche Kathode und setzen dort neue Elektronen frei usw. Man erhält auf diese Weise schon im Innern des Vervielfachers eine etwa 10^6- bis 10^7fache Verstärkung. Außerdem kann die Spannung, die am Ausgang des Vervielfachers entsteht, noch durch einen Röhrenverstärker verstärkt werden. Als lumineszierenden Stoff verwendet man meist Kristalle organischer Substanzen — Naphthalin, Anthrazen, Phenanthren und einige andere. Die Anwendung dieser Kristalle ist in zweierlei Hinsicht günstig: erstens liefern sie eine blaue Fluoreszenz, für die die Kathoden der Vervielfacher besonders empfindlich sind

[1]) Der Photoelektronen-Vervielfacher wurde von dem sowjetischen Ingenieur L. A. KUBEZKI entwickelt.

(gewöhnlich Cäsium-Antimon-Kathoden); zweitens sind sie für ihr eigenes Fluoreszenzlicht praktisch vollkommen durchsichtig, so daß man Kristalle beträchtlicher Dicke verwenden und dabei das Fluoreszenzlicht ausnutzen kann, das auf dem ganzen Wege des ionisierenden Teilchens erzeugt wird. Es stellte sich heraus, daß man an Stelle großer Kristalle, deren Herstellung gewisse Schwierigkeiten bereitet, Lösungen dieser organischen Substanzen verwenden kann.

Die Lumineszenzzähler haben sogar den GEIGER-MÜLLER-Zählern gegenüber eine Reihe von Vorteilen. Insbesondere ist das Auflösungsvermögen der Lumineszenzzähler, da der Photoeffekt trägheitslos verläuft, größer als bei den GEIGER-MÜLLER-Zählrohren.

§ 252. Die photographische Aufnahme der Bahnen schneller Teilchen

Die Anzeige von Neutronen

1. *Die* WILSON-*Kammer.* Die WILSON-Kammer (oder Nebelkammer) ist eines der wichtigsten Hilfsmittel des Experimentators auf dem Gebiet der Kernphysik. Sie beruht auf einer Erscheinung, die von CH. TH. R. WILSON entdeckt wurde und im folgenden beschrieben wird. Es war schon lange bekannt, daß zur Nebelbildung in einem mit Dampf übersättigten Raum bestimmte Bedingungen vorhanden sein müssen. So wurde z. B. in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts von einer Reihe Forschern gezeigt, daß zur Nebelbildung durch eine kleine adiabatische Expansion feuchter Luft unbedingt Staub in der Luft enthalten

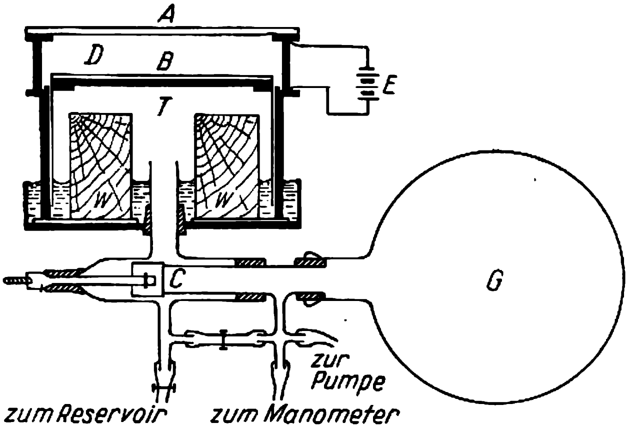


Abb. 315. Eine frühe Konstruktion der WILSON-Kammer

sein muß. Jedes Staubkörnchen dient als Kondensationszentrum eines Tröpfchens. Die Notwendigkeit solcher „Keime" hängt mit den thermodynamischen Bedingungen für die Bildung eines Tropfens endlicher Größe zusammen. WILSON hat nun nachgewiesen, daß Gasionen bei bestimmten Bedingungen in staubfreier Luft diese Rolle der Nebelkeime übernehmen können. Wird die Übersättigung durch eine plötzliche adiabatische Expansion feuchter Luft hervorgerufen, so ist bis zu dem Zeitpunkt, an dem das Verhältnis der Volumina $\frac{V_2}{V_1}$ nach und vor der Expansion kleiner als 1,25 ist, keine Nebelbildung zu beobach-

ten, wenn kein Staub vorhanden ist. Für $\frac{V_2}{V_1} > 1{,}25$ erscheinen einzelne Tropfen, wobei für

$$1{,}25 < \frac{V_2}{V_1} < 1{,}31$$

negative Ionen und für $\frac{V_2}{V_1} > 1{,}31$ positive Ionen als Kondensationskerne dienen. Für $\frac{V_2}{V_1} > 1{,}38$ entsteht schließlich wieder ein dichter Nebel.

Die Wilson-Kammer beruht auf diesen Kondensationseigenschaften der Dämpfe. Die ursprüngliche Konstruktion der Wilson-Kammer ist in Abb. 315 angegeben. Die Kammer hat die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser von 16,5 cm und einer Höhe von 3,4 cm. Durch Öffnen des Hahnes C wird der Raum T unter dem Kolben B mit dem ausgepumpten Reservoir G verbunden. Dadurch wird der Raum D plötzlich expandiert, was, entsprechend dem thermodynamischen Gesetz

$$Tv^{k-1} = \text{const},$$

zu einer Erniedrigung der Temperatur führt $\left(k = \frac{c_p}{c_v}\right)$. Wenn dabei kein Staub und keine Ionen vorhanden sind, tritt die Kondensation nicht ein, und der Raum D ist mit Dampf übersättigt. Zur Entfernung der in der Kammer bereits enthaltenen Ionen wird vor der Expansion an die Kammer eine Spannung von der Batterie E angelegt. Wenn unmittelbar nach der Expansion ein ionisierendes Teilchen durch die Kammer fliegt, kann man bei entsprechender Beleuchtung die Bahn des Teilchens als schmalen Nebelstreifen sehen.

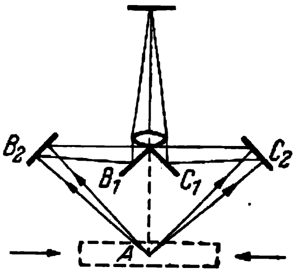


Abb. 316. Anordnug zur Stereoaufnahme von Teilchenspuren mit einem Objektiv

Diese ursprüngliche Konstruktion erlebte in der Folgezeit zahlreiche Modifikationen und Verbesserungen. Es wurden Kammern mit ununterbrochener Bewegung des Kolbens konstruiert. In letzter Zeit hat man Kammern hergestellt, die automatisch von Zählrohren gesteuert werden, d. h., sie werden nur dann expandiert, wenn durch die Kammer ein ionisierendes Teilchen fliegt, das die Kammer mit Hilfe von Zählrohren und Relais selbst auslöst. Außerdem hat man die Konstruktion der Kammer noch anderweitig abgeändert und vervollkommnet[1]). Als „Arbeitsstoff" verwendet man in der Kammer Wasser-, Äthylalkohol- oder Methylalkoholdampf oder Dampfgemische dieser Stoffe.

[1]) Siehe W. Wekslee, L. Groschew u. N. Dobrotin: „Experimentelle Methoden der Kernphysik". (В. Векслер, Л. Грошев и Н. Добротин: Экспериментальные методы ядерной физики, АН СССР 1940) und F. Kohlrausch: „Praktische Physik" II, S. 469 ff. und dortige Zitate; Verlag Teubner, Leipzig.

Die Spuren der Flugbahnen werden gewöhnlich photographiert. Um die Untersuchung der räumlichen Lage der Bahnen zu ermöglichen, wird entweder mit einer Stereokamera mit zwei Objektiven oder mit einem Objektiv gleichzeitig in zwei verschiedenen Richtungen photographiert. Das Prinzip dieser häufig angewandten Methode ist aus Abb. 316 ersichtlich. Mit Hilfe der Spiegel C_1 und C_2, B_1 und B_2, die senkrecht zueinander und unter einem Winkel von 45° zur Kameraebene A stehen, wird in zwei zueinander senkrecht stehenden Richtungen photographiert. Die auf diese Weise erhaltenen Bilderpaare werden dann nach einer besonderen Methode, auf die wir hier nicht eingehen können[1]), ausgewertet.

2. *Die photographische Methode.* In letzter Zeit macht man immer häufiger von einer anderen Methode zur Registrierung der Bahnen schneller Teilchen Gebrauch, die in mancher Hinsicht Vorteile gegenüber der Wilson-Kammer bietet. Man hat festgestellt, daß streifend in eine Photoplatte einfallende α-Teilchen auf ihrem Wege durch die Emulsion die getroffenen Emulsionskörner entwicklungsfähig machen. Die Spuren der α-Teilchen werden nach der Entwicklung bei der Betrachtung unter dem Mikroskop mit einer Vergrößerung von einigen Hundertmal sichtbar. Da sich die α-Teilchen dabei in einem stark absorbierenden Medium bewegen, ist ihr Weg sehr kurz (20 — 50 μ). Die Dicke der gewöhnlichen Photoemulsion beträgt etwa 20 μ. Zur Erweiterung der Anwendungsmöglichkeiten dieser Methode schlug deshalb L. W. Mysowski vor, besondere dickschichtige Photoplatten mit einer Schichtdicke von 50 μ zu verwenden. Mysowski und seine Mitarbeiter zeigten, daß man auf diese Weise auch α-Teilchen registrieren kann, die nicht streifend einfallen. Um die weitere Entwicklung der Photoplattenmethode hat sich A. P. Shdanow sehr verdient gemacht. Er arbeitete ein Verfahren zur Herstellung feinkörniger Emulsionen aus, die zur Registrierung von Protonen geeignet sind und erzielte ausgezeichnete Photographien der Vielfachspaltung von Kernen durch kosmische Strahlen.

Heute werden Spezialphotoplatten für Kernuntersuchungen fabrikmäßig hergestellt. Diese Platten zeichnen sich gegenüber den gewöhnlichen vor allem durch ihre hohe Konzentration an Silberhalogenidkörnern aus. Diese Konzentration ist bei Kernplatten etwa zehnmal so groß wie bei gewöhnlichen Platten. Außerdem ist die Schichtdicke der für die Kernforschung benutzten Platten ungewöhnlich groß (man geht in einigen Fällen bis 100 μ). Es werden Plattensorten mit verschiedenen Empfindlichkeiten und größerer oder kleinerer Korngröße hergestellt. Mit diesen Platten kann man α-Teilchen, Protonen, Deuteronen, Mesonen und Splitter, die bei der Spaltung schwerer Kerne entstehen, registrieren. Vor kurzem wurden Platten entwickelt, mit denen man Spuren einzelner Elektronen registrieren kann.

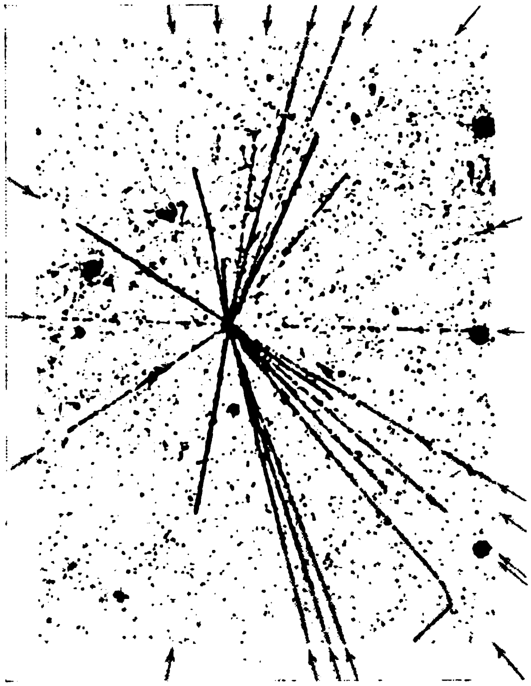
In Abb. 317 sind zwei Photographien von Kernprozessen wiedergegeben, die mit besonderen Kernemulsionen aufgenommen wurden.

Da die Reichweiten der Teilchen in dichten Emulsionen sehr klein sind, wertet man die Platten nach der Entwicklung unter dem Mikroskop aus; von den gefundenen Spuren fertigt man Mikrophotographien an. In einigen Fällen genügt zu diesem Zweck schon eine geringe Vergrößerung. Meist muß man aber Mikroskopobjektive mit Ölimmersion benutzen, um ein hohes Auflösungsvermögen zu erreichen. Diese Objektive besitzen jedoch eine sehr geringe Tiefenschärfe, so daß man nur dann auf die ganze die Emulsion durchsetzende Spur einstellen kann, wenn sie zufällig in einer zur Schicht parallelen Ebene liegt. Wenn jedoch die Spur irgendwie geneigt ist, muß man Mikrophotographien von ein-

[1]) Siehe W. Weksler, L. Groschew und N. Dobrotin: „Experimentelle Methoden der Kernphysik", S. 259 ff.

›hnitten der Emulsion anfertigen und dann daraus ein „Mosaik“ zusam
lie Spur in ihrer ganzen Ausdehnung zeigt. Man findet Beispiele dera
Kapitel XXIV.

a



b

Abb. 317. Aufnahmen von Kernprozessen mit Hilfe di
schichtiger Emulsionen: *a* — Streuung eines Protons
einen großen Winkel. Das Proton bewegte sich in
Richtung des Pfeils und wurde nach der Streuung du
einen Silber- oder Bromkern um einen Winkel von 1
abgelenkt; *b* — Kernzertrümmerung

chweis von Neutronen. Die in diesem Paragraphen betrachteten Zähl-
thoden für schnelle Teilchen können unmittelbar auf geladene Teilchen –
ɜronen und α-Teilchen, angewandt werden. Ein besonderes Problem is
n Neutronen. Die Neutronen besitzen keine Ladung und rufen keine Ionis
unmittelbare Beobachtung mit den beschriebenen Methoden ist deshalb
n Nachweis von Neutronen dienen indirekte Methoden; man registrier
Hierher gehören a) Rückstoßkerne, die bei elastischer Neutronenstreuung
Kernreaktionen, die von Neutronen hervorgerufen werden und speziell
künstlich-radioaktiver Kerne unter der Einwirkung von Neutronen.

a) Bei der elastischen Neutronenstreuung erleiden die streuenden Kerne einen Rückstoß, durch den sie eine große Energie erhalten, wenn das betrachtete Neutron ein schnelles ist, d. h., wenn es eine Energie von der Größenordnung 1 MeV besitzt. Diese Rückstoßkerne kann man z. B. in der WILSON-Kammer an ihren Nebelspuren erkennen. Die Rückstoßkerne erlauben auch die Neutronen mit Hilfe von Ionisationskammern oder Zählrohren nachzuweisen. Man kann z. B. vor der Kammer eine Paraffinschicht anbringen; bei elastischer Streuung der Neutronen im Paraffin werden Protonen frei, die dann das Gas in der Kammer ionisieren. Der Wirkungsgrad dieser Methode ist jedoch nicht groß. Auf 10^4 Neutronen mit einer Energie von 1 MeV werden aus einer dicken Paraffinschicht etwa 7 Protonen ausgelöst. Bei größerer Neutronenenergie wächst das Verhältnis der Neutronenzahl zur Zahl der ausgelösten Protonen annähernd proportional der Energie der Neutronen. Es ist zweckmäßiger, die Kammer mit Wasserstoff oder wasserstoffhaltigen Verbindungen (CH_4, C_2H_6, C_3H_8 u. a., auch NH_3, H_2S) zu füllen.

b) Kernreaktionen sind zum Nachweis von Neutronen bedeutend wirksamer. Zum Nachweis langsamer Neutronen ist die Anwendung von Kernreaktionen mit Bor $_5B^{10}$ besonders günstig; dabei werden α-Teilchen ausgelöst. Man kann hier sowohl Zählrohre als auch Ionisationskammern benutzen. Das Zählrohr oder die Kammer wird mit Bortrifluorid BF_3 gefüllt; dort geht dann die Reaktion mit den Neutronen vor sich. Um diese Methode auch zum Nachweis schneller Neutronen anwenden zu können, werden diese vorher durch eine Paraffinschicht, die viel Wasserstoff enthält, geschickt. Beim Zusammenstoß des Neutrons mit einem Wasserstoffkern, der die gleiche Masse hat, verliert das Neutron im Mittel die Hälfte seiner Energie. Dadurch sinkt die Energie der Neutronen schon nach wenigen Zusammenstößen auf den Betrag, der dem Wärmegleichgewicht bei der gegebenen Temperatur entspricht. Die auf diese Weise erhaltenen „thermischen Neutronen" kann man leicht durch Zählrohre oder Kammern mit BF_3 nachweisen.

c) Zur qualitativen Beobachtung kann man vorteilhaft die Entstehung künstlicher Radioaktivität als Indikator heranziehen. Zu diesem Zweck wählt man oft Indium, Silber, Rhodium und einige andere Stoffe. Bei der Reaktion mit Neutronen entstehen radioaktive Isotope dieser Stoffe, die man mit Zählrohren nachweist.

Schließlich ist die Anzeige von Neutronen mit Spezialphotoemulsionen möglich. Man mischt unter die Emulsion dickschichtiger Platten Lithium- oder Borsalze. In der Emulsion kann man die Bahnkurven der durch die Reaktionen mit dem Li^6 und B^{10} erzeugten Heliumkerne beobachten[1]).

B. Beschleuniger geladener Teilchen

§ 253. Der elektrostatische Generator

Damit ein geladenes Teilchen (ein Proton, Deuteron, α-Teilchen) eine Kernreaktion eingehen kann, muß es sich dem Kern auf eine genügend kleine Entfernung nähern. Es war deshalb eine wichtige experimentelle Aufgabe der Kernphysik, Methoden zur Erzeugung geladenerTeilchen mit Energien von einigen Millionen Elektronenvolt auszuarbeiten. Anfangs be-

---

[1]) Über Dosimetrie und Nachweis von Neutronen siehe das erwähnte Buch von W. WEKSLER, L. GROSCHEW und B. ISSAJEW oder die Monographie K. K. AGLINZEWS: „Dosimetrie ionisierender Strahlungen" (К. К. Аглинцев: „Дозиметрия ионизирующих излучений", Гостехиздат, 1950) siehe auch: F. KOHLRAUSCH: „Praktische Physik" II, Leipzig 1950, S. 480ff. und dortige Zitate.

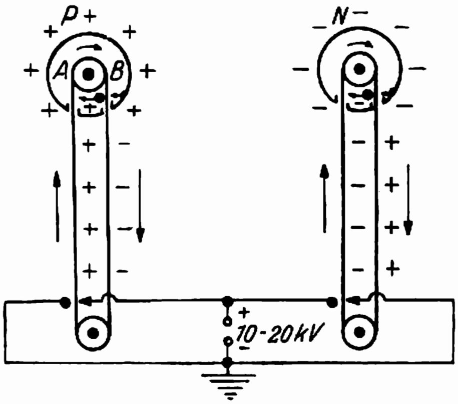


Abb. 318. Schema eines elektrostatischen Generators

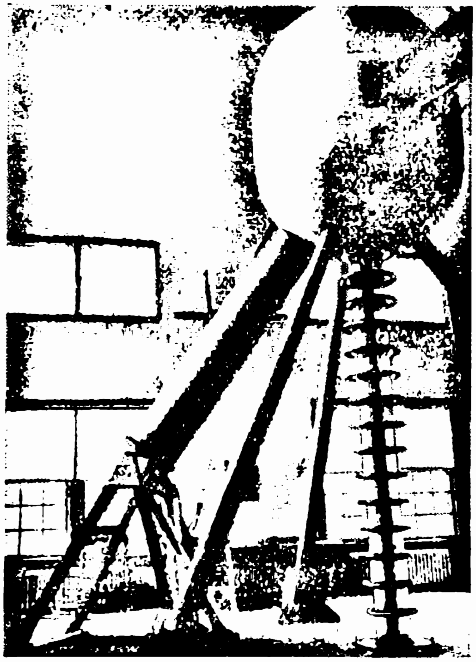


Abb. 319. Außenansicht eines elektrostatischen Generators

mühte man sich, Apparate im Laboratoriumsmaßstab zu bauen, um sie möglichst auf dem Experimentiertisch aufstellen zu können und um allzugroßen Aufwendungen bei ihrer Herstellung zu entgehen. Als man jedoch einige Apparate, die diesen Forderungen genügten, erfunden hatte, zeigte sich, daß man durch Vergrößerung ihrer Abmessungen und ihrer Leistung die experimentellen Möglichkeiten bedeutend erweitern kann.

Das im Prinzip einfachste Gerät zur Erzeugung schneller Teilchen ist der von VAN DE GRAAF erfundene elektrostatische Generator.

Die Maschinen dieser Art beruhen auf einem bekannten elektrostatischen Experiment. Wenn man ins Innere einer hohlen Metallkugel ein geladenes Kügelchen an einem isolierenden Handgriff bringt und damit die innere Oberfläche der Kugel berührt, dann gibt das Kügelchen seine ganze Ladung an die Kugel ab. Bei jeder Wiederholung dieser Operation leisten wir Arbeit gegen die Kräfte des Feldes, auf deren Kosten wir das Potential der Kugel im Grunde genommen bis zu einer Grenze, die durch die Verluste (Korona) gegeben ist, erhöhen.

Diese Idee ist technisch im elektrostatischen Generator auf folgende Weise verwirklicht. P und N sind zwei hohle Metallkugeln (Abb. 318). Die Ladungen werden durch zwei endlose Bänder aus Isoliermaterial (Seide, Gummi, Papier und ähnliches) übertragen. Wie in der Abbildung dargestellt ist, werden die Bänder durch einen kleinen technischen Transformator mit einem Kenotron als Gleichrichter auf 10000 bis 20000 V geladen. Die vom linken Band transportierte positive Ladung wird innerhalb der Kugel von dem Kollektor A, der die Ladung an die Kugel abgibt, gesammelt. Im Bild ist eine einfache Vorrichtung eingezeichnet, die einen zweiten Kollektor B darstellt. Dieser bewirkt, daß das Band nicht nur eine bestimmte Menge positiver Elektrizität hintransportiert, sondern auch dieselbe Menge negativer Elektrizität wieder entfernt. Durch diese Vorrichtung wird der Wirkungsgrad der Maschine verdoppelt.

Das Grenzpotential, das man auf den Kugeln des elektrostatischen Generators erreichen kann, hängt von dem Durchschlagspotential des umgebenden Gases ab. Es erwies sich daher als zweckmäßig, den Generator mit einem luftdichten Mantel, in dem ein Druck von einigen Atmosphären herrscht, zu umgeben, wodurch die Durchschlagsspannung erhöht wird. Noch größere Erfolge wurden erzielt, als man den Generator nicht in Luft, sondern in einem komprimierten Gas mit großer Durchschlagsfestigkeit aufstellte, z. B. in Freon und besonders in dem sogenannten „Elegas“ (Schwefelhexafluorid SF_6), deren Anwendung von A. F. JOFFE und Mitarbeitern ausgearbeitet wurde.

Die bis heute gebauten elektrostatischen Generatoren liefern 3—3,5 MeV bei einem Strom von ungefähr 1000 μA. Obwohl der elektrostatische Generator den unten beschriebenen Beschleunigern in bezug auf die Energie der beschleunigten Teilchen bedeutend nachsteht, bleibt er trotzdem eine wertvolle Hilfsmaschine für die Kernforschung. Sein Hauptvorteil liegt in der großen Homogenität und strengen Kontrollierbarkeit der Energie der mit ihm beschleunigten Teilchen.

Abb. 319 gibt eine Vorstellung von der Außenansicht eines elektrostatischen Generators.

§ 254. Das Zyklotron

Die Wirkungsweise eines Zyklotrons ist ungewöhnlich einfach. Stellen wir uns eine Metallschachtel in Form eines Hohlzylinders vor, die in zwei Hälften zerschnitten ist. Die Schachtel befindet sich in einem magnetischen Querfeld. An ihre beiden Hälften ist eine Wechselspannung (z. B. 10^4 — 10^5 V) eines Hochfrequenzgenerators angelegt. Es möge sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Schlitz zwischen diesen beiden Hälften, die man Duanten

nennt, ein positives Ion befinden. Wenn der linke Duant (Abb. 320) zu diesem Zeitpunkt auf die maximale negative Spannung geladen ist, dann wird das Ion nach links gezogen und tritt in den Duanten ein. Hier ist kein elektrisches, sondern ein quergerichtetes Magnetfeld (senkrecht zur Zeichenebene) vorhanden. Unter Einwirkung dieses Magnetfeldes beschreibt das Ion einen Halbkreis. Dazu möge es die Zeit t brauchen. Wenn sich in dieser Zeit die Phase der angelegten Spannung umkehrt, dann erfährt das Ion eine neue Beschleunigung in Richtung des rechten Duanten und wird seinen Weg im Innern dieses Duanten mit einer größeren Geschwindigkeit längs eines Halbkreises von größerem Radius fortsetzen. Wenn es gelingt, den Zeitraum, der vom Ion zum Durchlaufen des Duanten benötigt wird, und die Periode des Generators zu synchronisieren, dann wird das Ion jedesmal beschleunigt, wenn es sich in dem Spalt zwischen den Duanten befindet. Eine solche Möglichkeit besteht darum, weil, wie eine einfache Rechnung zeigt (siehe Teil I, § 4), die Zeit t unabhängig vom Radius des Halbkreises ist, auf dem sich das Ion im Innern des Duanten bewegt.

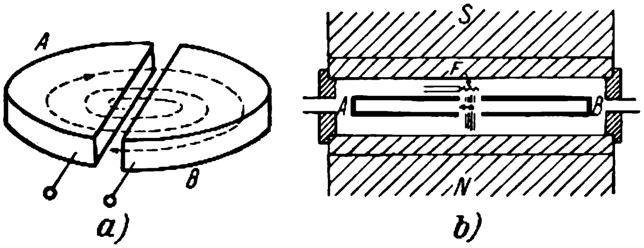


Abb. 320. Zur Wirkungsweise des Zyklotrons

Wir suchen jetzt die Bedingung für die Synchronisation. Die Winkelgeschwindigkeit des Ions muß mit der Kreisfrequenz des Generators übereinstimmen, d. h., sie muß gleich $2\pi f$ sein, wenn f die lineare Frequenz des Generators ist. Aus der Bedingung (siehe Teil I, § 4)

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e}{c} v \mathfrak{H}$$

erhalten wir

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e}{mc} \mathfrak{H}, \tag{254,1}$$

so daß man die Bedingung für die Synchronisation in der Form

$$\frac{e}{mc} \mathfrak{H} = 2\pi f \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H} = \frac{mc}{e} 2\pi f \tag{254,2}$$

schreiben kann. Die Synchronisation wird also bei einer gegebenen Ionenart und bei gegebener Frequenz des Generators erreicht, wenn das Magnetfeld die durch die Bedingung (254,2) bestimmte Feldstärke besitzt. Für Deuteronen ist z. B. $\frac{e}{mc} = 4789$, und wenn man die Frequenz f in Megahertz ausdrückt, ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi f \cdot 10^6}{4789} = 1{,}312 \cdot 10^3 f.$$

Hieraus erhält man z. B. für $f = 10$ ein für die Synchronisation erforderliches Feld von $\mathfrak{H} = 13{,}12$ Kilooersted. Für die Geschwindigkeit des Deuterons finden wir aus (254,1), wenn wir $r = 50$ cm setzen:

$$v = \frac{e}{mc}\mathfrak{H} r = 4789 \cdot 1{,}312 \cdot 10^4 \cdot 50 = 3{,}16 \cdot 10^9 \text{ cm/sec}.$$

Die äquivalente Beschleunigungsspannung erhalten wir durch eine Kombination der Beziehung

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e}{c} V \cdot 10^8$$

mit (254,1). Es ergibt sich

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{mc}\right)(\mathfrak{H} r)^2 \cdot 10^{-8} \text{ Volt} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4789 \cdot (1{,}312 \cdot 10^4 \cdot 50)^2 \cdot 10^{-8} \approx 10^7 \text{ Volt}. \qquad (254{,}3)$$

Für Protonen ist $\frac{e}{mc}$ doppelt so groß wie für Deuteronen. Nach Formel (254,2) muß daher die Feldstärke des Resonanzmagnetfeldes halb so groß sein, das äquivalente Beschleunigungspotential ist nach Formel (254,3) ebenfalls halb so groß. Für die zweifach geladenen Ionen des Heliums hat $\frac{e}{mc}$ den gleichen Wert wie für Deuteronen, und $\mathfrak{H}$ ist also in beiden Fällen gleich groß. Da aber die Ladung der künstlichen α-Strahlen doppelt so groß wie die eines Deuterons ist, steigt auch die Energie auf das Doppelte.

Das allgemeine Schema eines Zyklotrons ist in Abb. 321 wiedergegeben. Dort sind die Spiralbahnen zweier Ionen eingezeichnet, die bei verschiedenen Phasen der Wechselspannung an den Duanten in den Raum zwischen den Duanten eingetreten sind. Wenn ein Ion seine Bewegung zu einem Zeitpunkt beginnt, an dem die Spannung ihren Scheitelwert besitzt, dann hat es nach n Umläufen eine Geschwindigkeit, der das Beschleunigungspotential

$$V = 2n V_{max}$$

entspricht.

Wenn jedoch ein Ion in den Raum zwischen den beiden Duanten zu einem Zeitpunkt eintritt, für den z. B. $V_1 = \frac{1}{2} V_{max}$ ist, so ist die Beschleunigung dieses Ions nur halb so groß. Da nun nach (254,1) die Kreisfrequenz des Ions ω nur von $\frac{e}{mc}$ und $\mathfrak{H}$ abhängt, ist die Synchronisation bei den folgenden vielfachen Beschleunigungen auch für dieses Ion gewährt. Der Unterschied besteht nur darin, daß ein solches Ion beim Durchgang zwischen den Duanten nur eine halb so große Beschleunigung erfährt und deshalb entsprechend mehr Umläufe zurücklegen muß, um die durch den Radius r bestimmte Maximalenergie zu erreichen. Die Radien der aufeinanderfolgenden Spiralabschnitte findet man mit Hilfe der Formel (254,3), wo man auf der linken Seite $2nV_1$ an Stelle von V einzusetzen hat:

$$2n \quad = \frac{1}{2}\frac{e}{mc}(\mathfrak{H} r)^2 \cdot 10^{-8}. \qquad (254{,}4)$$

Hieraus folgt

$$r = 2\left(\frac{V_1 \cdot 10^8}{\mathfrak{H}^2} \frac{mc}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}.$$

Die aufeinanderfolgenden Radien wachsen also proportional $n^{\frac{1}{2}}$.

Bei der Bewegung des Ions vom Mittelpunkt bis zum Rand legt es innerhalb der Duanten einen langen Weg zurück. Dabei ist es sehr wichtig, daß die Bahn des Ions möglichst in

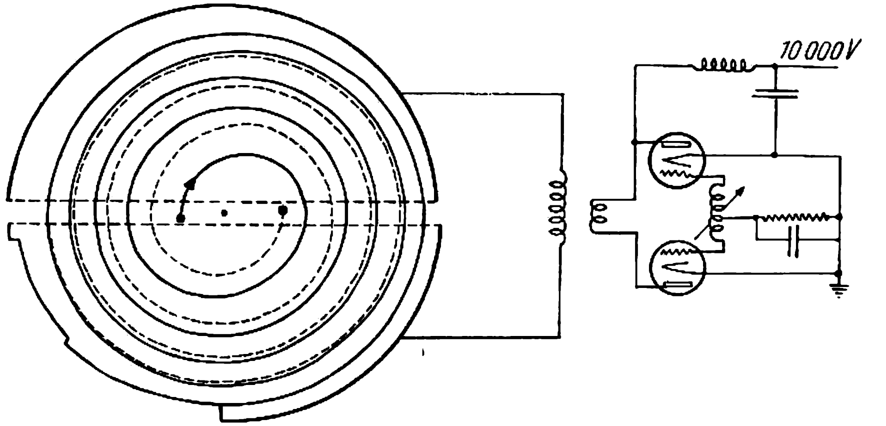


Abb. 321. Schema des Zyklotrons

der Mittelebene zwischen den Deckeln der Duanten liegt, da sonst das Ion schließlich auf einen der Deckel fallen würde, ohne den Ausgangsspalt zu erreichen. Eine zweifache, elektrostatische und magnetische Fokussierung ermöglicht die Einhaltung der Bahnebene. In Abb. 322a ist die Verteilung der Äquipotentialebenen im Gebiet zwischen den Duanten, wo das Ion die Beschleunigung erhält, dargestellt. Man sieht, daß der zu den Äquipotentialflächen senkrechte Weg des Ions so verläuft, daß die Ionen in der Symmetrieebene fokussiert werden. Das elektrostatische Feld wirkt hier als elektrische Zylinderlinse. Auf dem übrigen Wege wirkt das elektrostatische Feld, wie man aus demselben Bild sieht, defokussierend. Die Erhaltung des Ionenbündels besorgt indessen eine magnetische Fokussierung, deren Entstehung Abb. 322b erklärt. An den Rändern des Magneten zeigt das Magnetfeld eine natürliche Streuung. Das Magnetfeld ist hier nicht völlig homogen, und seine Kraftlinien verlaufen nicht senkrecht zur Symmetrieebene, sondern sind nach außen gewölbt. Wenn man sich ein Ion vorstellt, daß sich mit der Geschwindigkeit v außerhalb der Symmetrieebene senkrecht zur Zeichenebene bewegt, dann wirkt auf dieses eine Kraft, die proportional [v $\mathfrak{H}$] und gegen die Symmetrieebene gerichtet ist, wie es in der Zeichnung durch Pfeile angedeutet wurde.

Man sieht, daß die resultierende Wirkung beider Felder die Erhaltung des Bündels dann begünstigt, wenn die kombinierte fokussierende und defokussierende Wirkung eine Schwingungsamplitude des Bündelquerschnitts liefert, die kleiner als die halbe innere Höhe der Duanten ist. Eine experimentelle Untersuchung der Ionenverteilung des Strahls in der

vertikalen Ebene zeigte, daß sie den theoretischen Berechnungen entspricht. Für größere Radien wird der Bündelquerschnitt immer kleiner; er zieht sich immer mehr um die Symmetrieebene zusammen.

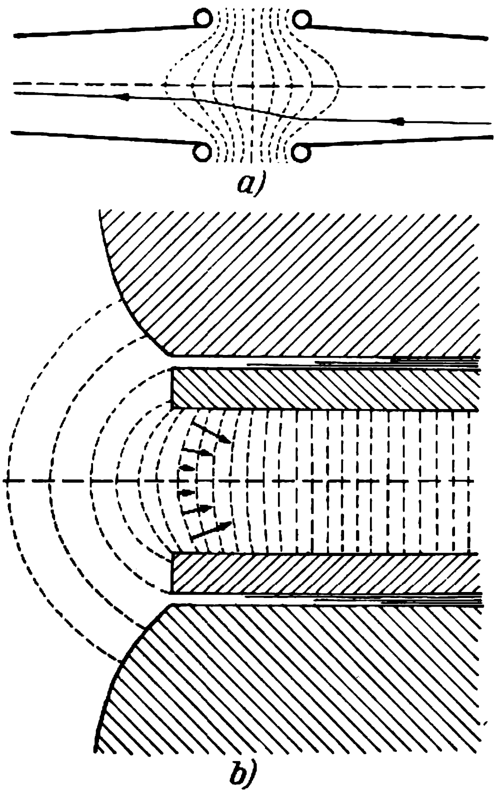


Abb. 322. Die elektrische und magnetische Fokussierung im Zyklotron: *a* — Schnitt der Duanten in der Nähe des Beschleunigungsgebiets der Ionen; er zeigt die elektrostatische Fokussierung; *b* — die fokussierende Wirkung des Magnetfeldes des Zyklotrons

Als Ionenquelle dient eine kleine Bogenentladung. Der Bogen brennt im Zentrum des Zyklotrons innerhalb eines konischen Hohlraumes, der von Metallwänden begrenzt wird, zwischen einer Glühkathode und der Wand des Hohlraums, die als Anode dient. Da zum Brennen des Bogens ein Gasdruck von 10^{-2} — 10^{-3} mm Hg herrschen muß, fließt das Gas durch eine schmale Öffnung, die einen hydrodynamischen Widerstand darstellt, ins Innere des Hohlraums. Die entstehenden Ionen dringen durch eine Kapillare in die Kammer des Zyklotrons ein, wo das Gas durch starke, schnell arbeitende Pumpen abgesaugt wird. Durch diese Konstruktion kann in der Kammer des Zyklotrons ein niedriger Druck von 10^{-4} — 10^{-5} mm Hg aufrechterhalten werden, während innerhalb des Hohlraums für den Betrieb des Bogens ein etwa 100mal größerer Druck erforderlich ist.

Wir wollen nun die wichtige Frage nach der maximalen Energie der Ionen im Zyklotron stellen. Da nach (254,3) das äquivalente Beschleunigungspotential dem Quadrat des größten

Bahnradius proportional ist, scheint es, daß durch Vergrößerung des Magnetpolradius auch die Energie der aus dem Zyklotron austretenden Ionen entsprechend vergrößert werden kann. Dieser Vergrößerung sind jedoch, wie man aus den folgenden Überlegungen ersieht, Schranken gesetzt. Wegen der relativistischen Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit ist der Ausdruck $\frac{mc}{e}$ von einer bestimmten, genügend großen Geschwindigkeit an keine Konstante mehr (bei 100 MeV ist die Masse des Deuterons schon 5% größer als die Ruhemasse) und wächst bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit. Wird also im nichtrelativistischen Gebiet die Bedingung für die Synchronisation (254,2) befriedigt, dann wird sie beim Übergang zum relativistischen Gebiet gestört. Man kann sich das folgendermaßen anschaulich vorstellen: Durch das relativistische Anwachsen der Masse bleibt das Ion mit seiner Phase hinter der Phase der Generatorspannung zurück. Dieses Zurückbleiben führt schließlich dazu, daß das Ion zu einem solchen Zeitpunkt in den Raum zwischen den Duanten eintritt, in dem es von der Spannung nicht beschleunigt, sondern gebremst wird. Nach der Bedingung (254,2) kann die Synchronisation aufrechterhalten werden, wenn man das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ inhomogen, und zwar nach außen hin *ansteigend*, wählt. Dabei wird jedoch die räumliche Verteilung des Feldes, die die Fokussierung bewirkt, gestört.

Das Zurückbleiben der Phase des Ions hinter der Phase der Spannung kann man verringern, wenn man die beschleunigende Potentialdifferenz zwischen den Duanten $2V_1$ vergrößert. Wie man leicht sieht, kann das Ion vor der völligen Störung der Phasenbeziehungen nämlich eine um so größere Energie aufnehmen, je höher diese Potentialdifferenz ist.

Theoretische Rechnungen liefern für die Maximalenergie den Ausdruck

$$E_n = 1{,}54\,(2V_1\,AZ\sin\vartheta_0)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{MeV},$$

wobei V_1 — die Spannung zwischen den Duanten in Kilowatt, A — die Massenzahl des Ions (entsprechend 1, 2, 4 für Protonen, Deuteronen und Heliumionen), Z — die Ladung des Ions und ϑ_0 — die Anfangsphase bedeuten. Man kann also durch Vergrößerung von V_1 die Energie des aus dem Zyklotron austretenden Ionenbündels steigern. Dieser Vergrößerung ist jedoch eine praktische Grenze durch Verluste gesetzt. Außerdem wächst bei Steigerung von V_1 die notwendige Leistung des Generators sehr stark an. Trotzdem konnte man, wenn $V_1 = 10^3$ kV gewählt wird, einen Deuteronenstrom mit einer Energie von 100 MeV erwarten. Um Teilchen mit Energien von einigen hundert Millionen Volt zu erzeugen, hat es sich aber als zweckmäßiger erwiesen, die Konstruktion des Zyklotrons etwas zu verändern (siehe § 256).

Abb. 323 zeigt ein Zyklotron in Betrieb, und Abb. 324 einen Deuteronenstrahl, der aus dem Zyklotron in die Luft austritt. Das leuchtende Band erstreckt sich bei 15 MeV auf 70 cm.

In der Tabelle sind einige Daten angeführt, die sich auf typische Zyklotrons beziehen.

Zyklotrons	großes	mittleres	kleines	das kleinste
Durchmesser der Magnetpole (cm)	150	100	65	40
Energie der Deuteronen (MeV)	16	11,5	4,5	1,4
Stromstärke der Deuteronen (μA)	200	20 (100)	4 (50)	25
Intensität der Neutronen (g Ra-Be-Äquivalent auf 1 μA)	6000	3000	(200)	40

§ 255. Die Beschleunigung von Elektronen. Das Betatron

Die Kernphysik ist an der Beschleunigung von Elektronen aus zwei Gründen interessiert. Sie benötigt schnelle Elektronen erstens zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen ihnen und den Kernen, und zweitens als Mittel zur Erzeugung sehr harter γ-Quanten. Die von natürlichen radioaktiven Quellen gelieferten γ-Quanten besitzen nämlich Energien, die nicht über 2,62 MeV hinausgehen. Dagegen braucht man zur Durchführung von Kernreaktionen unter Einwirkung von γ-Strahlen meistens bedeutend höhere Energien. Außerdem entsprechen den natürlichen γ-Strahlern nur geringe Intensitäten.

Es gibt technische Anlagen, die gewöhnliche Hochspannungstransformatoren verwenden und eine Verdopplung oder Verdreifachung der Spannung erlauben. Mit diesen Geräten kann man Elektronenbündel mit einer Energie von 1 MeV erzeugen; sie beanspruchen jedoch außerordentlich viel Platz, und darüber hinaus reicht die Energie 1 MeV für die Zwecke der Kernphysik nicht aus. Mit elektrostatischen Generatoren kann man größere Energien erreichen, aber auch diese Geräte sind sehr groß, und man kann nicht damit rechnen, daß mit ihrer Hilfe Elektronen mit Energien von einigen hundert Megaelektronenvolt erzeugt werden können. Aus folgenden Gründen ist auch das Zyklotron zur Erzeugung von sehr energiereichen Elektronen ungeeignet: 1. Das Verhältnis $\frac{e}{mc}$ ist für Elektronen fast das 2000fache wie für Protonen und etwa das 4000fache wie für Deuteronen. Deshalb ist die Resonanzfrequenz nach der Gleichung (254,2) zu groß, so daß sich große hochfrequenztechnische Schwierigkeiten einstellen. 2. Noch wesentlicher ist die Tatsache, daß die relativistische Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit bei so leichten Teilchen, wie Elektronen, bedeutend größer ist. Für Elektronen mit einer Energie von 10 MeV ist die Masse $m = 22{,}3\, m_0$, und für 100 MeV ist $m = 196{,}8\, m_0$.

Im Jahre 1927 wurde von Wideröe der Gedanke ausgesprochen, die elektromagnetische Induktion zur Erzeugung schneller Elektronen anzuwenden. Wegen ungenügender theoretischer Behandlung des Projektes gelang es Wideröe nicht, ein funktionierendes Modell des Gerätes zu bauen. Später wurde die Idee, die elektromagnetische Induktion zur Beschleunigung von Elektronen auszunutzen, von dem sowjetischen Physiker J. P. Terlezki ausgebaut. 1941 wurde von Kerst ein Induktionsbeschleuniger konstruiert, der den Namen „Betatron" erhielt.

Die Wirkungsweise des Betatrons ist ebenso wie die des Zyklotrons außerordentlich einfach. Bei der technischen Verwirklichung der Ideen, die diesen beiden Geräten zugrunde liegen, mußten jedoch große Schwierigkeiten überwunden werden.

Wie bekannt, entsteht bei einer Änderung des magnetischen Flusses Φ im Raum ein elektrisches Wirbelfeld $\mathfrak{E}$. Der Wirbelcharakter des Feldes äußert sich darin, daß das Potential des Feldes keine eindeutige Funktion der Koordinaten ist. Beim Umlauf einer Ladung auf einem geschlossenen Wege ist in einem solchen Felde die Arbeit nicht wie in einem elektrostatischen Felde gleich Null, sondern an der Ladung wird seitens des Feldes eine positive Arbeit geleistet, und folglich steigt die Energie der Ladung an. Nach der zweiten Maxwellschen Grundgleichung ist die elektromotorische Kraft der Induktion, die der vom elektrischen Wirbelfeld an der positiven Einheitsladung bei einem geschlossenen Umlauf geleisteten Arbeit gleich ist, mit der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses durch die Gleichung

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathfrak{E}_s ds$$

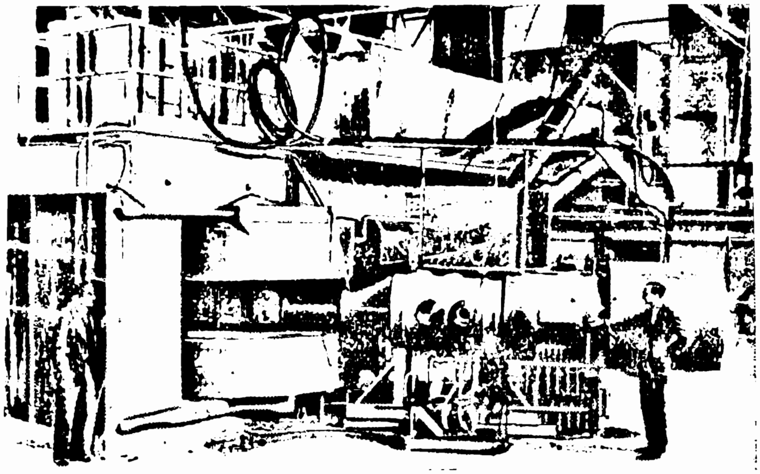
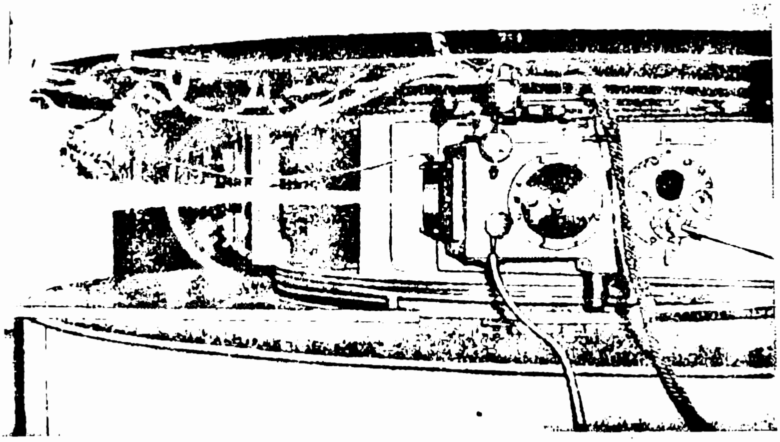


Abb. 323. Gesamtansicht eines Zyklotrons mit 1,5 m Polschuhdurchmesser



. Aus dem Zyklotron austretendes Deuteronenbündel mit einer Energie von

ft. Wenn das Magnetfeld achsensymmetrisch ist, dann stellen die Kraftlir hen Feldes Kreise dar, deren Mittelpunkte auf der Symmetrieachse lieg mlauf längs einer Kraftlinie mit dem Radius r verliert das Feld (gewinnt (ıng) die Energie

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi r\mathfrak{E}.$$

Da es sich um ein Wirbelfeld handelt' gewinnt die Ladung $-e$ bei n Umläufen auf der gleichen Kraftlinie mit dem Radius r die Energie $2\pi rne\mathfrak{E}$. Daraus folgt, daß selbst dann, wenn die durch einen Umlauf gewonnene Energie nicht groß ist, nach einer eutsprechend großen Zahl von Umläufen eine sehr hohe Energie erreicht werden kann.

Stellen wir uns vor, daß die Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses im Verlaufe von 10^{-3} sec konstant sei und setzen wir weiterhin voraus, daß sich ein Elektron in einer ringförmigen Vakuumröhre, die konzentrisch zu den Kraftlinien des elektrischen Wirbelfeldes angeordnet ist, befindet. Der Radius der Röhre möge 5 cm betragen. Dann kann man ausrechnen, welche Energie das Elektron während 10^{-3} sec erhält, *wenn es uns gelingt, ihn während dieser Zeit immer auf ein und derselben Kraftlinie zu bewegen.* Zur Berechnung setzen wir voraus, daß die Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses derart ist, daß das Elektron bei einem Umlauf die Energie 20 eV gewinnt. Seine lineare Geschwindigkeit erreicht dabei den Wert

$$v = 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{20}\ \text{cm/sec} = 2{,}65 \cdot 10^8\ \text{cm/sec}.$$

Man kann leicht ausrechnen, daß die Zeit, die das Elektron für einen Umlauf benötigt, etwa $12 \cdot 10^{-8}$ sec beträgt; die Beschleunigung ist $1{,}1 \cdot 10^{15}$ cm/sec^2. Aus dieser elementaren Rechnung sieht man, daß zur Berechnung der Geschwindigkeit und der Weglänge, die vom Elektron während 10^{-3} sec durchlaufen wird, die Formeln der relativistischen Mechanik angewandt werden müssen. Eine solche Rechnung zeigt, daß das Elektron nach den erwähnten 10^{-3} sec einen Weg von 290 km zurücklegt, was 925000 Umläufen auf einem Kreis mit einem Radius von 5 cm entspricht. Da die Energie, die es während eines Umlaufs mitgeteilt bekommt, gleich 20 eV ist, beträgt der Gesamtenergiegewinn

$$20 \cdot 9{,}25 \cdot 10^5 = 18{,}5\ \text{MeV!}$$

Die Masse des Elektrons ist bei dieser Energie etwa 32mal so groß wie die Ruhemasse. Da hier aber von keiner Synchronisation die Rede ist, beeinflußt das Anwachsen der Masse in keiner Weise den Energiegewinn des Elektrons. Es ist nun notwendig, Bedingungen zu finden, unter denen ein und dasselbe magnetische Wechselfeld die Beschleunigung des Elektrons durch elektromagnetische Induktion bewirkt und gleichzeitig das Elektron auf einer unveränderlichen stabilen Bahn hält. Es zeigt sich, daß dieses Problem lösbar ist.

Wir wollen diese Stabilitätsbedingung für die Elektronenbahn auffinden. Nach der bekannten Beziehung $\frac{mv^2}{r} = \frac{e}{c} v \mathfrak{H}$ ist der Impuls $p = mv$ des sich im Magnetfelde $\mathfrak{H}$ bewegenden Elektrons mit der Feldstärke und dem Radius der Bahnkurve r durch die Gleichung

$$p = \frac{e}{c} \mathfrak{H} r \tag{255,2}$$

verknüpft. Daraus folgt für die Konstanz von r, daß sich der Impuls p proportional zu $\mathfrak{H}$ ändern muß. Das zweite NEWTONsche Gesetz liefert

$$\frac{dp}{dt} = e\mathfrak{E}. \tag{255,3}$$

Nach dem in Teil I, § 42, Gesagten behält diese Beziehung auch im relativistischen Falle dann Gültigkeit, wenn die linke Seite als Ableitung des Impulses nach der Zeit und

nicht als Produkt aus Masse und Beschleunigung betrachtet wird. Wenn man $\mathfrak{E}$ aus (255,1) bestimmt und in (255,3) einsetzt, erhält man

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{2\pi r c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Durch Integration erhält man für $r = \text{const}$

$$p_t - p_0 = \frac{e}{2\pi r c}(\Phi_t - \Phi_0). \tag{255,4}$$

Wir drücken jetzt den Fluß Φ durch die mittlere magnetische Feldstärke in der durch die stabile Umlaufbahn begrenzten Fläche aus und erhalten, wie man leicht sieht,

$$\Phi = \pi r^2 \overline{\mathfrak{H}}.$$

Die Formel (255,4) kann also auf die Form

$$p_t - p_0 = \frac{e}{2c} r(\overline{\mathfrak{H}}_t - \overline{\mathfrak{H}}_0) = \frac{e}{c}\left[\left(\frac{1}{2}\overline{\mathfrak{H}}_t\right) r - \left(\frac{1}{2}\overline{\mathfrak{H}}_0\right) r\right]$$

gebracht werden. Wenn wir die Anfangsbedingungen so wählen, daß

$$p_0 = \frac{e}{c}\left(\frac{1}{2}\overline{\mathfrak{H}}_0\right) r \tag{255,5}$$

wird, erhalten wir

$$p_t = \frac{e}{c}\left(\frac{1}{2}\overline{\mathfrak{H}}_t\right) r \tag{255,6}$$

und sehen schließlich durch Vergleich mit (255,2), daß

$$\mathfrak{H}_t = \frac{1}{2}\overline{\mathfrak{H}}_t \tag{255,7}$$

gilt.

Die Stabilitätsbedingung für die Elektronenbahn fordert also, daß die magnetische Feldstärke auf der Bahn in jedem Augenblick gleich der halben mittleren Feldstärke ist, die man für die von der Bahn begrenzte Fläche erhält. Die Anfangsbedingung (255,5) ist offensichtlich so zu deuten, daß der Impuls des Elektrons p_0 für $t = 0$ der allgemeinen Bedingung (255,6) genügen muß, wenn die Forderung (255,7) erfüllt ist.

Eine sehr wichtige Bedingung für das Arbeiten des Betatrons ist die Fokussierung des Bündels. Wir sahen, daß die Fokussierung bereits beim Zyklotron wichtig ist, wo jedes Ion auf einer 50 bis 100 m langen Spiralenbahn läuft. Es ist klar, daß der Fokussierung beim Betatron noch größere Bedeutung zukommt, da die Elektronen hier Strecken von einigen hundert Kilometern zurücklegen. Dabei muß im Betatron für zweierlei Fokussierung gesorgt werden, einmal für die Erhaltung der ganzen Bahn möglichst in der Nähe einer bestimmten Ebene (achsiale Fokussierung, dieselbe wie beim Zyklotron) und zum anderen für die Rückkehr auf die stabile Bahn, wenn ein Elektron gelegentlich (z. B. durch Stöße mit Molekülen von Gasresten) von dieser in radialer Richtung abgewichen ist. Beide Fokussierungen werden durch eine geeignete Auswahl der Raumverteilung der Feldstärke

des Magnetfeldes erreicht. Für die achsiale Fokussierung im Betatron ist es wie auch im Zyklotron notwendig, daß das Magnetfeld an der Peripherie schwächer als im Zentrum ist. Im Zyklotron nutzt man die sich von selbst einstellende Streuung der Kraftlinien an den Rändern aus; beim Betatron muß man jedoch, um die Stabilität der Elektronenbahn zu erzwingen, den Polschuhen eine besondere Form geben (Abb. 325), durch die eine Schwächung des Außenfeldes gegenüber der Mitte erreicht wird.

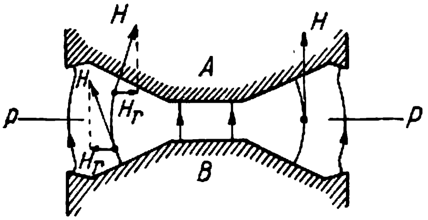


Abb. 325. Die Verteilung der magnetischen Kraftlinien im Raum zwischen den Magnetpolen des Betatrons, die die achsiale Fokussierung bewirken

Um die radiale Fokussierung zu sichern, muß das Feld vom Mittelpunkt zum Rand hin langsamer als mit $\frac{1}{r}$ abfallen, wobei r der Abstand vom Mittelpunkt des Feldes ist. Zur Erklärung dieser Tatsache müssen wir uns erinnern, daß der zentrifugalen Trägheitskraft

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

bei der Bewegung des Elektrons auf der stabilen Bahn durch die Lorentz-Kraft

$$F_m = \frac{e}{c} v \mathfrak{H},$$

die seitens des Magnetfeldes wirkt, die Waage gehalten wird. Die Zentrifugalkraft ändert sich proportional $\frac{1}{r}$. Die Abhängigkeit der Lorentz-Kraft von r wird jedoch nur durch die räumliche Verteilung des Magnetfeldes $\mathfrak{H}(r)$ bedingt. In Abb. 326 stellen die Kurven F_c und F_m die Abhängigkeit beider Kräfte vom Abstand dar. Die Kraft F_c ist immer $\frac{1}{r}$ proportional; die ihr entsprechende Kurve ist also eine Hyperbel. Die Kraft F_m kann allgemein in der Form $A \cdot \frac{1}{r^n}$ dargestellt werden, wobei n sowohl größer als auch kleiner als 1 sein kann. Abb. 326a entspricht dem ersten Fall, Abb. 326b dem zweiten. Man sieht, daß die Abszisse des Schnittpunktes beider Kurven gleich dem Radius der stabilen Bahn ist. Wenn sich das Elektron auf dieser Bahn bewegt, halten sich beide Kräfte das Gleichgewicht. Sollte das Elektron von der stabilen Bahn nach außen hin abweichen ($r_1 > r_0$), dann wird, wie man aus der Zeichnung sieht, im Falle a) die Zentrifugalkraft F_c *größer* als F_m, und das Elektron wird sich immer weiter entfernen. Dagegen ist im Falle b) $F_c < F_m$ für $r_1 > r_0$, und die Lorentz-Kraft wird das Elektron auf die stabile Bahn zurücktreiben. Analog kann man sich durch

Betrachtung dieser Zeichnungen davon überzeugen, daß bei einer Abweichung des Elektrons von der stabilen Bahn in Richtung des Mittelpunkts im Falle a) die LORENTZ-Kraft überwiegt und das Elektron von der stabilen Bahn weg nach dem Zentrum zieht, während im Falle b) die Zentrifugalkraft das Elektron auf die stabile Bahn zurücktreibt.

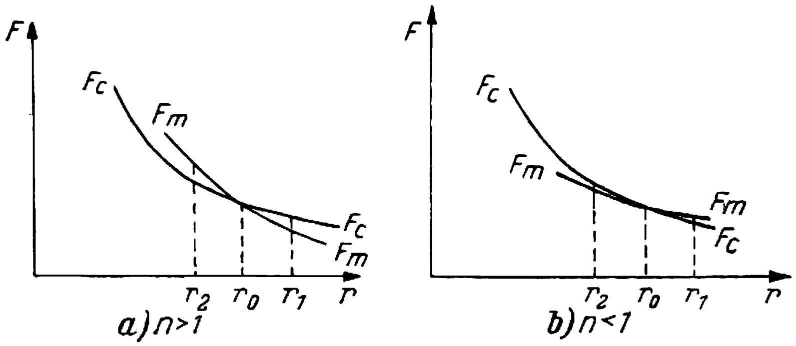


Abb. 326. Zur Erklärung der radialen Fokussierung der Elektronen

Wir sehen also, daß der Feldtyp b) eine stabile Elektronenbahn ermöglicht; ein solches Feld benötigt man für das Betatron. Die Wicklung des Elektromagneten wird durch den Wechselstrom eines Generators gespeist (im ersten Modell nahm man einen Wechselstrom mit der Frequenz 600 Hz, im letzten und leistungsfähigsten 60 Hz). Die Elektronen werden von der Glühkathode *B* geliefert (Abb. 327); sie ist im Innern der Röhre über der stabilen Bahn angebracht. Die Glühkathode stößt Elektronen in beiden Richtungen aus; die Elektronen des einen Bündels werden während der ersten Viertelperiode, die des

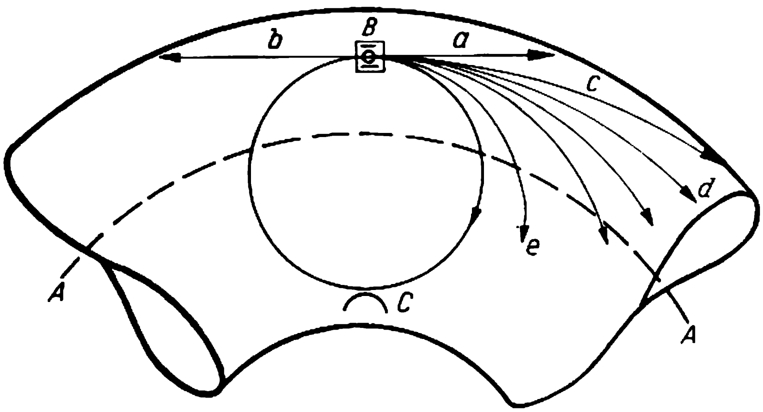


Abb. 327. Die Elektronenbahnen zu verschiedenen Zeitpunkten. *AA* ist die stabile Bahn

anderen Bündels während der dritten Viertelperiode beschleunigt. Wenn das Magnetfeld durch Null geht, bewegen sich die Elektronen auf gradlinigen Bahnen (a und b auf Abb. 327);

sie treffen auf die Röhrenwände und gehen also für die Beschleunigung verloren. Wenn das Magnetfeld wächst, werden die Elektronenbahnen krummlinig, aber bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das Feld einen Wert hat, der annähernd der Größe $\mathfrak{H}_0$ entspricht, die der Anfangsbedingung [siehe (255,5)]

$$p_0 = \frac{e}{c}\left(\frac{1}{2}\bar{\mathfrak{H}}_0\right) r_0 = \frac{e}{c}\,\mathfrak{H}_0 r_0$$

genügt, fallen die Elektronen noch auf die Wand. Nur während eines kleinen „Arbeitsintervalls" von t_1 bis t_2 ($t_1 = 0{,}9\,\mu$sec, $t_2 = 1{,}6\,\mu$sec) in Abb. 328 hat die magnetische Feldstärke solche Werte, daß die auf einer Spiralbahn startenden Elektronen schließlich auf die stabile Bahn gelangen und beschleunigt werden. Bei einer Generatorfrequenz von 600 Hz ist dieses Arbeits-

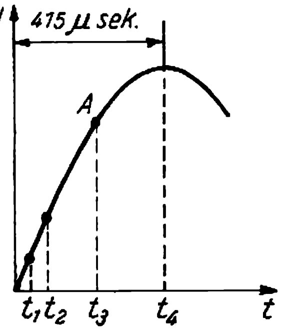


Abb. 328. Der zeitliche Verlauf des Magnetfeldes

intervall kleiner als eine Mikrosekunde (10^{-6} sec). Nachdem sich die Elektronen auf der stabilen Bahn befinden, bewegen sie sich auf ihr während einer Viertelperiode, d. h., während die Phase des Stroms eine Beschleunigung ermöglicht. Bei einer Frequenz von 600 Hz dauert dieser Zeitabschnitt $\frac{1}{2400}$ sec $= 415\,\mu$sec. Während dieser kurzen Zeit gelingt es dem Elektron, 260000 Umläufe zu vollenden, einen Weg von etwa 125 km zurückzulegen und eine Energie von einigen 10 Millionen Elektronenvolt aufzunehmen. Nach Ablauf des Arbeitszeitraumes muß das Elektron auf die Zielscheibe gelenkt werden. Dort wird es gebremst und erzeugt dabei Röntgenstrahlen. Dies muß im richtigen Augenblick vor sich gehen, weil die Phase, die auf die beschleunigende folgt, das Elektron bremst. Eine Verkleinerung des Radius der stabilen Bahn, die notwendig ist, um das Elektron auf die Folie C zu richten (Abb. 327), erreichte man bei den ersten Modellen auf folgende Weise. Der mittlere Teil der Polschuhe wurde aus gepreßtem Eisenpulver, zwischen dessen Teilchen sich Luft befand, hergestellt. Die magnetische Sättigung wurde deshalb in diesem Teil früher als in den übrigen erreicht. In dem Augenblick, wo im mittleren Teil Sättigung eintritt, während im übrigen Teil des Kerns das Feld noch wächst, wird die Stabilitätsbedingung für die Bahn automatisch gestört und die Elektronen fallen auf die Zielscheibe. Im neuen großen Modell des Betatrons werden die Elektronen in einem beliebigen Augenblick durch einen Zusatzimpuls aus der Gleichgewichtsbahn gezogen.

Das erste Betatron von Kerst lieferte Photonen mit einer Energie von 2,3 MeV. Es war ein kleines Laboratoriumsgerät. Sein Elektromagnet wog 150 kg. Die von den Elektronen

durchlaufene Gesamtweglänge betrug 125 km. Die nächste Anlage KERSTS lieferte Photonen von 20 MeV, der Elektronenweg war 420 km lang, und das Gewicht des Elektronenmagneten betrug 3,5 t. Der Magnet nahm eine Leistung von 26 kW auf. Das Betatron, das im Jahre 1945 vollendet wurde[1]) liefert γ-Quanten mit einer Energie von 100 MeV, der Magnet wiegt 130 t, die Leistungsaufnahme beträgt etwa 200 kW, der Radius der Gleichgewichtsbahn — etwa 1 m und die Weglänge der Elektronen 1250 km (Abb. 329). 1950 wurde von KERST ein Betatron für 300 MeV gebaut (Gewicht des Magneten 275 t).

Die Röntgenstrahlung des Betatrons besitzt eine scharf ausgeprägte räumliche Asymmetrie und wird hauptsächlich in der Richtung der einfallenden Elektronen ausgesandt, wie es den theoretischen Voraussagen für die Bremsung von Elektronen mit relativistischen Geschwindigkeiten entspricht. Die Halbbreite des Bündels beträgt bei 20 MeV 12°, bei 100 MeV nur 2°.

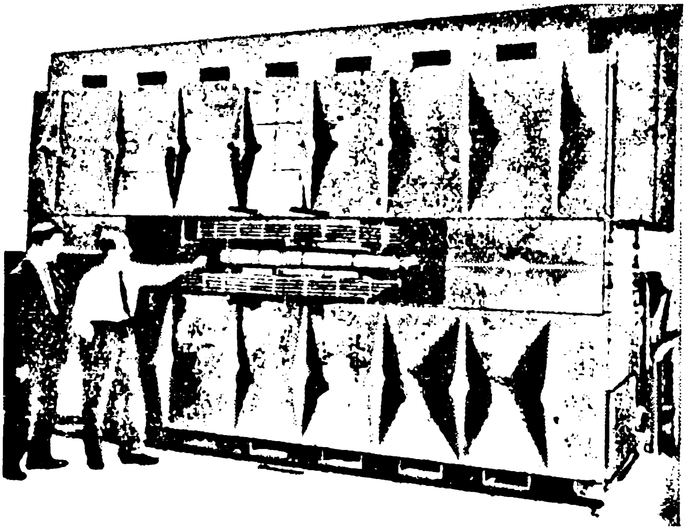


Abb. 329. Außenansicht des Betatrons für 100 MeV

Es taucht natürlich die Frage auf, ob es eine obere Grenze, für die mit dem Betatron erreichbaren Energien gibt. Aus seiner Wirkungsweise sieht man, daß das relativistische Anwachsen der Masse, die der Beschleunigung von Ionen im gewöhnlichen Zyklotron eine Grenze setzt, beim Betatron keine Rolle spielt. Aber auch hier gibt es eine Schranke. Mit der Vergrößerung der Energie wachsen vor allem die Ausmaße der Apparatur und die notwendige magnetische Feldstärke auf der stabilen Bahn schnell an; man hat mit ernstlichen Konstruktionsschwierigkeiten zu kämpfen. Außerdem — und das ist viel wichtiger — entsteht eine prinzipielle Komplikation wegen der sogenannten Strahlungsrückwirkung. Das Wesentliche hierbei ist folgendes: Ein Elektron, das sich auf der stabilen Bahn bewegt, vollführt eine beschleunigte Bewegung und muß deshalb elektromagnetische Wellen ausstrahlen (siehe Teil I, § 63). Diese Strahlung bedingt die „Strahlungsrückwirkung", die zur Verkleine-

[1]) Dieses Betatron wurde von der Firma „General Electric" gebaut.

rung des Radius der stabilen Bahn führt. Auf diesen Umstand haben zuerst D. D. Iwanenko und I. J. Pomerantschuk hingewiesen. Nach ihren Berechnungen beträgt die Maximalenergie des Betatrons etwa 500 MeV. Von diesen Autoren, wie auch von L. A. Arzimowitsch und A. A. Sokolow[1]), wurde die weitere Entwicklung der Theorie vorangetrieben. Die theoretische Voraussage des Auftretens einer durch Strahlungsverluste verursachten sichtbaren Strahlung wurde 1947 experimentell von Pollok bestätigt. Er beobachtete ein helles bläulichweißes Leuchten, das unmittelbar von Elektronen, deren Energie größer als 30 MeV ist, ausgesandt wird. Diese Erscheinung wurde nicht am Betatron, sondern am Synchrotron, einem Gerät, in dem Ionen ebenfalls auf stabilen Bahnen kreisen, beobachtet.

§ 256. Synchrotron und Phasotron

Die Existenz stabiler Elektronenbahnen im Betatron gab Anlaß zur Überprüfung des Problems der Erzeugung von Ionen mit relativistischen Geschwindigkeiten mit Hilfe eines Zyklotrons. Das Ergebnis dieser Überlegungen war ein Beschleuniger, der auf einer Kombination der Grundlagen beider oben besprochener Geräte beruht. Der Gedanke, das Zyklotron zur Erzeugung relativistischer Teilchen heranzuziehen, wurde zuerst von dem sowjetischen Physiker W. I. Wexler ausgesprochen. Diese Idee beruht darauf, daß auch im Zyklotron stabile Bahnen möglich sind. Um uns hiervon zu überzeugen, betrachten wir ein Ion mit einer solchen Energie, daß die Synchronisationsbedingung im Zyklotron erfüllt ist [siehe Formel (254,4)]:

$$2\pi f = \omega = \frac{e}{mc}\mathfrak{H} = \frac{ec}{mc^2}\mathfrak{H} = \frac{ec}{E}\mathfrak{H} \tag{256,1}$$

(wir erinnern uns, daß ω die Winkelgeschwindigkeit des Ions und f die lineare Frequenz der beschleunigenden Spannung ist; die Gleichung $2\pi f = \omega$ ist gerade die Resonanzbedingung). Wir setzen voraus, daß dieses Ion den Raum zwischen den Duanten durchquert, wenn die Phase der beschleunigenden Spannung durch Null geht. Ein solches Ion ist mit der Spannung in Resonanz; es wird jedoch nicht beschleunigt. Nehmen wir aber an, daß das Ion in den Spalt fällt, wenn die Spannungsphase sehr wenig von Null verschieden ist, und einer *Beschleunigung* des Ions entspricht. Wegen der Geschwindigkeitssteigerung wächst die Masse des Ions, und die Frequenz ω wird entsprechend kleiner. Die Synchronisationsbedingung wird gestört und das Ion bleibt, während es sich zwischen den Duanten befindet, mit seiner Phase hinter der Spannungsphase zurück. Es wird deshalb nach ein oder zwei Umläufen durch das Wechselfeld zwischen den Duanten nicht mehr beschleunigt, sondern *gebremst*. Dadurch wird die Masse wieder herabgesetzt und die Resonanz wiederhergestellt. Die Bahn des Ions wird also um eine bestimmte stabile Bahn schwanken und sich dabei selbst korrigieren. Die Energie des Ions wird jedoch auch um einen Gleichgewichtswert, der dieser stabilen Bahn entspricht, schwanken und nicht wachsen.

Um die Energie eines solchen Ions zu vergrößern, muß man die Gleichgewichtsenergie vergrößern. Das kann, wie leicht einzusehen ist, durch eine langsame (adiabatische) Änderung der Generatorfrequenz oder der magnetischen Feldstärke oder beider gleichzeitig erreicht werden. Wenn wir voraussetzen, daß sich eine stabile Bahn einstellt, die der Gleichgewichts-

[1]) Eine ausführliche Darstellung der hierher gehörigen theoretischen und experimentellen Arbeiten siehe Успехи физических наук, Bd. XXXIV, S. 398, 1948; vgl. auch D. Iwanenko und A. Sokolow: „Klassische Feldtheorie", § 39, Akademie-Verlag, Berlin 1953.

energie E entspricht, dann wird die Bedingung

$$2\pi f = \frac{ec}{E}\,\mathfrak{H} = \omega \qquad (256{,}2)$$

erfüllt. Wir nehmen nun an, daß sich die Frequenz f um einen sehr kleinen Betrag vermindert hat. Die Bedingung (256,1) wird dabei gestört. Die Kreisfrequenz $\omega = \frac{ec}{E}\,\mathfrak{H}$ des Teilchens wird zu groß oder, was dasselbe ist, die Energie E zu klein. Das bringt eine Schwankung um einen neuen und *dazu größeren* Wert der Gleichgewichtsenergie mit sich. Das Teilchen wird in den Spalt gelangen, wenn es mit seiner Phase der Spannung voraus ist, d. h., es wird eine von Null etwas verschiedene Beschleunigungsspannung vorfinden. Dadurch wird seine Energie vergrößert und die Frequenz verringert, solange keine neue Gleichgewichtsenergie erreicht wird. Bei weiterer Vergrößerung der Energie und entsprechender Verkleinerung von ω beginnt das Teilchen in seiner Phase hinter der Spannung zurückzubleiben, und der Prozeß läuft in umgekehrter Richtung. Auf diese Weise stellt sich ein neuer Gleichgewichtswert der Energie $E' > E$ ein. Daraus folgt, daß bei sehr langsamem Abnehmen der Frequenz die Energie des Teilchens wächst.

Man sieht auch leicht ein, daß durch sehr geringe *Vergrößerung* des $\mathfrak{H}$-Feldes die gleichen Bedingungen wie beim Herabsetzen der Frequenz geschaffen werden. Bei größerem $\mathfrak{H}$ erweist sich die Frequenz $\omega = \frac{ec}{E}\,\mathfrak{H}$ als zu groß, folglich ist die Energie zu klein usw. Durch Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf kontinuierliche Änderungen kann man behaupten, daß sich durch langsame Änderungen der Frequenz oder des Magnetfeldes die Beschleunigung von Teilchen verwirklichen läßt.

Beide Möglichkeiten hat man bei den in Betrieb befindlichen Anlagen ausgenutzt. Die Vergrößerung des Magnetfeldes wendet man im Beschleunigungsgerät für Elektronen, dem Synchrotron, an. Da jedoch im Synchrotron der Radius der Gleichgewichtsbahn proportional zur Teilchengeschwindigkeit wächst, erwies es sich für die Beschleunigung von Elektronen als zweckmäßig, das Prinzip des Betatrons und das Prinzip des Synchrotrons in einer Maschine zu vereinigen. Zur Erläuterung wollen wir nun die Vorgänge in einem arbeitenden Synchrotron für 70 MeV beschreiben. Zu Beginn jedes Arbeitszyklus arbeitet die Maschine als Betatron. Die Elektronen gelangen durch eine Glühkathode mit einer Energie von 40 keV in eine toroidförmige Vakuumkammer und werden wie im Betatron durch die Änderung des magnetischen Flusses beschleunigt. Der Elektromagnet des Synchrotrons unterscheidet sich jedoch vom Magneten des Betatrons; er ist ringförmig, und seine Eisenteile bestehen aus einzelnen Bändern, da der Elektromagnet für die Speisung mit Wechselstrom berechnet ist. Nach etwa 200 μsec haben die Elektronen eine Energie von 2 MeV; ihre Geschwindigkeit hat die des Lichts fast erreicht und bleibt deshalb praktisch konstant. In diesem Augenblick wird vom Kern des Elektromagneten die Sättigung erreicht. Dadurch wird automatisch ein Hochfrequenzgenerator eingeschaltet. Dieser ist mit zwei sich dicht gegenüberstehenden Elektroden verbunden, die in die Vakuumkammer eingeführt sind. Deshalb wird die weitere Energievergrößerung des Elektrons jedesmal beim Durchgang des Elektrons durch den Raum zwischen den Elektroden gewährleistet, d. h., die Maschine arbeitet als Synchrotron. Dabei ist die Konstanz des Radius dadurch gewährleistet, daß die Geschwindigkeit konstant bleibt, so daß das anwachsende Magnetfeld zur Stabilisierung der Bahn ausgenutzt wird. Der beschriebene Prozeß geht bei jedem Zyklus vor sich und dauert nur $^1/_4$ Periode, nach

der sich der Generator automatisch ausschaltet. Die Elektronen fallen dann auf eine Folie und erzeugen Röntgenstrahlen. Danach beginnt ein neuer Zyklus, in dem sich die beschriebenen Vorgänge wiederholen. Das Synchrotron arbeitet deshalb mit Unterbrechungen.

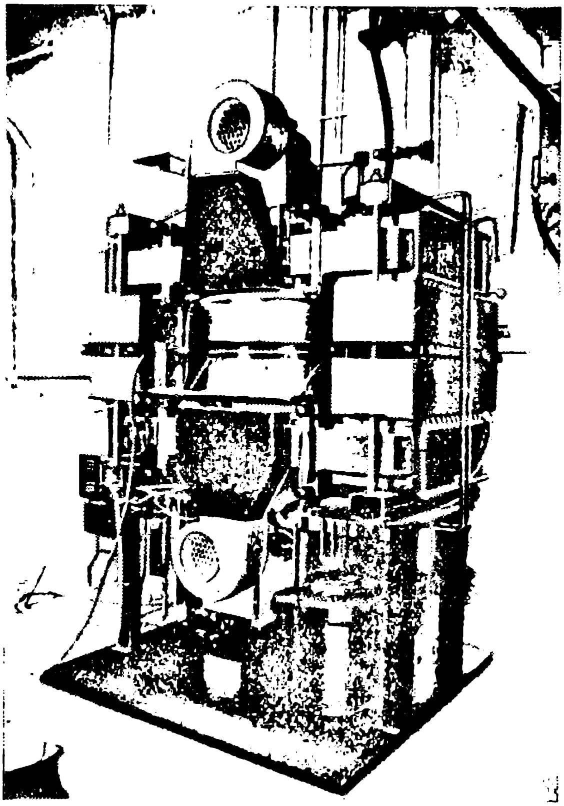


Abb. 330. Ein Synchrotron für 70 bis 80 MeV

In Abb. 330 ist die Photographie eines Synchrotrons wiedergegeben.

Die Verringerung der Frequenz dient zur Erzeugung von schweren Teilchen — Protonen, Deuteronen und α-Teilchen — mit relativistischen Energien. Anordnungen dieser Art heißen Synchrozyklotrons oder Phasotrons. Das Phasotron ist ein Zyklotron, in dem die Verkleinerung der Umlaufperiode der Teilchen infolge der relativistischen Massenzunahme durch die Verkleinerung der Frequenz des Generators, der die Duanten-Spannung liefert, kompensiert wird. Die Frequenzmodulation ließ sich mechanisch verwirklichen, indem man in den Stromkreis des Generators einen Drehkondensator schaltete.

Wie im gewöhnlichen Zyklotron ist das Magnetfeld auch im Phasotron konstant. Die Ionenquelle befindet sich im Mittelpunkt.

Anfangs werden die Ionen beschleunigt, indem sie sich auf einer Spiralbahn bewegen, und die Synchronisation wird selbst bei großen Energien nicht gestört. Man sieht indessen, daß nur diejenigen Ionen den gesamten Beschleunigungszyklus mitmachen können, deren Bewegung ungefähr in einem Augenblick beginnt, der einem Maximum der Generatorfrequenz entspricht. Das führt zu einer starken Schwächung des Stromes der beschleunigten Ionen; diese wird jedoch durch die bedeutende Energieerhöhung kompensiert.

Eine auf diese Weise arbeitende Maschine ist das 184-Zoll-Synchrozyklotron des Strahlungslaboratoriums der California-Universität in Berkeley (Abb. 331). Der Magnet dieses Zyklotrons hat einen Durchmesser von 184 Zoll, er ist 4,7 m hoch und 4000 t schwer. Mit diesem Zyklotron erzeugt man Protonen mit 350 MeV, Deuteronen mit 195 MeV und α-Teilchen mit 390 MeV. Durch Beschießung einer Zielscheibe mit Protonen von 350 MeV erhält man einen Neutronenstrom mit einer Energie von 280 MeV.

Der große Vorzug des Phasotrons vor dem gewöhnlichen Zyklotron ist erstens die Möglichkeit, Teilchen mit sehr großen Energien zu erzeugen und zweitens die Tatsache, daß die Generatoramplitude zur Erzielung solcher Energien nur einige 10 Kilovolt bei relativ sehr geringer Leistung beträgt.

Auf Seite **363** wurde darauf hingewiesen, daß zur Erzeugung eines Deuteronenstroms von 100 MeV im Zyklotron die Generatoramplitude 1000 kV betragen muß, während die Spannungsamplitude eines großen Phasotrons nur 15 kV ausmacht. Ein Mangel des Phasotrons allerdings ist die wesentlich kleinere Menge an beschleunigten Ionen, die mit ihm, im Gegensatz zum gewöhnlichen Zyklotron, erzeugt werden kann.

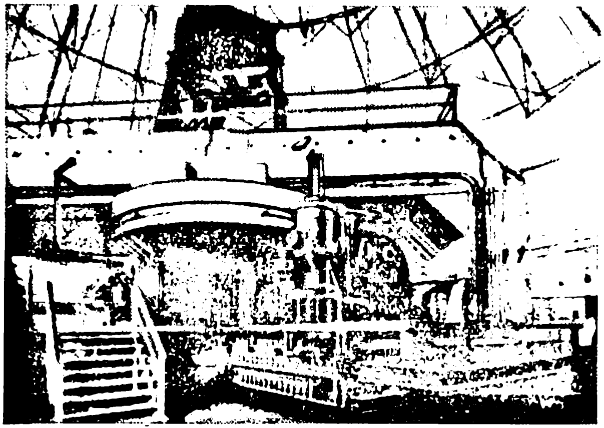


Abb. 331. Das 184-Zoll-Phasotron

In letzter Zeit erschienen in der wissenschaftlichen Literatur Beschreibungen der Konstruktion und des Baues von Beschleunigern für einige Milliarden Elektronenvolt (BeV)[1]. Aus ökonomischen Gründen ist das Phasotron für diesen Zweck ungeeignet, da eine Rechnung zeigt, daß der Magnet des Phasotrons für 1 BeV einen Durchmesser von 8,6 m und ein Gewicht von etwa 20000 t haben müßte. Nach der Theorie, die man für Beschleuniger

[1]) In der amerikanischen Literatur bezeichnet man 10^9 als „billion", daher BeV. (Anm. d. Red.)

ausgearbeitet hat, ist es zur Erzeugung von Teilchen mit Energien von einigen BeV günstiger, das Prinzip des Synchrotrons und Phasotrons zu kombinieren. Bis jetzt (Frühjahr 1951) sind die Pläne dreier derartiger Apparate, die man als Protonensynchrotron, Bevatron oder Cosmotron bezeichnet, veröffentlicht worden[1]). Es ist die Erzeugung von Teilchen mit Energien von etwa 3 BeV geplant.

§ 257. Lineare Beschleuniger

Neben den betrachteten zyklischen Resonanzbeschleunigern hat man in den letzten Jahren lineare Beschleuniger konstruiert und gebaut. Die Idee, die diesen Beschleunigern zugrunde liegt, ist nicht neu. Der erste lineare Beschleuniger war sogar ein Vorgänger des Zyklotrons. Wie beim Zyklotron wird auch bei diesem Beschleuniger, der 1931 von Sloan und Lawrence zur Ionenbeschleunigung gebaut wurde, ein und dieselbe Potentialdifferenz mehrfach ausgenutzt. Das Schema eines solchen Beschleunigers ist in Abb. 332 dargestellt. Er besteht aus einer Anzahl scheibenförmiger und zylindrischer Elektroden, die längs der Achse einer auf hohes Vakuum ausgepumpten Röhre befestigt sind. Die Elektroden sind mit einem Hochfrequenzgenerator verbunden, und ihre Länge ist so berechnet, daß sich die Spannungsphase des Generators während der Zeit, die das Elektron zum Durchqueren der Elektrode braucht, gerade umkehrt. Durch diese Maßnahme erfahren die Elektronen im Raum zwischen den Elektroden jedesmal dieselbe Beschleunigung. Da die Ionengeschwindigkeit dabei immer größer wird, muß man, um die Durchlaufzeit der Elektroden konstant zu halten, die Zylinder entsprechend verlängern. Der Generator des gebauten Beschleunigers lieferte im Maximum 42 kV (bei einer Leistung von 20 kW). Man hat mit ihm in einer 30 m langen Röhre bei 30 Elektroden Quecksilberionen mit einer Energie von 1,26 MeV erzielt.

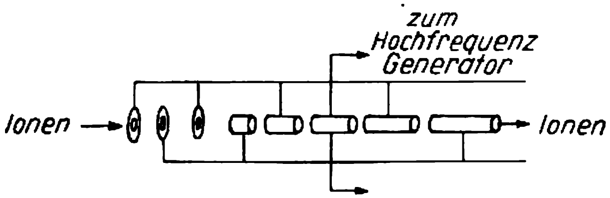


Abb. 332. Schema des linearen Beschleunigers

Die weitere Entwicklung dieser Idee, eine verhältnismäßig kleine Potentialdifferenz vielfach auszunutzen, führte zur Ausarbeitung zyklischer Beschleuniger. Die Idee des linearen Beschleunigers wurde jedoch in der Nachkriegszeit im Zusammenhang mit der starken Entwicklung der Kurzwellentechnik wieder aufgegriffen.

Der moderne lineare Beschleuniger stellt eine Röhre dar, in der sich elektromagnetische Wellen ausbreiten, d. h., er ist ein belasteter Hohlleiter[2]). Das elektromagnetische Feld in einem solchen Hohlleiter hat einen eigentümlichen Charakter; insbesondere existieren in

[1]) Eine ausführliche Darstellung der Theorie und Konstruktion moderner Beschleuniger einschließlich des Bevatrons siehe im Buch von A. P. Grinberg: „Methoden zur Beschleunigung geladener Teilchen" (А. П. Гринберг: „Методы ускорения заряженных частиц", Гостехиздат, 1950.)

[2]) Die sowjetischen Ingenieure G. I. Babat und I. P. Polewoi wiesen schon 1932 auf die Möglichkeit hin, geladene Teilchen mit Hilfe von fortschreitenden Wellen im Hohlleiter zu beschleunigen.

ihm fortschreitende Wellen, bei denen die der Röhrenachse parallele Komponente des elektrischen Vektors von Null verschieden ist. Geladene Teilchen (Elektronen oder positive Ionen), die sich mit einer dieser Wellen in Phase befinden, werden bei der Bewegung von der achsialen Komponente des elektrischen Feldes so beschleunigt, als ob sie sich in einem konstanten Feld befinden würden. Eine Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß die Phasengeschwindigkeit im Hohlleiter mit glatten Wänden größer als die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum ist und sich das Teilchen nicht mit einer solchen Geschwindigkeit bewegen kann. Diese Schwierigkeit wird durch die Anwendung eines Hohlleiters mit einer bestimmten periodischen Struktur überwunden. Beispiele für diese Strukturen sind in Abb. 333 dargestellt. Das Problem der Wellenbewegung in Anwesenheit derartiger Strukturen stimmt formal mit einer ganzen Reihe gründlich erforschter Probleme aus verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik überein. Hierher gehören die Quantentheorie der Elektronen im Metall und in festen Kristallen, die Beugungstheorie der Elektronen und Röntgenstrahlen, die Theorie der elektrischen Filter usw. Die Lösung dieses Problems führt zu dem Ergebnis, daß die Störung, die durch die periodische Belastung bedingt ist, als Überlagerung einer Reihe von Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten dargestellt werden kann[1]). Unter diesen Wellen gibt es solche, deren Phasengeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Es kann sein, daß die Geschwindigkeit einer solchen Welle mit der Geschwindig-

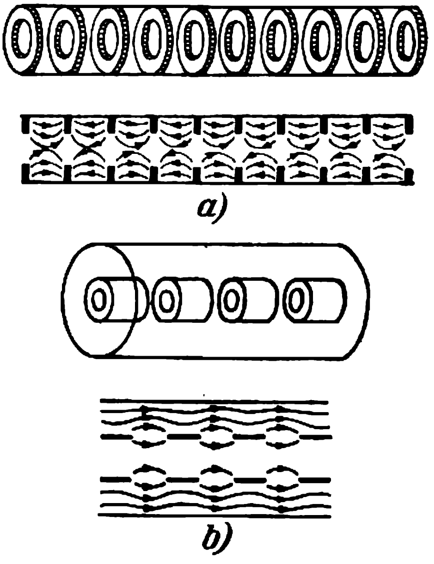


Abb. 333. Mögliche Hohlleitertypen zur linearen Beschleunigung und ihre elektrischen Felder

[1]) Es würde hier zuviel Platz in Anspruch nehmen, die Theorie des linearen Beschleunigers zu behandeln. Deshalb werden im weiteren einige wichtige Ergebnisse der Theorie ohne Beweise angeführt. Eine ausführliche Darstellung der Theorie der linearen Beschleuniger finden die Leser in klarer Form in der Arbeit von J. Slaters: „Die Konstruktion linearer Beschleuniger", Rev. Mod. Phys. 20, 1948, 473. Eine Beschreibung der Konstruktion linearer Beschleuniger wird in D. W. Fry and W. Walkinshow: „Reports on Progress in Physics", Phys. Soc., London, 12, 1948—1949, gegeben. Siehe auch das auf S. 366 zitierte Buch A. P. Grinbergs.

Teilchens übereinstimmt; dann wird das Teilchen gewissermaßen „auf dei ". Man kann zeigen, daß die anderen Wellen die Energie des Teilchens im ıdern. Dabei findet eine eigentümliche Phasensynchronisation zwischeı . und der Welle statt. Wenn die Geschwindigkeit des Teilchens ein wenig iner als die der tragenden Welle ist, dann wird das Teilchen vom Feld deı amt oder beschleunigt und kehrt zur stabilen Phase zurück.

loch zu Beginn der Beschleunigung gleichzeitig mit der Energie auch die Ges des Teilchens wächst, so muß entsprechend auch die Geschwindigkeit der 𝔬rochen wachsen. Das kann ebenfalls durch eine entsprechende Konstrukt ers erreicht werden. Die Geschwindigkeitssteigerung der Welle ist übrigens otwendig, bis die Teilchengeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit ann hat (für Elektronen ist das bei einer Energie von etwa 2 MeV der Fall). In tivistischen Gebiet wird sich die Geschwindigkeit des Elektrons nicht ändeı 'achsen der Energie wird sich durch die Massenvergrößerung äußern. Die I ıdigkeit der Welle darf ebenfalls nicht mehr größer werden, sondern muß k :h der Lichtgeschwindigkeit bleiben.

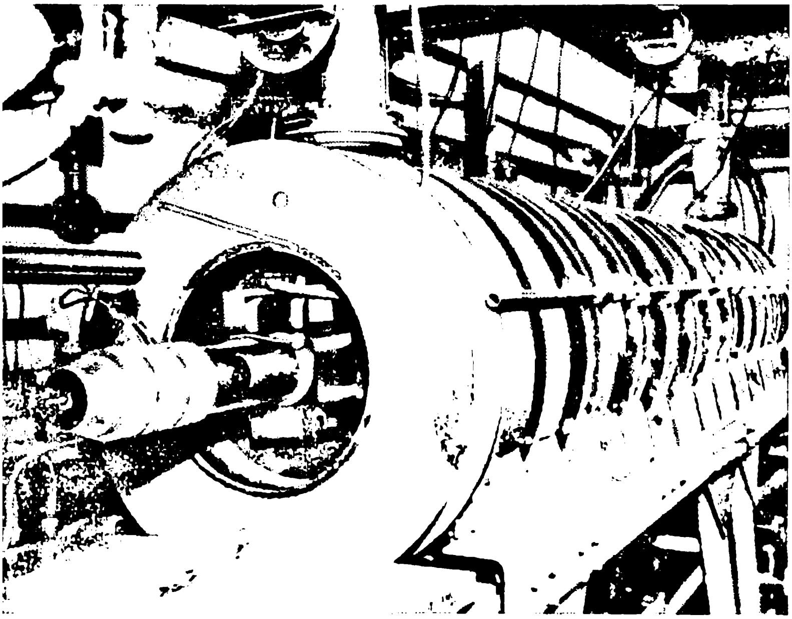


Abb. 334. Ein linearer Beschleuniger für Protonen

ırden Hohlleiter entworfen, die den erwähnten Anforderungen genügen, uı ger für Elektronen und Protonen gebaut. In Abb. 334 sieht man die Außen linearen Beschleunigers, der Elektronen mit einer Energie von 4 MeV liefeı ıbeschleuniger erzeugt Protonen mit 32 MeV. In diesem Beschleuniger

Protonen, die vorher mit einem elektrostatischen Generator auf 4 MeV gebracht wurden, eingeführt. Zur Zeit baut man in Stanford einen linearen Beschleuniger, der Elektronen bis auf 1000 MeV beschleunigen soll. Die Länge dieses Beschleunigers beträgt 60 m; eine 24 m lange Stufe liefert Elektronen mit 185 MeV.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Röhre des Beschleunigers sehr lang ist. Das ist jedoch kein großer Nachteil. Der bedeutende Vorteil der linearen Beschleuniger ist der Verzicht auf die sehr großen Magneten, die für zyklische Beschleuniger erforderlich sind. In ökonomischer Hinsicht haben die linearen Beschleuniger ebenfalls den zyklischen gegenüber große Vorzüge. Ihre Kosten wachsen etwa proportional zur Energie, bei den zyklischen dagegen wachsen sie mit dem Quadrat oder sogar der dritten Potenz der Energie.

XX. KERNREAKTIONEN

§ 258. Allgemeine Charakteristik der Kernreaktionen

Als Kernreaktionen bezeichnet man Prozesse, bei denen durch Beschuß irgendeines Kerns mit einem schnellen Teilchen ein neuer Kern und ein anderes Teilchen entstehen. Schematisch können diese Prozesse folgendermaßen dargestellt werden:

$$A + p \rightarrow B + q. \tag{258,1}$$

Hier ist A ein beliebiger Kern, p ein beschleunigtes Teilchen (Proton, Neutron, Deuteron oder Photon), q ist ebenfalls ein Proton, Neutron, α-Teilchen, Elektron, Photon. B ist der Kern, der durch die Umwandlung des Kerns A entsteht. Bei sehr großen Energien des Teilchens p können an Stelle eines Teilchens q bei der Reaktionen mehrere Teilchen $q_1, q_2, \ldots$ befreit werden. Eine besondere und sehr wichtige Art von Kernreaktionen ist die sogenannte *Kernspaltung*, bei der die Kerne B und q vergleichbare Massen besitzen, d. h., der primäre Kern A wird bei der Reaktion in zwei, manchmal drei Splitter mit wenig verschiedener Masse gespaltet.

Die erste Kernreaktion wurde im Jahre 1919 von Rutherford entdeckt. Beim Beschießen von Stickstoffkernen $_7N^{14}$ mit α-Teilchen beobachtete Rutherford die Entstehung schneller Protonen. Die Reaktion vollzieht sich nach dem Schema

$$_7N^{14} + {_2He^4} \rightarrow {_8O^{17}} + {_1H^1}. \tag{258,2}$$

Hier ist also $A = {_7N^{14}}$, $B = {_8O^{17}}$, $p = {_2He^4}$, $q = {_1H^1}$. In Abb. 335 ist eine Wilson-kammer-Aufnahme wiedergegeben, auf der dieser Prozeß festgehalten wurde. Die dünne, lange Spur, die nach rechts hinten geht, gehört zu dem Proton, die kurze Spur, die von demselben Punkt ausgeht, zum Kern $_8O^{17}$. Auf Grund derartiger Aufnahmen kann man sich davon überzeugen, daß die Reaktion tatsächlich nach dem Schema (258,2) verläuft. Wenn man die Reichweiten der Teilchen und die Winkel hinsichtlich der Richtung des α-Teilchen ausmißt, kann man durch Anwendung des Energie- und Impulssatzes zeigen, daß der Rückstoßkern wirklich die Masse 17 hat.

Eine andere geschichtlich interessante Kernreaktion wurde zuerst mit künstlich beschleunigten Protonen verwirklicht. Dabei handelte es sich um die Spaltung des Kerns $_3Li^7$ durch ein schnelles Proton in zwei α-Teilchen:

$$_3Li^7 + {_1H^1} \rightarrow 2\,{_2He^4}. \tag{258,3}$$

Die Wilson-kammer-Aufnahme dieses Prozesses ist in Abb. 336 dargestellt. Die entgegengesetzt gerichteten Spuren von jeweils zwei auseinanderfliegenden α-Teilchen sind hier gut zu sehen.

Es ist zweckmäßig, die Kernreaktionen mit gewöhnlichen chemischen Reaktionen zu vergleichen. Bei den chemischen Reaktionen haben wir es mit Molekülumwandlungen zu tun. Es handelt sich dabei entweder um den Zerfall eines komplizierten Moleküls in ein-

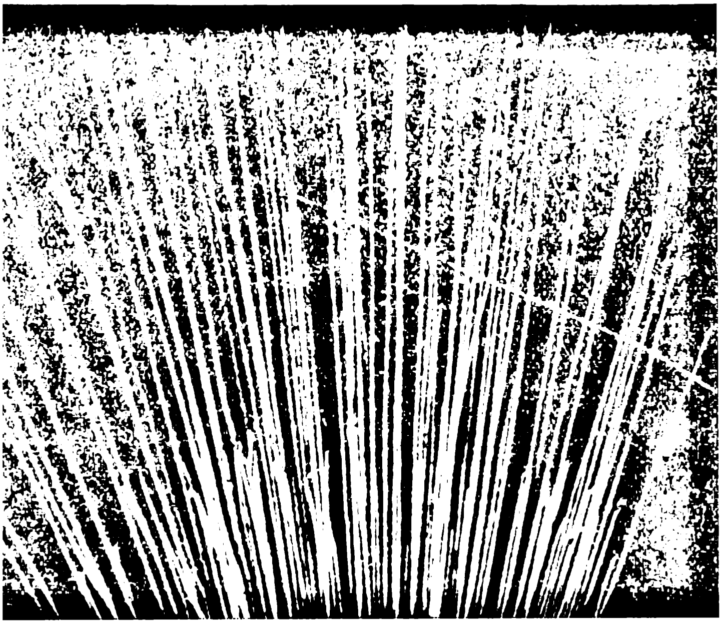


Abb. 335. Die Spaltung eines Stickstoffkerns durch ein α-Teilchen

r um die Bildung eines Moleküls aus einfacheren oder um einen Atom
enden Moleküle. Der Elementenbestand des Stoffes ist dabei jedoc
eaktion unverändert. Wenn Wasserstoff mit Sauerstoff bei der Was

$$H_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow H_2O$$

an haben wir auf der linken und der rechten Seite der Reaktionsgleic
ente, im gegebenen Falle Sauerstoff und Wasserstoff. Bei Kernreaktion
tergehende Umwandlung des Stoffs. Hier handelt es sich um eine Um
e selbst, wenn wir auch für diesen Fall die in der Chemie übliche A
halten wollen.

eaktionen wird wie auch bei chemischen Reaktionen in den einen Fälle
anderen wird aber Energie verbraucht. Die Reaktionen der ersten Art
ich (entsprechend der Bezeichnung exothermischer chemischer Reakti
ten Art endoenergetisch nennen. Im ersten Fall ist die Reaktionsenergie
negativ. Der grundlegende Unterschied zwischen den chemischen und
iegt jedoch darin, daß die Energie der Kernreaktionen einige Größeno
e Energie chemischer Reaktionen ist. Bei der Bildung eines Mols Wa
Mol Wasserstoff (2 g) und $\frac{1}{2}$ Mol Sauerstoff (16 g) werden etwa 70
nun diese Energie mit den Energien der Kernreaktionen (258,2) u

vergleichen. Bei der ersten wird Energie verbraucht, $Q = -1,13$ MeV, und bei der zweiten wird Energie frei, $Q = 17,25$ MeV. Diese Zahlen kann man noch nicht mit der erwähnten Bildungswärme des Wassers vergleichen, und zwar nicht nur deshalb, weil die Zahlen in den beiden Fällen in verschiedenen Einheiten ausgedrückt sind, sondern auch deshalb, weil sie sich auf verschiedene Stoffmengen beziehen. Die Energie chemischer Reaktionen wird immer für 1 Mol des Stoffes angegeben, d. h. z. B. für die Bildung von 18 g Wasser; die

Abb. 336. Die Spaltung von Lithiumkernen durch Protonen

Energie von Kernreaktionen bezieht sich aber auf einen einzigen Elementarprozeß, z. B. auf die Wechselwirkung zwischen einem Stickstoff- und einem Heliumkern (α-Teilchen). Damit die Zahlen vergleichbar werden, muß man die Energie der Kernreaktionen auch auf 1 Mol (genauer auf 1 Grammatom) des Stoffes umrechnen. Für die Reaktion (258,2) erhalten wir z. B. bis auf das Minuszeichen

$$Q = 1,13 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,09 \cdot 10^{18}\,\text{erg} = 2,61 \cdot 10^{7}\,\text{kcal}.$$

Da in unserer Kernreaktion die Massensumme der Grammatome zufällig auch gleich 18 ist, können wir die Absolutwerte des Q für die chemische Reaktion (258,4) und die Kernreaktion (258,2) miteinander vergleichen. Wir sehen, daß Q im letzten Fall dem absoluten Betrage nach 400000mal größer ist. Das ist gerade das charakteristische Verhältnis zwischen den Energien der chemischen und Kernreaktionen. Die Energie der Kernreaktionen (258,3) ergibt sich analog bei Umrechnung auf ein Grammatom (7 g Li + 1 g H) zu

$$Q = 17,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 2,39 \cdot 10^{-11} = 4,06 \cdot 10^{8}\,\text{kcal}.$$

Wenn man diese Energie auch auf 18 g umrechnet, erhält man

$$4,06 \cdot 10^{8} \cdot \frac{18}{8} = 9,15 \cdot 10^{8}\,\text{kcal},$$

d. h. fast 1 Milliarde Kilogrammkalorien im Vergleich zu den 70 Kilogrammkalorien, die bei der Bildung von 18 g Wasser frei werden.

§ 259. Bestimmung der Reaktionsenergie

Die Reaktionsenergie Q kann man bestimmen, wenn die Energie E_1 des die Reaktion einleitenden Teilchens und die Energien E_2 und E_3 der Reaktionsprodukte bekannt sind. Man sieht sofort, daß

$$Q = (E_2 + E_3) - E_1$$

gilt. Dabei ist $Q > 0$, wenn bei der Reaktion Energie frei wird und $Q < 0$, wenn zur Auslösung der Reaktion Energie verbraucht wird.

Nach der genauesten Methode zur Bestimmung von Q werden die Ruhemassen der Teilchen, die in die Reaktion eingehen und bei dieser entstehen, verglichen. Hier werden wie bei der Berechnung der Kernbindungsenergie die genauen Werte der Atommassen (Isotopenmassen) verglichen. Die Elektronenmassen fallen bei der Subtraktion automatisch heraus. Für die Reaktion (258,2) erhalten wir z. B.

$$\begin{array}{rr} N^{14} = 14{,}00751 & O^{17} = 17{,}00450 \\ He^{4} = 4{,}00390 & H^{1} = 1{,}00812 \\ \hline N^{14} + He^{4} = 18{,}01141 & O^{17} + H^{1} = 18{,}01262 \\ - \; O^{17} + H^{1} = 18{,}01262 & \\ \hline Q = -\,0{,}00121 & \end{array}$$

Also ist

$$Q = -\,1{,}21 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{ME} \cdot 931 \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{ME}} = -\,1{,}13\,\mathrm{MeV}.$$

Für die Reaktion (258,3) ergibt sich

$$\begin{array}{rr} Li^{7} = 7{,}01822 & He^{4} = 4{,}00390 \\ H^{1} = 1{,}00812 & He^{4} = 4{,}00390 \\ \hline Li^{7} + H^{1} = 8{,}02634 & 2He^{4} = 8{,}00780 \\ - \; 2He^{4} = 8{,}00780 & \\ \hline Q = 0{,}01854 & \end{array}$$

$$Q = 18{,}54 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{ME} \cdot 931 \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{ME}} = 17{,}25\,\mathrm{MeV}.$$

Die Reaktionsenergie wurde für diesen Fall auch direkt bestimmt: Die Energie der Protonen war bekannt, da sie aus einer Beschleunigungsapparatur stammten, und die Energie der α-Teilchen wurde aus ihren Reichweiten bestimmt. Als Ergebnis erhielt man $Q = 17{,}2$ MeV in Übereinstimmung mit der obigen Zahl.

Die voneinander unabhängigen Bestimmungen der Reaktionsenergie auf zwei verschiedenen Wegen erlaubte an einem umfangreichen Material die Energie-Masse-Beziehung $E = mc^2$, die eine große Rolle in der Kernphysik spielt, nachzuprüfen. Man stellte dabei fest, daß diese Beziehung mit derselben Genauigkeit gerechtfertigt ist, mit der die Reaktionsenergien nach den kinetischen Energien der an der Reaktion beteiligten Teilchen bestimmt sind. Wir führen einige Beispiele an.

Tabelle XLVII

Reaktion	Beobachtetes Q (in MeV)	Berechnetes Q (in MeV)
$D^2 + D^2 \rightarrow H^3 + H^1$	$3{,}98 \pm 0{,}02$	3,98
$Li^6 + H^1 \rightarrow He^4 + He^3$	$3{,}72 \pm 0{,}08$	3,76
$Li^6 + D^2 \rightarrow 2He^4$	$22{,}07 \pm 0{,}07$	22,17
$B^{10} + D^2 \rightarrow B^{11} + H^1$	$9{,}14 \pm 0{,}06$	9,30
$O^{16} + D^2 \rightarrow N^{14} + He^4$	$3{,}13 \pm 0{,}13$	3,11

Die Übereinstimmung der Zahlen, die man für Q erhält, kann an Hand von Kreisprozessen gut nachgeprüft werden.

Wir betrachten folgende Reaktionen:

1. $Be^9 + H^1 = Li^6 + He^4 + 2{,}28\,\text{MeV}$.
2. $Be^9 + D^2 = Li^7 + He^4 + 7{,}19\,\text{MeV}$.
3. $Li^6 + D^2 = Li^7 + H^1 + 5{,}02\,\text{MeV}$.

Durch Addition von 1 und 3 ergibt sich

$$Be^9 + D^2 = Li^7 + He^4 + 7{,}30\,\text{MeV},$$

während die Reaktion 2 den Wert $Q = 7{,}19$ MeV liefert.

Da die Beziehung $E = mc^2$ bei allen Nachprüfungen sehr gut bestätigt wurde und da andererseits die Isotopenmassen mit Massenspektrographen äußerst genau bestimmt werden können, ist es zur Bestimmung von Q zweckmäßiger, Massenvergleiche und nicht die direkte Bestimmung der kinetischen Energien heranzuziehen. Ist aber die Masse eines Reaktionsprodukts nicht genau bekannt, so kann die Beziehung $E = mc^2$ zur Bestimmung der unbekannten Masse herangezogen werden. Dieses Verfahren wird in der Praxis auch tatsächlich angewandt.

Wir wollen hier einen historischen Rückblick einschieben. Die Energie-Masse-Beziehung für das elektromagnetische Feld wird auf Grund des von P. N. Lebedew entdeckten Lichtdrucks abgeleitet. In ihrer allgemeinsten Form ist diese Beziehung für beliebige Energiearten eine Folgerung der speziellen Relativitätstheorie. D. I. Mendelejew sprach jedoch schon lange vor der Entstehung der Relativitätstheorie, und zwar im Jahre 1871, den Gedanken aus, daß ein Zusammenhang zwischen Masse und Energie bestehe und daß sich dieser möglicherweise bei chemischen Prozessen bemerkbar machen könne. Speziell wurde von Mendelejew angenommen, daß Atome ein und desselben Elements in verschiedenen Valenzzuständen etwas unterschiedliche Atomgewichte haben können, da in den verschiedenen Valenzzuständen die Atome verschiedene Energie besitzen. In den Jahren 1881 bis 1882 führte ein anderer großer russischer Chemiker, A. M. Butlerow, der denselben Weg ging, genaue Atomgewichtsbestimmungen an Quecksilber und Quecksilberdichlorid aus, wobei er zur Bildung des letzteren einmal Chlor, das er vorher starker Sonnenstrahlung ausgesetzt hatte, und einmal unbestrahltes Chlor verwandte. Butlerow glaubte, daß sich die zusätzliche Energie, die das Chlor im ersten Fall erhalten hat, in einer gewissen Vergrößerung des Atomgewichts des Quecksilbers im $HgCl_2$, das aus solchem Chlor hergestellt war, äußern würde. Diese Versuche hatten ebenso wie die genauen Prüfungen des

Massenerhaltungsgesetzes bei chemischen Reaktionen, die zu Beginn des XX. Jahrhunderts angestellt wurden, ein negatives Ergebnis (dabei wurde natürlich „Masse“ im engen Sinne, d. h. als Ruhemasse der Reaktionsprodukte ohne Berücksichtigung der Masse, die der entstandenen Energie entspricht, verstanden). Der Grund dieses Mißerfolges ist uns jetzt bekannt. Da die der Energie E entsprechende Masse gleich $\frac{E}{c^2}$ ist und c^2 den sehr großen Wert $9 \cdot 10^{20}$ hat, liegt die Änderung der Ruhemasse bei den Energiewerten, mit denen wir es bei den gewöhnlichen chemischen Reaktionen zu tun haben, weit unter der Empfindlichkeitsgrenze physikalischer Geräte. Nur bei Kernreaktionen, bei denen die Energien mindestens einige hunderttausendmal größer als bei den gewöhnlichen chemischen Reaktionen sind, ist eine Beobachtung des Zusammenhangs von Masse und Energie möglich. Dabei gilt streng genommen das Massenerhaltungsgesetz in allen Fällen; man muß die Reaktionsgleichung nur in der Form

$$A + B = C + D + \frac{Q}{c^2}$$

schreiben, wobei Q die freigewordene oder verbrauchte Energie ist, der man die Masse $\frac{Q}{c^2}$ zuordnen muß, wenn die Massen A, B, C und D in Gramm ausgedrückt werden.

Wir bemerken zum Schluß, daß die besonders in der populären Literatur häufig anzutreffende Behauptung einer angeblichen „Umwandlung von Masse in Energie“ völlig falsch ist. Masse und Energie sind verschiedene Eigenschaften der Materie, zwischen denen ein Zusammenhang, der durch die Beziehung

$$E = mc^2$$

ausgedrückt wird, besteht.

§ 260. Die gleichzeitige Anwendung des Energie- und Impulssatzes

Wir kehren jetzt zur Bestimmung der Reaktionsenergie zurück. Bis jetzt haben wir in unseren Rechnungen nur den Energiesatz benutzt. Man muß jedoch auch den Impulssatz in Betracht ziehen. Stellen wir z. B. die folgende Frage: Wir haben weiter oben gesehen, daß die Energie der Reaktion $N^{14} + He^4 \to O^{17} + H^1$ gerade $-1{,}13$ MeV beträgt. Bedeutet das, daß schon ein α-Teilchen mit einer Energie von 1,13 MeV diese Reaktion auslösen kann? Die Frage ist aus Gründen, die wir sofort kennenlernen werden, zu verneinen.

Man sieht, daß für die Reaktion die kinetische Energie der *relativen* Bewegung zwischen dem Kerngeschoß und dem beschossenen Kern und nicht die kinetische Energie des Kerngeschosses relativ zu einem „unbeweglichen“ Koordinatensystem maßgebend ist. Dieses „*unbewegliche*“ System nennen wir Laborsystem, und als anderes Koordinatensystem benutzen wir das System in dem der Schwerpunkt beider Teilchen ruht (System des Schwerpunkts). Die Lage des Schwerpunkts im Laborsystem wird durch die Formel

$$\mathfrak{r}_c = \frac{m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{51,4}$$

gegeben, wobei $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die Radiusvektoren beider Teilchen ebenfalls im Laborsystem sind (siehe Teil I, § 51). Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts beträgt

$$\mathfrak{v}_c = \dot{\mathfrak{r}}_c = \frac{m_1 \dot{\mathfrak{r}}_1 + m_2 \dot{\mathfrak{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Geschwindigkeit des ersten Teilchens in bezug auf den Schwerpunkt ist gleich

$$\mathfrak{v}'_1 = \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_c = \mathfrak{v}_1 - \frac{m_1\mathfrak{v}_1 + m_2\mathfrak{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2).$$

Man sieht ferner, daß auch

$$\mathfrak{v}'_2 = \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)$$

gilt. Die kinetische Energie der relativen Bewegung wird also durch

$$E_S = \frac{1}{2} m_1 \mathfrak{v}'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathfrak{v}'^2_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)^2 \tag{260,1}$$

dargestellt; wobei

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{51,7}$$

die reduzierte Masse beider Teilchen bedeutet. Analog kann man leicht beweisen, daß sich die *gesamte* kinetische Energie, d. h. die kinetische Energie in bezug auf das Laborsystem

$$E_{\text{Lab}} = \frac{1}{2} m_1 \mathfrak{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathfrak{v}_2^2,$$

als Summe aus E_S und der kinetischen Energie des Schwerpunkts, in dem die ganze Masse des Systems vereinigt ist, darstellen läßt:

$$E_{\text{Lab}} = E_S + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathfrak{v}_c^2.$$

Wenn die gesamte kinetische Energie des eingeschossenen Teilchens (d. h. die kinetische Energie im Laborsystem) gleich der Reaktionsenergie ist, dann ist es klar, daß diese zur Auslösung der Reaktion nicht ausreicht, da ein Teil der kinetischen Energie auf die Bewegung des Schwerpunkts kommt.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Geschwindigkeit des beschossenen Kerns gleich Null sei; dies entspricht praktisch den realen Bedingungen, wenn man in Betracht zieht, daß die Teilchen, die als Geschosse dienen, eine sehr große Geschwindigkeit haben. Man erhält dann

$$E_{\text{Lab}} = \frac{1}{2} m_1 \mathfrak{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)^2,$$

da $\mathfrak{v}_2 = 0$ ist. Durch Vergleich mit (260,1) ergibt sich

$$E_S = E_{\text{Lab}}\frac{\mu}{m_1} = E_{\text{Lab}}\frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

und daraus

$$E_{\text{Lab}} = E_S\frac{m_1 + m_2}{m_2}. \tag{260,2}$$

In unserem Beispiel ist die Reaktion möglich, wenn E_S mindestens gleich 1,13 MeV ist; ferner ist hier $m_2 = 14$, $m_1 + m_2 = 18$. Also gilt

$$E_{\text{Lab}} = 1{,}13 \cdot \frac{18}{14} = 1{,}45 \text{ MeV}.$$

Wenn die Reaktionsenergie Q bekannt ist, kann man mit Hilfe des Energie- und des Impulssatzes die Geschwindigkeit und die Energie des bei der Reaktion freigewordenen Teilchens, z. B. eines Neutrons, bestimmen. Wir bezeichnen mit E_0, E_1, E_2, E_3 entsprechend

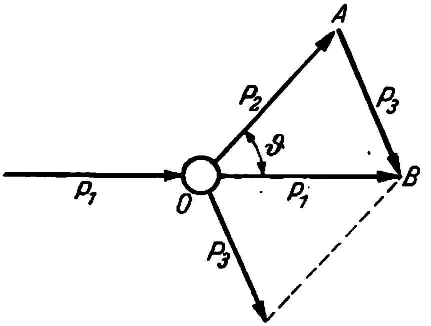


Abb. 337. Vektordiagramm der Impulse

die kinetischen Energien des beschossenen Kerns, des eingeschossenen Teilchens, des freigewordenen Teilchens und des neuen Kerns. Die kinetische Energie des primären Kerns kann man immer gleich Null setzen, $E_0 = 0$. Der Energiesatz liefert

$$E_1 + Q = E_2 + E_3,$$

woraus man

$$Q = E_2 + E_3 - E_1 \tag{260,3}$$

erhält. Nach dem Impulssatz gilt (Abb. 337)

$$\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2 .$$

Aus dem Vektordiagramm erhält man ferner

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \vartheta , \tag{260,4}$$

wobei ϑ der Winkel zwischen der Richtung des eingeschossenen und dem freigewordenen leichten Teilchen ist. Wenn wir die Massenzahlen der Reaktionspartner mit A_1, A_2, A_3 bezeichnen und die Beziehung

$$E = \frac{p^2}{2A}$$

zwischen Impuls und Energie benutzen, erhalten wir (260,4) in der Gestalt

$$A_3E_3 = A_1E_1 + A_2E_2 - 2 \cos \vartheta \sqrt{A_1A_2E_1E_2}. \tag{260,5}$$

Wir setzen E_3 aus (260,5) in (260,3) ein und finden

$$Q = \left(1 + \frac{A_2}{A_3}\right) E_2 - \left(1 - \frac{A_1}{A_3}\right) E_1 - 2\,\frac{\sqrt{A_1 A_2 E_1 E_2}}{A_3}\cos\vartheta\,. \qquad (260,6)$$

Die Reaktionsenergie kann man auf einem unabhängigen Wege finden, wenn die genauen Massen der Reaktionspartner bekannt sind

$$Q = [(M_0 + M_1) - (M_2 + M_3)]\,c^2\,.$$

Kennt man Q und E, dann ergibt sich aus (260,6) die Energie des herausfliegenden Teilchens für einen beliebigen Winkel ϑ.

Als Anwendung dieses Ergebnisses betrachten wir die Kernreaktion, die beim Zusammenstoß zweier Deuteronen entsteht:

$$_1\mathrm{D}^2 + {_1\mathrm{D}^2} \rightarrow {_2\mathrm{He}^3} + {_0n^1}\,. \qquad (260,7)$$

Wie man sieht, endet die Reaktion mit der Bildung des leichten Heliumisotops He^3 und eines Neutrons. Sie hat große praktische Bedeutung als Quelle von Neutronen bestimmter Energie[1]). Wir berechnen die Energie der Reaktion (260,7):

$$\begin{array}{rl} \mathrm{D}^2 = 2{,}01471 & \qquad \mathrm{He}^3 = 3{,}01700 \\ \mathrm{D}^2 = 2{,}01471 & \qquad n^1 = 1{,}00893 \\ \hline 2\mathrm{D}^2 = 4{,}02942 & \qquad \mathrm{He}^3 + n^1 = 4{,}02593 \\ - \quad \mathrm{He}^3 + n^1 = 4{,}02604 & \\ \hline \end{array}$$

$$Q = 0{,}00349\ ME \cdot 931\,\frac{\mathrm{MeV}}{ME} = 3{,}25\ \mathrm{MeV}.$$

Die Reaktion wird gewöhnlich durch Beschuß von schwerem Eis mit Deuteronen ausgelöst. Sie läßt sich sehr leicht anregen und gibt schon bei Deuteronenenergien von $E_1 = 50$ keV eine beachtliche Neutronenausbeute. Nach Formel (260,6) ist die Neutronenenergie für ein und dasselbe Q verschieden, wenn die Neutronen nach verschiedenen Richtungen ausgesandt werden (im Laborsystem). Man sieht, daß E_2 den größten Wert für $\vartheta = 0°$ (Aussendung der Neutronen nach vorn) und den kleinsten für $\vartheta = 180°$ hat. Diese Tatsache ist vom physikalischen Standpunkt vollkommen verständlich. Im System des Schwerpunkts hängt die Geschwindigkeit der Neutronen offenbar nicht von der Richtung der Emission ab. Aber beim Übergang zum Laborsystem ist zu den Geschwindigkeiten im System des Schwerpunkts vektoriell die Geschwindigkeit des Schwerpunkts zu addieren, die immer nach vorn gerichtet ist. Für den Winkel $\vartheta = 90°$ ist $\cos\vartheta = 0$, und (260,6) liefert

$$E_2 = \frac{A_3}{A_3 + A_2}\left(Q + \frac{A_3 - A_1}{A_3} E_1\right).$$

---

[1]) Außer der Reaktion (260,7) kann beim Zusammenstoß zweier Deuteronen auch die Reaktion

$$_1\mathrm{D}^2 + {_1\mathrm{D}^2} \rightarrow {_1\mathrm{H}^1} + {_1\mathrm{H}^3}$$

stattfinden, bei der überschwerer Wasserstoff H^3, Tritium, entsteht. Diese Reaktion wird uns jedoch hier nicht interessieren.

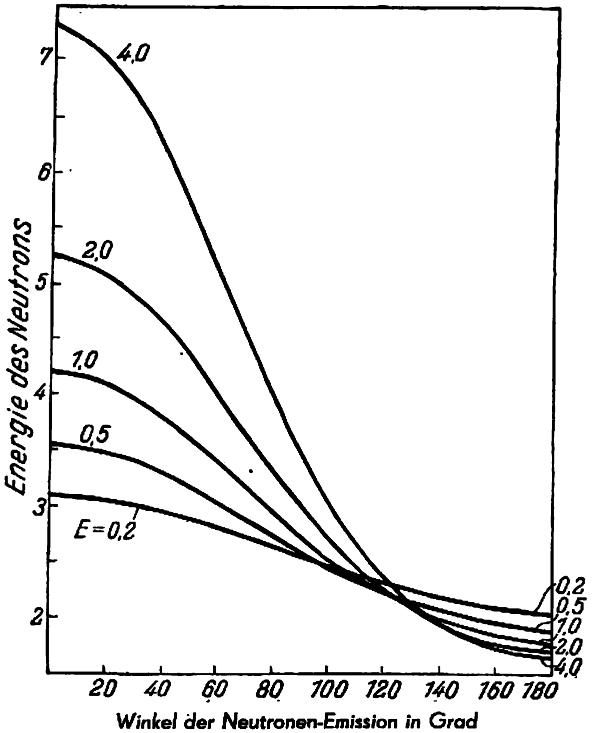


Abb. 338. Abhängigkeit der Neutronenenergie (in MeV) vom Winkel der Emission für verschiedene Energien der eingeschossenen Deuteronen (die Deuteronenenergie ist in MeV neben den Kurven angegeben)

In unserem Fall ist $A_3 = 3$, $A_2 = 1$, $A_1 = 2$ und

$$E_n = E_2 = \frac{3}{4}\left(Q + \frac{2}{3}E_1\right) = \frac{3}{4}Q + \frac{1}{4}E_1 .$$

Wir sehen, daß für $\vartheta = 90^\circ$ die ausgelösten Neutronen eine größere kinetische Energie als die eingeschossenen Deuteronen haben. In Abb. 338 sind Kurven angegeben, die die Abhängigkeit der Neutronenenergien vom Winkel der Emission für verschiedene Energien der eingeschossenen Deuteronen (Zahlen an den Kurven) darstellen. Man sieht, daß man mit Deuteronenenergien $E_D = 200$ keV Neutronen mit 2,2 bis 3,1 MeV erzeugen kann. Bei einer Energie $E_D = E_1 = 4$ MeV erhält man Neutronen mit Energien von 1,65 bis 7,30 MeV.

§ 261. Der Wirkungsquerschnitt

Ein Teilchen, das mit einem Kern „zusammenstößt", kann entweder eine Kernreaktion hervorrufen oder gestreut werden. Der Mechanismus dieser Prozesse wird im folgenden betrachtet. Für uns ist hier die Bemerkung wichtig, daß jedem Prozeß eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zukommt. In der Kernphysik ist es üblich, diese Wahrscheinlichkeit durch

den *Wirkungsquerschnitt* des gegebenen Prozesses zu charakterisieren. Dem Begriff „Wirkungsquerschnitt“ sind wir schon in Teil I, § 24, begegnet. Dort wurde dieser Begriff am Beispiel der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Atomen erklärt. Das dort Gesagte kann man auch auf die Wechselwirkungen zwischen Kernteilchen anwenden.

Betrachten wir einen parallelen „monochromatischen“ Neutronenstrom, d. h. Neutronen bestimmter Energie. Beim Durchgang durch eine Stoffschicht werden zwischen den Neutronen und den Kernen Wechselwirkungen stattfinden, bei denen die Neutronen aus dem Parallelbündel ausscheiden werden. Wenn wir voraussetzen, daß sich die Wahrscheinlichkeit der uns interessierenden Wechselwirkung (z. B. des Neutroneneinfanges) beim Durchgang durch die ganze Schicht der Dicke x nicht ändert, kann man für die Intensität des Stromes (der gleich der Zahl der Neutronen ist, die durch 1 cm² in 1 sec gehen) folgenden einfachen Ausdruck aufschreiben:

$$J = J_0 e^{-n\sigma x}; \tag{261,1}$$

er wurde in § 24 abgeleitet. Hier bedeuten J und J_0 die Intensitäten des Stroms nach bzw. vor dem Durchgang durch die Schicht; n ist die Anzahl der Kerne in 1 cm³ (Dimension cm^{-3}); σ ist der Wirkungsquerschnitt des Prozesses in cm². σ hat folgende anschauliche Bedeutung: Man stelle sich eine runde Zielscheibe der Fläche σ vor; dann ruft jedes Teilchen, das durch diese Scheibe geht, die gegebene Wechselwirkung mit dem Kern hervor. Das Produkt $n \cdot \sigma$ ist die Summe der Wirkungsquerschnitte der in 1 cm³ enthaltenen Kerne und wird makroskopischer Querschnitt genannt.

$$\Sigma = n\sigma. \tag{261,2}$$

$n \cdot \sigma$ hat die Dimension $\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3}$ oder cm^{-1}.

Da J die Zahl der Teilchen bedeutet, die durch die Schicht gegangen sind, ohne eine Wechselwirkung erlitten zu haben, ist die Zahl der Teilchen, die eine Reaktion eingehen, gleich

$$J_0 - J = J_0 (1 - e^{-n\sigma x}). \tag{261,3}$$

Die Einheit des Wirkungsquerschnittes σ ist 10^{-24} cm² [1]; sie ist der Größenordnung nach dem Kernquerschnitt gleich.

Um eine Anwendung der Formel (261,3) zu geben, betrachten wir folgendes Beispiel. Indium wird oft zur Anzeige langsamer Neutronen benutzt. Das ist deshalb möglich, weil das Hauptisotop des Indiums, $_{49}\text{In}^{115}$, sich durch Einfang eines Neutrons in das β^--radioaktive Isotop In^{116} verwandelt. Der Wirkungsquerschnitt des In^{115} für den Einfang von Neutronen beträgt $\sigma = 190 \cdot 10^{-24}$ cm². Wir wollen nun ausrechnen, wieviel Atome des In^{116} in einer In-Folie von 10 cm² Fläche und 0,3 mm Dicke durch die Einwirkung eines Neutronenstroms mit der Intensität 10^7 Neutronen/cm² sec entstehen. Da das Atomgewicht des Indiums gleich 114,76 und die Dichte gleich 7,3 ist[2]), erhält man

$$n = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 7{,}3}{114{,}76} = 3{,}83 \cdot 10^{22} = 0{,}0383 \cdot 10^{24}.$$

---

[1]) Internationale Bezeichnung: 10^{-24} cm² = 1 barn. (Anm. d. Red.)

[2]) Bei Rechnungen ist es zweckmäßig, die Zahl n als Vielfaches von 10^{24} auszudrücken, da diese Zahl bei der Multiplikation mit dem Wirkungsquerschnitt verschwindet.

Für $J_0 = 10^7$ und $x = 0{,}03$ cm liefert die Formel (261,3)

$$J_0 - J = 10 \cdot 10^7 (1 - e^{-0{,}0383 \cdot 190 \cdot 0{,}03}) = 10^8 (1 - e^{-0{,}218}) = 2 \cdot 10^7 .$$

Es ist nützlich, zu bemerken, daß die in 1 sec gebildeten $2 \cdot 10^7$ Atome des In^{116} die Masse

$$\frac{114{,}76 \cdot 2 \cdot 10^7}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 3{,}8 \cdot 10^{-15}\ \text{g}$$

besitzen, d. h., sie bilden praktisch eine „unwägbare“ Menge, und nur wegen der großen Energie, die bei Kernreaktionen frei wird, und der Empfindlichkeit der kernphysikalischen Experimentiermethoden, sind derartige Umwandlungen der Beobachtung zugänglich.

Wir betrachten noch ein Beispiel für die Anwendung des Begriffs des Wirkungsquerschnittes. Es ist bekannt, daß Cadmium einen sehr großen Wirkungsquerschnitt für die Absorption langsamer Neutronen besitzt: $\sigma = 2500 \cdot 10^{-24}$. Es fragt sich nun, um welchen Faktor der Neutronenstrom beim Durchgang durch eine Schicht von 1 mm Cd geschwächt wird. Das Atomgewicht des Cadmiums beträgt 112,4, die Dichte 8,6. Daraus erhalten wir, wie oben, $n = 0{,}046 \cdot 10^{24}$, so daß $n\sigma = 2500 \cdot 0{,}046 = 115$ wird. Wegen $x = 0{,}1$ ergibt sich

$$\frac{J}{J_0} = e^{-11{,}5} = 3 \cdot 10^{-7} ,$$

d. h., die Absorption ist praktisch vollständig.

Man unterscheidet den totalen Wirkungsquerschnitt und Querschnitte für einzelne Prozesse. Das Neutron kann z. B. gestreut oder absorbiert werden. Die Wirkungsquerschnitte dieser beiden Prozesse σ_s und σ_a ergeben zusammen den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_a .$$

Die Formeln (261,1) und (261,2) beziehen sich auf den totalen Wirkungsquerschnitt. In vielen Fällen ist jedoch $\sigma_a \gg \sigma_s$. Dann gilt $\sigma \approx \sigma_a$. Die Querschnittsgröße hängt wesentlich von den Reaktionsbedingungen ab, speziell von der Energie der einfallenden Teilchen. Zu dieser Tatsache werden wir im folgenden des öfteren zurückkehren.

§ 262. Der Zwischenkern

Die ursprüngliche Vorstellung vom Mechanismus der Kernreaktion bestand darin, daß ein in den Kern eingedrungenes Teilchen (z. B. ein Proton oder ein α-Teilchen) seine Energie einem Teilchen des Kerns übergibt und dieses letztere dann aus dem Kern herausfliegt. Diese Vorstellung entspricht nicht den heutigen Kenntnissen vom Kernaufbau und von den charakteristischen Eigenschaften der Kernwechselwirkungen. Die „Zusammenstöße“ der einfallenden Teilchen mit dem Kern unterscheiden sich sehr wesentlich von den Zusammenstößen der Elektronen mit der Elektronenhülle. Wenn das Elektron durch die Elektronenhülle tritt, dann erfährt es meist eine elastische Streuung, d. h., es ändert einfach seine Flugrichtung. In einigen Fällen kann es seine Energie teilweise an ein Hüllenelektron abgeben, d. h., eine unelastische Streuung erfahren, durch die das Atom angeregt oder ionisiert wird. In allen Fällen fliegt jedoch das Elektron wegen der außerordentlichen Durchsichtigkeit der Hülle frei durch das Atom und erfährt nur eine geringe Wechselwirkung mit der Hülle.

Ein anderes Bild erhalten wir bei der Betrachtung der starken Wechselwirkung eines einfallenden Teilchens mit dem Kern[1]). Letzterer hat eine sehr dicht gedrängte Struktur. Die Kernkräfte wirken nur in sehr kleinen Entfernungen, dort sind sie aber sehr groß. Deshalb erfährt ein Teilchen, das sich dem Kern bis auf den Wirkungsradius der Kernkräfte genähert hat, eine starke Wechselwirkung mit den nächsten Kernteilchen und gibt ihnen einen bedeutenden Teil seiner Energie ab. Dieser Energieverlust wird auch bei der weiteren Bewegung des Teilchens im Kern ununterbrochen anhalten. Dadurch wird die Energie des einfallenden Teilchens sehr schnell auf alle Nukleonen des Kerns verteilt. Sogar wenn der Energiebetrag so groß ist, daß er zum Zerfall des Kerns genügt, reicht die Energie, die auf ein Kernteilchen kommt, noch nicht zu dessen Loslösung aus.

In der ersten Etappe der Kernreaktion fängt also der Kern das Teilchen ein, und es bildet sich ein sehr stark angeregter Zwischenkern (der mitunter auch „Compoundkern" genannt wird).

Die Anregungsenergie des Zwischenkerns kann so groß sein, daß sich der Kern in einem Zustand mit positiver Energie befindet, dessen Niveau über dem Potentialwall liegt, und trotzdem zerfällt der Kern während einer gewissen Zeit nicht, da sich diese Energie auf viele Teilchen verteilt.

In der zweiten Etappe der Reaktion kann ein Teilchen wegen der Fluktuation in der Energieverteilung zwischen den Nukleonen aus dem angeregten Kern herausfliegen. Dies geschieht, wenn sich bei dieser Fluktuation auf irgendein Teilchen eine zur Loslösung ausreichende Energiemenge konzentriert. Dabei kann es passieren, daß das herausgeflogene Teilchen von der gleichen Art wie das hineingeflogene ist, es kann aber auch andersartig sein (es fliegt z. B. ein Neutron hinein und ein Proton heraus), und es ist schließlich möglich, daß das hineinfliegende Teilchen vom Kern eingefangen wird und sich dieser vom Energieüberschuß durch Abgabe eines γ-Quants befreit.

Man sieht jedoch leicht, daß die Zeit vom Beginn der ersten Reaktionsetappe (Bildung des Zwischenkerns) bis zum Schluß der zweiten Etappe verhältnismäßig groß ist. Damit diese Behauptung vollkommen klar wird, ist es nur notwendig, daß wir uns über die natürliche Einheit der Kernzeit einig werden. Es ist zweckmäßig, als diese Einheit die Zeit festzusetzen, die ein schnelles Neutron braucht, um eine Strecke zurückzulegen, die dem Kernradius gleich ist, d. h. der Größenordnung nach

$$\frac{10^{-13}\,\mathrm{cm}}{10^{9}\,\mathrm{cm/sec}} = 10^{-22}\,\mathrm{sec}.$$

Daraus folgt, daß der Einfang eines Teilchens durch den Kern mit Bildung eines Zwischenkerns und die Aussendung eines Teilchens durch eine große Zeitspanne in Kerneinheiten getrennt sind. Wir haben es also mit zwei *voneinander unabhängigen Etappen der Kernreaktion* zu tun. Daraus folgt, daß dieser oder jener Zerfallstyp oder auch die Aussendung von γ-Strahlung durch den angeregten Kern nicht mit der ersten Etappe des Prozesses, d. h. mit dem Einfang des eingeschossenen Teilchens, zusammenhängt, sondern daß es sich hier um ein Ergebnis handelt, das sich aus der Konkurrenz aller möglichen Reaktionen ergibt. Wir führen ein Beispiel an. Während der ersten Etappe möge ein Neutron vom Kern ${}_{13}Al^{27}$ eingefangen und der angeregte Zwischenkern ${}_{13}Al^{28*}$ gebildet worden sein. Dieser

[1]) Die weiteren Überlegungen sind nicht auf Fälle anwendbar, bei denen die Energie des eingeschossenen Teilchens die Bindungsenergie der Nukleonen im Kern um ein Vielfaches übersteigt. Was die Erscheinungen bei sehr hohen Energien ($\sim$ 100 MeV) betrifft, siehe § 269

angeregte Kern kann als zweite Etappe folgende Umwandlungen erfahren:

$$_{13}\mathrm{Al}^{27} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{13}\mathrm{Al}^{28*} \rightarrow \begin{cases} {}_{12}\mathrm{Mg}^{27} + {}_1\mathrm{H}^1 \\ {}_{11}\mathrm{Na}^{24} + {}_2\mathrm{He}^4 \\ {}_{13}\mathrm{Al}^{28} + \gamma \\ {}_{13}\mathrm{Al}^{26} + 2{}_0n^1 \end{cases}$$

Unter den hier für den Mechanismus der Kernreaktion entwickelten Gesichtspunkten hängt die Frage, welche der im Schema dargestellten Umwandlungen der Kern Al^{28*} erlebt, keinesfalls davon ab, wie der Zwischenkern Al^{28*} entstanden ist. Es kommt ausschließlich auf die entsprechende Wahrscheinlichkeit an, daß dieser Kern gerade eine gegebene Umwandlung erleidet. Durch eine beliebige Reaktion aus dem rechten Teil des Schemas kann sogar bei entsprechenden Bedingungen, d. h. bei ausreichender Energie des leichten Teilchens (Proton, Neutron, α-Teilchen oder γ-Quant) ein Zwischenkern Al^{28*} entstehen. Die zweite Reaktionsetappe (einschließlich der Emission eines Neutrons, d. h. der umgekehrte Prozeß wie im linken Teil des Schemas) hängt dabei wiederum nur von der relativen Wahrscheinlichkeit aller möglichen konkurrierenden Prozesse ab.

Das beschriebene allgemeine Schema der Kernreaktionen wurde 1934 von Bohr entwickelt und ist heute allgemein anerkannt.

J. I. Frenkel ging von einem besonderen Gesichtspunkt, der sich als sehr fruchtbar erwies, an die Erklärung des Zwischenkernzerfalls heran. Die Energie des Kerns, der aus einer ausreichenden Anzahl von Teilchen besteht, die laufend ihre Energie austauschen, kann man als Wärmeenergie betrachten. Mit den Methoden der statistischen Thermodynamik kann man deshalb die Begriffe der Entropie und Temperatur des Kerns einführen. Die Erhöhung der mittleren Energie der Kernteilchen beim Einfang eines auffallenden Teilchens kann man von diesem Standpunkt aus als Temperaturerhöhung und die Aussendung eines Teilchens als Verdampfung, die mit einer Temperaturerniedrigung verbunden ist, betrachten.

Die mittlere kinetische Energie der Teilchen im Kern ist von der Größenordnung 10 MeV. Wenn wir es mit einem Gas, das aus unabhängigen Teilchen dieser mittleren Energie besteht, zu tun hätten, dann müßte dem Gas die phantastische Temperatur[1])

$$11\,606 \cdot 10^7 = 11{,}6 \cdot 10^{10} \text{ Grad K},$$

d. h. Hunderte von Milliarden Grad zukommen. Vom Standpunkt der thermodynamischen Bedingungen im Kern aus ist diese Temperatur jedoch „tief". Das ist schon deshalb verständlich, weil die Kerntemperatur durch den Einfang eines Teilchens bedeutend erhöht und durch die „Verdampfung" bedeutend erniedrigt wird. Die Kerntemperatur charakterisiert man zweckmäßig nicht durch Grad, sondern durch die Größe kT in MeV. Eine Rechnung zeigt, daß Kerne mittlerer Masse ($A \sim 100$) und schwere Kerne ($A \sim 200$) für verschiedene Anregungsenergien die in Tabelle XLVIII aufgeführten Temperaturen besitzen.

Wir sehen, daß diese Temperaturen in der Kerntemperaturskala wirklich niedrig sind. Für leichte Kerne liegen sie ein wenig höher als für schwere, da sich ein und dieselbe Energie in leichten Kernen auf weniger Teilchen verteilt.

---

[1]) Die Temperatur 11606° entspricht der mittleren Energie eines Teilchens von 1 eV und ergibt sich aus der Beziehung $1{,}6 \cdot 10^{-12} = kT$.

Tabelle XLVIII

Massenzahl	Anregungsenergie in MeV	Temperatur in MeV
100	5	0,9
100	10	1,2
100	20	1.5
200	5	0,7
200	10	1.0
200	20	1,2

Diese Analogie der „Kernerwärmung“ oder „Nukleonenverdampfung“ werden wir im weiteren oft zu qualitativen Voraussagen über den Reaktionsverlauf bei dieser oder jener Energie des einfallenden Teilchens heranziehen. Es ist z. B. klar, daß die Aussendung eines Teilchens sehr unwahrscheinlich ist, wenn diese Energie klein ist. Andererseits wird die „Erwärmung“ bei sehr großer kinetischer Energie des einfallenden Teilchens (von der Größenordnung einiger hundert MeV) so stark sein, daß sogar die „Verdampfung“ mehrerer Teilchen möglich ist usw. J. I. Frenkel, L. D. Landau, N. Bohr u. a. zogen analoge thermodynamische Überlegungen zu quantitativen Berechnungen heran. Wir wollen uns hier nicht mit einer Darstellung der Kernthermodynamik aufhalten[1]). Wir möchten nur eine sehr anschauliche Zeichnung wiedergeben, die dieses thermodynamische Bild der Kernreaktion illustriert[2]) (Abb.339). Hier ist rechts ein Kernthermometer mit Einteilungen von 10^{10} Grad C oder MeV, wie sie den Kerntemperaturen entsprechen, dargestellt. In den übrigen Teilen der Zeichnung sind die verschiedenen Stadien der Prozesse, die durch Einfang von Neutronen ausgelöst werden, wiedergegeben. In den Kern ist jedesmal das „Schein“-Thermometer eingeführt. Am Anfang befindet sich der Kern im Normalzustand (1). Er ist glatt, und die Temperatur ist gleich Null. Beim Einfallen eines Neutrons mit der kinetischen Energie 10 MeV erhöht sich die Kernenergie auf 18 MeV, und die Temperatur steigt auf etwa 1 MeV (2). Der Kern führt dabei lebhafte Schwingungen aus, was durch seine unregelmäßige Umrandung angedeutet ist. Das folgende Bild (3) zeigt die Aussendung („Verdampfung“) eines Teilchens aus dem Kern; die Kerntemperatur fällt dabei. Sie kehrt aber nicht auf Null zurück, da es sehr unwahrscheinlich ist, daß das Teilchen die gesamte Anregungsenergie erhalten hat. Die Schwingungen des Kerns halten an, wenn auch mit geringerer Amplitude. In der letzten Etappe (4) wird der verbliebene Rest an Anregungsenergie als elektromagnetische Strahlung abgegeben, und die Temperatur fällt wieder auf Null.

[1]) Eine verständliche Darstellung dieser Fragen siehe J. I. Frenkel: „Prinzipien der Atomkerntheorie“, Kap. VI (Я. И. Френкель: „Принципы теории атомных ядер“, гл. VI. AH CCCP, 1950.) Ausführlicher bei A. Achieser und I. Pomerantschuk: „Einige Fragen der Kerntheorie“, Kap. II (А. Ахиезер и И. Померанчук: „Некоторые вопросы теории ядра“, гл. II, Гостехиздат, 1951). Siehe auch J. M. Blatt und V. F. Weisskopf: Theoretical Nuclear Physics, p. 367 ff., Wiley, New York, 1952.

[2]) N. Bohr, Umwandlungen von Atomkernen. Vortrag in der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Moskau im Juni 1937, Успехи физических наук, XVIII, 337, 1937.

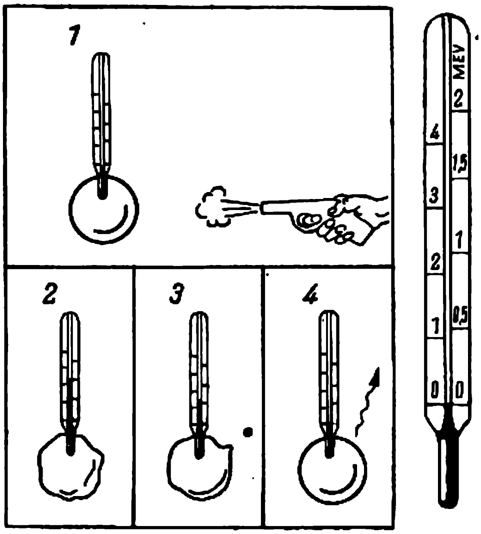


Abb. 339. Das „Kernthermometer"

§ 263. Der Kern als quantenmechanisches System

Die im letzten Paragraphen dargestellten Überlegungen beruhen auf einer einfachen Analogie zur Mechanik. Bei der Behandlung von Kernreaktionen darf man jedoch auch die Quantengesetze nicht außer acht lassen. Deshalb müssen wir jetzt die Eigenschaften des Kerns als quantenmechanisches System betrachten.

Da der Kern eine Gesamtheit von Protonen und Neutronen darstellt, deren Wechselwirkung hauptsächlich von den Kernkräften mit ihren charakteristischen Eigenschaften (Sättigung, Wirkung auf kleine Entfernungen) bestimmt wird, ist die Behandlung des Kerns als quantenmechanisches System völlig anders, als es bei der Elektronenhülle der Fall war. Im letzteren Fall haben wir es ebenfalls mit einem Teilchensystem zu tun, und die mathematische Aufgabe ist auch ein Vielkörperproblem. Die Wesenszüge dieses Problems liegen bei der Elektronenhülle in folgendem. Die Elektronen erfahren Wechselwirkungen mit dem Kern und untereinander. Da jedoch die Anziehungskraft des Kerns für jedes Elektron größer als seine Wechselwirkung mit den übrigen Elektronen ist, kann man das Problem für mittlere und schwere Kerne nach der Methode der sukzessiven Approximationen lösen. In der nullten Näherung kann man annehmen, daß die Elektronen untereinander keine Wechselwirkungen ausüben und die Bewegung jedes Elektrons betrachten, als ob die übrigen Elektronen überhaupt nicht vorhanden wären. Dadurch wird das Problem außerordentlich vereinfacht und auf ein Zweikörperproblem reduziert. In der nächsten Näherung wird dem Einfluß der übrigen Elektronen auf die Bewegung des ausgewählten Elektrons als schwache Störung Rechnung getragen.

Dieses Rechenverfahren, das eine große Rolle beim Studium der Atomhülle spielt, kann nicht auf Kerne angewandt werden, da es erstens im Kern kein ausgezeichnetes Kraftzentrum wie bei den Atomen gibt, und zweitens üben die Teilchen im Innern des Kerns im Gegensatz

zu den Atomelektronen sehr starke Wechselwirkungen aufeinander aus. Deshalb darf man in diesem Falle streng genommen nicht die Bewegung irgendeines bestimmten Teilchens im Kraftfeld der übrigen betrachten. Im Grunde kann man noch nicht einmal vom Verhalten eines einzelnen Teilchens im Kern, sondern nur von einer gewissen gemeinsamen Bewegung aller Kernteilchen sprechen. Um eine Vorstellung von den Kerneigenschaften zu erhalten, müssen wir die möglichen Arten der *kollektiven Bewegung* aller Kernteilchen untersuchen.

Daraus folgt, daß sich die Verteilung der Kernenergieniveaus wesentlich von der Niveauverteilung des Atoms unterscheiden muß. Im Atom gruppieren sich die Elektronen im zentralen Kernfeld und bilden die K-, L-, M-,... Schalen. Dabei schirmen die inneren Schalen die Kernladung für die äußeren Elektronen ab. Die Bindungsenergie für die verschiedenen Elektronen erweist sich daher als sehr unterschiedlich. Beim Uran beträgt z. B. die Bindungsenergie für das am schwächsten gebundene Elektron 6 eV, während die Bindungsenergie des K-Elektrons 110000 eV ausmacht. Wenn man also das Feld des Atoms als Potentialtopf darstellt, dann handelt es sich um einen tiefen Topf, der fast bis an den Rand gefüllt ist. Die Zahl der freien Energieniveaus, die über dem Grundniveau des Leuchtelektrons liegen, ist sehr gering. Daher konzentriert sich die gesamte Anregungsenergie in den meisten Fällen auf ein Elektron. Wenn die dem Atom mitgeteilte Energie die Ionisationsenergie übersteigt, so führt das nur zur Loslösung eines Elektrons aus dem Atom und nicht zu einer Neuverteilung der Energie auf verschiedene Elektronen.[1]) Das kommt daher, weil die Bindungsenergien der einzelnen Elektronen zu verschieden sind.

Die energetischen Bedingungen im Kern sind völlig anders. Die Tiefe seines Potentialtopfes ist von der Größenordnung 20 MeV, und die Bindungsenergie des am schwächsten gebundenen Nukleons beträgt 8 MeV, d. h., der Topf ist etwa zur Hälfte mit besetzten Niveaus angefüllt. Wie wir sehen werden, ist die Zahl der freien Niveaus im Unterschied zum Atom sehr groß, und die obersten Niveaus liegen so dicht, daß sie ein Quasi-Kontinuum[2]) bilden. Wesentlich ist dabei, daß man diese Niveaus nicht irgendeinem einzelnen Nukleon zuschreiben kann, sie gehören vielmehr zum ganzen Kern und sind durch die kollektive Bewegung aller seiner Nukleonen bedingt. Das Energiespektrum des Kerns ist deshalb nicht dem Niveauschema des Atoms ähnlich. Es erinnert weit stärker an das Niveauspektrum einer Substanz im kondensierten Zustand, z. B. an das eines kristallinen Festkörpers.

Um die Besonderheiten der Energieniveaus des Kerns klarzustellen, betrachten wir den Kern in erster Näherung als eine Gesamtheit unabhängiger Nukleonen, die in bestimmter Weise an die Gleichgewichtslagen gebunden sind.[3]) Die Kernenergie kann man dann grob durch die Summe der Energien linearer Oszillatoren mit nur wenig verschiedene Frequenzen $\nu_1, \nu_2 \ldots$ darstellen:

$$n_1 h\nu_1 + n_2 h\nu_2 + n_3 h\nu_3 + \ldots + n_k h\nu_k + \text{Nullpunktsenergie}.$$

Wenn die Anregungsenergie klein ist, so sind die meisten der Quantenzahlen n_k gleich Null und nur wenige von Null verschieden. Demgemäß dürfen sich die niedrigen Kern-

[1]) In der Spektroskopie sind nur als seltene Ausnahmen Fälle bekannt, in denen zwei Elektronen angeregt sind und ihre Energiesumme größer als die Ionisationsenergie ist (sogenannte Strichterme).

[2]) „Quasi" bedeutet hier, daß die Niveaus zwar diskret liegen, die Entfernungen zwischen den Niveaus aber derartig klein sind, daß man ihre Lage als dicht bezeichnen kann.

[3]) Siehe N. Bohr und F. Kalkar (Н. Бор и Ф. Калькар, Успехи физических наук, т. XX, стр. 317, 1938).

niveaus nicht wesentlich von den Atomniveaus unterscheiden. Anders wird es, wenn das Energieniveau stark vom Grundniveau abweicht. Es möge z. B. einer Energie entsprechen, die um 8 MeV höher als das niedrigste Niveau liegt. Es ist klar, daß sich diese Energie auf *viele* Oszillatoren verteilt. Wir können dann nicht mehr sagen, welchem Kernteilchen das entsprechende Niveau entspricht. Es gehört tatsächlich zum Kern als ganzem. Man sieht ferner, daß bei ausreichend großer Anregungsenergie sehr viele Kombinationen ganzer Zahlen n_k existieren, für die die Energiesumme aller Oszillatoren annähernd den gegebenen Wert besitzt. Da sich aber die Summenwerte für die verschiedenen Kombinationen der Zahlen n_k immer ein wenig unterscheiden werden, liegen die Energieniveaus für große Anregungsenergien sehr dicht.

Zur ersten Orientierung kann man die Dichte der Energieniveaus für eine gegebene Anregungsenergie folgendermaßen berechnen. Für die Anzahl der Möglichkeiten, die es zur Darstellung einer gegebenen Zahl durch eine Summe kleinerer positiver Zahlen gibt, existiert eine Formel, die zeigt, daß die Anzahl der Möglichkeiten exponentiell mit der Zahl der Summanden wächst. Wenn wir jetzt als Einheit die Energie $2 \cdot 10^5$ eV, die annähernd der Energiedifferenz zwischen den ersten Kernniveaus entspricht, nehmen, dann ist die Zahl der Quanten für die den oberen Niveaus entsprechende Energie $8 \cdot 10^6$ eV

$$\frac{8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5} = 40.$$

Die Anzahl der Kombinationen, durch die man $8 \cdot 10^6$ eV als Summe von 40 Summanden darstellen kann, beträgt etwa $2 \cdot 10^4$. Wenn man beachtet, daß die einzelnen Quanten $h\nu_i$ untereinander nicht genau gleich sind, sondern sich ein wenig unterscheiden, dann bedeutet das, daß ein Energieband von $2 \cdot 10^5$ eV Breite mit eng beieinanderliegenden Niveaus vorliegt. Ihr mittlerer Abstand beträgt

$$\frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4} = 10 \text{ eV}.$$

Wir sehen also, daß die niedrigen Kernniveaus weit voneinander entfernt sind, während die oberen in einem dicht besetzten Band liegen. Die Niveaudichte wächst dabei schnell mit der Anregungsenergie. Diese Niveauverteilung illustriert Bohr mit der anschaulichen Abbildung 340, aus der ersichtlich ist, daß die unteren Niveaus weit voneinander entfernt sind. Die Abstände betragen bei schweren Kernen einige hunderttausend Elektronenvolt und entsprechen den Energien von γ-Quanten, die bei radioaktiven Umwandlungen ausgesandt werden. Für Anregungsenergien von etwa 8 MeV, die der Bindungsenergie eines Nukleons entsprechen, liegen die Niveaus schon so nahe, daß man sie nicht im gleichen Maßstab wie die unteren darstellen kann. Es ist eine „Lupe“ mit 100000facher Vergrößerung notwendig, um diese Niveaus in der gleichen Form wie im mittleren Teil des Bildes darzustellen. Die punktierte Linie entspricht hier genau der Energie 8 MeV. Bei einer Anregung mit 15 MeV fließen die Niveaus auch bei 100000facher Vergrößerung zusammen.

Zur quantitativen Berechnung der Kernenergieniveaus betrachtete man die kollektive Teilchenbewegung für verschiedene Modelle, z. B. für das Modell eines Kristallgitters oder eines Flüssigkeitstropfens. Die Formeln für die Niveaudichte in Abhängigkeit von der Energie, die man für diese Modelle erhält, liefern wenig verschiedene Ergebnisse. L. D. Landau leitete thermodynamisch, unabhängig von irgendeinem Modell, eine Formel für die Niveauabstände ab. Diese Formel hat folgende Gestalt:

$$D = C e^{-B\sqrt{E}} \text{ eV},$$

hier ist D die Entfernung zwischen den Niveaus, und B und C bezeichnen Konstanten mit folgender Bedeutung:

$$C \approx \begin{cases} 10^6 \text{ für leichte Kerne } (A \sim 20), \\ 10^5 \text{ für schwere Kerne } (A \sim 200); \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 2 \text{ für leichte Kerne,} \\ 4 \text{ für schwere Kerne;} \end{cases}$$

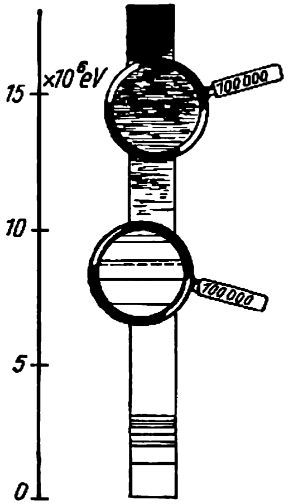


Abb. 340. Die Energieniveaus des Kerns

E wird in MeV gemessen. Nach dieser Formel erhält man folgende Abstände zwischen den Niveaus (größenordnungsmäßig):

	In der Nähe des Grund-zustandes	bei 8 MeV	bei 15 MeV
Leichte Kerne	10^6	10^5	10^3
Schwere Kerne	10^5	10	10^{-2}

Wir sehen, daß der Abstand zwischen den oberen Niveaus bei leichten Kernen bedeutend größer als bei schweren Kernen ist. Das entspricht in den oben betrachteten Darstellungen völlig der Verteilung der Kernenergie auf eine geringere Anzahl von Teilchen.

§ 264. Der Einfang eines Teilchens durch den Kern

Wir wollen jetzt eingehender die erste Etappe der Kernreaktion, den Einfang eines Teilchens durch den Kern und die Bildung des Zwischenkerns betrachten. Um die charakteristischen Züge dieses Prozesses herauszustellen, setzen wir zuerst voraus, daß das einge-

fangene Teilchen ein Neutron sei. Damit stellen wir zunächst alle Fragen beiseite, die mit der notwendigen Überwindung der Potentialschwelle des Kerns, die für geladene Teilchen besteht, zusammenhängen. Wir brauchen uns auch nicht um andere Faktoren, die von den COULOMBschen Wechselwirkungen herrühren und den Prozeß beeinflussen, zu kümmern.

Wenn wir Zusammenstöße von Neutronen mit Kernen betrachten, dann müssen wir streng zwischen schnellen und langsamen Neutronen unterscheiden. Als Kriterium hierfür kann die DE-BROGLIE-Wellenlänge, die dem Neutron mit der Geschwindigkeit v entspricht, dienen:

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Wenn die Geschwindigkeit des Neutrons so groß ist, daß $\frac{\lambda}{2\pi} \ll R$ ist, wo R den Kernradius bezeichnet, kann man auf die Wechselwirkung der Neutronen mit dem Kern einfache geometrische Überlegungen anwenden und den Kern als eine gewisse Zielscheibe, mit der das Neutron in Berührung kommt, betrachten. Völlig analog hierzu kann man in der gewöhnlichen Optik die Streuung des Lichts durch ein Objekt, dessen lineare Ausdehnung bedeutend größer als die Wellenlänge des Lichts ist, durch Anwendung der Gesetze der geometrischen Optik betrachten. Man kann also die Streuung schneller Neutronen zur Bestimmung des Kernradius ausnutzen. Diese Bestimmungen ergeben $R \sim 10^{-12}$ cm in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Bestimmungen des Radius schwerer Kerne.

Für langsame Neutronen, für die $\frac{\lambda}{2\pi}$ von der Größenordnung des R oder sogar noch größer als R ist, sind die geometrischen Überlegungen völlig unzulässig. Das folgt schon daraus, daß die Streuung unter diesen Bedingungen unvermeidlich von Interferenzeffekten begleitet ist. Das Experiment beweist unmittelbar, daß der Wirkungsquerschnitt des Kerns für einige bestimmte Geschwindigkeiten der Neutronen hundert- oder gar tausendmal größer als der geometrische Querschnitt ist. Wir haben es hier also mit typischen quantenmechanischen Resonanzeffekten zu tun, die man unbedingt nach den Wellenvorstellungen behandeln muß.

Ein beliebiger Kernzusammenstoß kann vom quantenmechanischen Standpunkt aus im Rahmen der Theorie des Zwischenkerns auf folgende Weise beschrieben werden. Der Kern möge sich in einem bestimmten Quantenzustand mit der Energie E_0 befinden. Beim Einfang des einfallenden Teilchens P der Energie E_P entsteht ein Zwischenkern, der nach einer bestimmten Zeit (die groß im Vergleich zur Einheit der Kernzeit $\tau = 10^{-22}$ sec ist) ein Teilchen Q mit der Energie E_Q ausstößt und selbst in einem Zustand mit der Energie E_n zurückbleibt. Der ganze Prozeß kann durch das Schema

$$A + P \rightarrow C \rightarrow B + Q \tag{264,1}$$

dargestellt werden. Wenn das ausgestoßene und das eingefallene Teilchen identisch sind (wenn z. B. ein Neutron einfällt und auch ein Neutron ausgesandt wird), bezeichnen wir den Prozeß (264,1) als Streuung. Wenn insbesondere $E_P = E_Q$ ist, handelt es sich um eine elastische, sonst um eine unelastische Streuung. Wenn jedoch die Teilchen Q und P *nicht identisch* sind, dann sprechen wir von einer *Kernreaktion*. Das Teilchen Q kann auch ein Photon sein; die Kernreaktion ist dann ein einfacher Einfang des einfallenden Teilchens, der einen Quantensprung mit Aussendung von γ-Strahlen bedingt. In allen Fällen

muß jedoch nach dem Energiesatz die Gleichung

$$E_0 + E_P = E_n + E_Q$$

erfüllt sein.

Man erkennt leicht, daß diese Beschreibung der Wechselwirkung des Teilchen mit dem Kern völlig analog zur quantenmechanischen Beschreibung der Lichtstreuung verläuft. Dieser letztere Prozeß wird in der Quantentheorie der Strahlung folgendermaßen beschrieben. Es möge sich ein atomares System (Atom oder Molekül) in einem Zustand mit der Energie E befinden. Bei der Absorption eines Photons $h\nu$ entsteht ein Zwischenzustand mit der Energie $E + h\nu$, und danach wird wieder ein Photon $h\nu'$ ausgesandt, während das System mit der Energie E' zurückbleibt. Der Energiesatz verlangt die Beziehung

$$E + h\nu = E' + h\nu'.$$

Wenn $E' = E$ ist, d. h., wenn das System aus dem Zwischenzustand wieder in den Anfangzustand zurückkehrt, gilt $\nu = \nu'$, d. h., die Lichtfrequenz ist nicht geändert worden. Dieser Fall ist der elastischen Streuung analog, und in der Optik entsprechen ihm die Streuprozesse ohne Frequenzänderung (gewöhnliche Rayleigh- oder kohärente Streuung). Wenn jedoch $E \neq E'$ ist, dann gilt $\nu' \neq \nu$, und wir erhalten eine unelastische Photonenstreuung, der die optische Ercheinung der inkohärenten Streuung (entdeckt von den sowjetischen) Physikern L. I. Mansdelstam und G. S. Landsberg und dem indischen Physiker Raman[1]) entspricht.

§ 265. Niveaubreite und Resonanz

Wir betrachten jetzt die Reaktion des Neutrons mit einem Kern, dessen Ladung gleich Z und dessen Massenzahl gleich $A-1$ ist, d. h. mit dem Kern Z^{A-1}. Die erste Etappe des Prozesses ist die Bildung eines angeregten Zwischenkerns

$$Z^{A-1} + {}_0n^1 \rightarrow Z^A .$$

Der Energieüberschuß, den der angeregte Kern Z^A besitzt, ist offensichtlich gleich der Bindungsenergie des Neutrons *in diesem Kern* Z^A zuzüglich seiner kinetischen Energie. Der Übergangszustand kann durch die Aussendung eines Neutrons mit der anfänglichen oder einer geringeren Energie (elastische oder unelastische Streuung des Neutrons) durch die Aussendung eines Protons oder α-Teilchens, schließlich mit der Aussendung eines γ-Quants, d. h. mit dem Einfang des Neutrons und der Bildung eines Isotops des Ausgangskerns, beendet werden. Diese verschiedenen Prozesse werden wir von jetzt ab folgendermaßen abkürzen: (n, n), (n, p), (n, α), (n, γ), und die Kernreaktion in Kurzform schreiben, z. B.

$${}_7N^{14}\,(n, p)\,{}_6C^{14} \text{ u. dgl.}$$

Wie schon im letzten Paragraphen erklärt wurde, existiert für jede mögliche Reaktion des Zwischenkerns eine bestimmte Wahrscheinlichkeit. Wenn wir die Wahrscheinlichkeiten dieser möglichen Prozesse mit $w_1, w_2, \ldots$ bezeichnen, dann ist die Gesamtwahrscheinlich-

[1]) Ausführlicheres über die inkohärente Streuung des Lichts siehe G. S. Landsberg: „Optik", S. 417 (Г. С. Ландсберг: Оптика. Гостехиздат, 1947). Siehe auch A. Sommerfeld: „Atombau und Spektrallinien", Bd. II, Braunschweig, 1951.

keit für irgendeine Reaktion einfach durch die Summe

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \tag{265,1}$$

gegeben.

Der Zwischenkern, der durch Neutroneneinfang entsteht, befindet sich in einem Energiezustand, der einem bestimmten Energieniveau entspricht. Dieses Niveau ist jedoch nicht völlig scharf, und der Zustand ist nicht stationär im eigentlichen Sinne des Wortes. Der Zustand ist deshalb nicht völlig stationär, weil es eine Wahrscheinlichkeit für den Übergang in einen anderen Zustand gibt, z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß der angeregte Kernzustand in einen Zustand niederer Energie übergeht und sich eines seiner Nukleonen (sagen wir, ein Neutron oder ein Proton) außerhalb des Kerns erweist, d. h., daß die Reaktion (n, n) oder (n, p) vor sich geht. Wie wir schon in § 233 gesehen haben, kann in diesem Falle das entsprechende Energieniveau nicht völlig scharf sein; es hat eine endliche Breite. Solche Zustände nennt man *quasistationär* und die Energieniveaus *virtuell*[1]). Die Breite der virtuellen Kernniveaus ΔE läßt sich genauso wie die Niveaubreite in der Elektronenhülle (siehe § 233) begründen. Der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Prozesses (Aussendung eines Neutrons, Protons u. dgl.) w_x entspricht eine mittlere „Verweilzeit" für den gegebenen Prozeß

$$w_x = \frac{1}{\tau_x}.$$

Wegen der Beziehung

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

wird die Unbestimmtheit der Energie für $\Delta t = \tau_x$

$$\Delta E_x \geqslant \frac{h}{4\pi\tau_x}.$$

Als Maß für die Niveaubreite nimmt man definitionsgemäß

$$\Gamma_x = \frac{h}{2\pi\tau_x} = \frac{\hbar}{\tau_x} = \hbar w_x \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right). \tag{265,2}$$

Wie man sieht, hat Γ_x die Dimension einer Energie; sie wird gewöhnlich in Elektronenvolt ausgedrückt. Wegen

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{sec}}{2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{eV}}} = 0{,}65 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{sec}$$

erhält man

$$\Gamma_x = \frac{0{,}65 \cdot 10^{-15}}{\tau_x}\,\mathrm{eV}. \tag{265,3}$$

Die mittlere Zeit für den Prozeß (n, γ) ist z. B. für langsame Neutronen von der Größenordnung $10^{-14} - 10^{-15}$ sec. Deshalb ist

$$\Gamma_\gamma = \frac{0{,}65 \cdot 10^{-15}}{10^{-15}} = 0{,}65\,\mathrm{eV},$$

[1]) Siehe Anhang IX am Ende des Buches.

d. h. die Niveaubreite für die Aussendung von γ-Strahlen hat die Größenordnung einiger Zehntel eV. Wenn τ_x bedeutend kleiner ist, wird Γ_x entsprechend größer und kann sogar über den Abstand zwischen den Niveaus hinauswachsen.

In Übereinstimmung mit (265,1) ist die gesamte Niveaubreite gleich der Summe der Einzelbreiten

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_p + \Gamma_\alpha . \tag{265,4}$$

Die Gesamtbreite Γ charakterisiert also die gesamte Wahrscheinlichkeit des Übergangs zu einem tieferen Niveau. Wenn wir mit Γ_r die Summe aller Breiten außer der Breite für Neutronenstreuung bezeichnen

$$\Gamma_r = \Gamma_\gamma + \Gamma_p + \Gamma_\alpha ,$$

erhalten wir

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_r .$$

Da wir anfangs die Emission von geladenen Teilchen außer acht lassen, werden uns zwei miteinander konkurrierende Prozesse interessieren: die Emission eines Neutrons (Streuung) und die γ-Strahlung des angeregten Kerns (Absorption). Unter dieser Bedingung gilt $\Gamma_r = \Gamma_\gamma$ und

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma . \tag{265,5}$$

Schon aus qualitativen statistischen Überlegungen folgt, daß die relative Größe von Γ_n und Γ_r stark von der kinetischen Energie des eingeschossenen Neutrons abhängen muß. Wenn diese Energie groß ist (einige MeV), erhält der Zwischenkern beim Einfang des Neutrons einen großen Energieüberschuß. Dann wird die Energie, die auf ein Teilchen zur Emission konzentriert sein muß, nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtenergie des Kerns ausmachen, und die Wahrscheinlichkeit für eine solche Schwankung ist ausreichend groß. Andererseits ist der Energieverlust des angeregten Kerns durch γ-Strahlung überhaupt ein wenig wahrscheinlicher Prozeß. Deshalb gilt für große Energien des Neutrons $\Gamma_n > \Gamma_\gamma$.

Man nimmt jedoch zur Anregung von Kernreaktionen sehr oft langsame Neutronen und sogar Neutronen mit Energien, die dem Temperaturgleichgewicht mit dem umgebenden Medium entsprechen („thermische Neutronen"). In diesen Fällen bringt das Neutron in den Zwischenkern nur eine Energie mit, die seiner Bindungsenergie gleich ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich durch Schwankungen eine zur Emission ausreichende Energie auf ein Teilchen konzentriert, wird äußerst gering. Deshalb ist die Strahlungswahrscheinlichkeit bei langsamen Neutronen bedeutend größer als die Emissionswahrscheinlichkeit, $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$.

Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß der Neutroneneinfang mit anschließender Reaktion für langsame Neutronen, deren De-Broglie-Wellenlänge von der gleichen Größenordnung oder sogar noch größer als der Kernradius ist, große Ähnlichkeit mit der Lichtstreuung hat, d. h. mit den optischen Dispersionserscheinungen. In der Optik gibt es bekanntlich Resonanzeffekte. Wenn die Frequenz des einfallenden Lichts nur wenig von einer Eigenfrequenz des absorbierenden Systems abweicht, kann man ein sehr scharf ausgeprägtes selektives Absorptionsmaximum für diese Frequenz beobachten.

Eine völlig analoge selektive Absorption findet auch für langsame Neutronen statt. Wenn die Energie, die durch das eingefangene Neutron in den Zwischenkern gebracht wurde (d. h. die Summe seiner Bindungs- und kinetischen Energie), gerade mit der Energie eines Niveaus des Zwischenkerns übereinstimmt, dann steigt der Wirkungsquerschnitt für den Einfang eines

solchen Neutrons stark an. BREIT und WIGNER haben Formeln abgeleitet, die die Wirkungsquerschnitte für Einfang und Streuung von Neutronen σ_c und σ_s mit den Wahrscheinlichkeiten (Niveaubreiten) der γ-Strahlung und Neutronenstreuung verbinden.

Wenn die Wellenlänge des Neutrons λ groß im Vergleich zum Kernradius ist, gilt für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_c = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}, \qquad (265,6)$$

wobei E die Energie des Neutrons und E_r die Energie des Zwischenkernniveaus ist. Die Formel für den Streuquerschnitt hat folgende Gestalt:

$$\sigma_s = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\Gamma_n \Gamma_n}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}. \qquad (265,7)$$

Die Formeln (265,6) und (265,7) gelten für ein einfaches Kernniveau, d. h., wenn die Niveaubreite bedeutend kleiner als der Abstand zwischen benachbarten Niveaus ist. Aus (265,6) und (265,7) erhalten wir mit (265,5) für den Gesamtquerschnitt

$$\sigma_t = \sigma_c + \sigma_s = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}. \qquad (265,8)$$

Betrachten wir diese Formel etwas näher. Wenn E, d. h. die Summe aus der Bindungsenergie des Neutrons im Kern Z^A und seiner kinetischen Energie außerhalb des Kerns, gleich der Energie des Zwischenkernniveaus E_r ist, dann erreicht σ ein scharf ausgeprägtes Maximum (Abb. 341). Für $E = E_r$ ergibt sich

$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2}, \qquad (265,9)$$

$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma^2}, \qquad (265,10)$$

und wegen $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$ gilt $\sigma_c \gg \sigma_s$, d. h., im Resonanzfall ist der Einfangquerschnitt bedeutend größer als der Streuquerschnitt. Ferner gilt

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\Gamma_n}{\Gamma}. \qquad (265,11)$$

Unter der Bedingung $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$ erhalten wir

$$(\sigma_c)_{\max} \approx \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = (\sigma_t)_{\max},$$

d. h., der Gesamtquerschnitt bezieht sich fast ganz auf den Neutroneneinfang.

Besonders wichtig ist die Tatsache, daß der Wirkungsquerschnitt für den Neutroneneinfang bei Resonanz oft den geometrischen Querschnitt um ein Vielfaches übersteigt. Davon

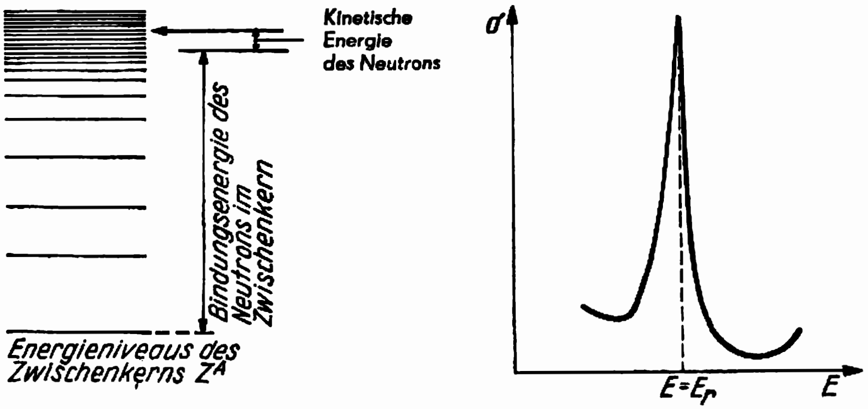


Abb. 341. Resonanzabsorption von Neutronen

kann man sich leicht durch eine einfache Rechnung überzeugen. Der Resonanzeinfang wird oft für Neutronen mit „thermischen" Geschwindigkeiten beobachtet. Für $E_{kin} = 1$ eV ist die De-Broglie-Wellenlänge des Neutrons gegeben zu

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24} \cdot 1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}} = 2{,}83 \cdot 10^{-9}\ \text{cm}\,.$$

Für $\Gamma_n = 10^{-3}$ und $\Gamma_\gamma = 10^{-1}$ erhalten wir

$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{(2{,}83)^2 \cdot 10^{-18}}{\pi} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-1}} = 2{,}6 \cdot 10^{-20}\,.$$

Bei Kernen mittlerer Masse $A = 100$ beträgt der geometrische Querschnitt ($R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$)

$$\pi R^2 = \pi \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-26} \cdot 100^{\frac{2}{3}} = 1{,}58 \cdot 10^{-24}\,,$$

also ist

$$\frac{(\sigma_c)_{\max}}{\pi R^2} = 17\,100\,.$$

Derart große Querschnitte werden tatsächlich bei der Absorption von Neutronen durch einige Kerne beobachtet. Für das schon mehrmals erwähnte Indium tritt z. B. Resonanz für Neutronen mit der Energie 1,44 eV ein; σ_c ist dabei $26000 \cdot 10^{-24}$. Experimentelle Ergebnisse, die die Formel von Breit-Wigner gut bestätigen, werden in § 266 angeführt.

Die Formel (265,6) kann leicht auf die Form

$$\sigma_c = \sigma_0 \left(\frac{E_r}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{4}\Gamma^2}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \tag{265,12}$$

gebracht werden. Für $E = E_r$ gilt $(\sigma_e)_{max} = \sigma_0$; für $E \ll E_r$ ändert sich jedoch der Nenner der Formel (265,12) mit E nur sehr wenig im Vergleich zum Faktor $\sqrt{\left(\frac{E_r}{E}\right)}$. Wir erhalten dann

$$\sigma_e \sim \left(\frac{E_r}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{v},$$

d. h., der Einfangquerschnitt ist der Neutronengeschwindigkeit umgekehrt proportional. Dieses Ergebnis stimmt damit überein, daß das Neutron sich bei kleinerer Geschwindigkeit längere Zeit in der Einwirkungssphäre des Kerns befindet und daher die Wahrscheinlichkeit seines Einfangs größer wird.

Wir wollen hier nicht auf die schwierige Ableitung der Formel von Breit und Wigner eingehen[1]), sondern werden uns auf qualitative Überlegungen, die die Resonanzbedingung beim Neutroneneinfang erklären, beschränken. Wir betrachten ein langsames Neutron, das mit einem Kern zusammenstößt. Die Wellenfunktion dieses Neutrons ist sowohl außerhalb als auch innerhalb des Kerns von Null verschieden, d. h., es existiert eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Neutron außerhalb des Kerns aufhält oder im Kern gebunden ist. Da es sich um ein langsames Neutron handelt, ist seine Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{mv}$ außerhalb des Kerns groß und die Wellenzahl $k = \frac{1}{\lambda}$ entsprechend klein. Im Innern des Kerns ist jedoch die Wellenzahl des Neutrons groß, denn selbst dann, wenn seine kinetische Energie außerhalb des Kerns fast Null ist, bringt es seine Bindungsenergie von 8 MeV mit in den Kern. (Abb. 342, a und b). Da die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung am Kernrand stetig sein müssen (siehe Teil I, § 144), ist es notwendig, daß beide Wellen, die lange und die kurze, an der Kernoberfläche stetig und glatt ineinander übergehen. Das ist im allgemeinen nur dann möglich, wenn die Amplitude der Welle innerhalb des Kerns sehr klein im Vergleich zur Amplitude außerhalb des Kerns ist. Für eine beliebige Energie des Neutrons ist also mit anderen Worten die Wahrscheinlichkeit seines Einfangs durch den Kern im allgemeinen gering. Es gibt jedoch einen Ausnahmefall, bei dem beide Wellen bei fast gleicher Amplitude innerhalb und außerhalb des Kerns glatt und stetig ineinander übergehen (Abb. 342c). Dieser Fall tritt ein, wenn die Ableitung der Wellenfunktion innerhalb des Kerns am Kernrande gleich oder nahe Null ist. Dies trifft für ein sehr enges Energieintervall in der Nähe eines Energieniveaus des Zwischenkerns zu. Da gerade hier die Wellenamplitude innerhalb des Kerns groß ist, wird auch die Wahrscheinlichkeit, das Neutron innerhalb des Kerns anzutreffen, d. h. die Wahrscheinlichkeit seines Einfangs, entsprechend groß. Bei Neutronenenergien, die innerhalb des erwähnten Intervalles liegen, wird also die Resonanzerscheinung beobachtet, d. h. ein scharfes Ansteigen der Einfangwahrscheinlichkeit des Neutrons.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß die eingefangenen und ausgesandten Teilchen Neutronen sind. Wenn jedoch die Reaktion durch geladene Teilchen (Protonen, Deuteronen, α-Teilchen) angeregt wird, oder wenn ein Neutron eingefangen, aber ein geladenes Teilchen ausgesandt wird, erschwert die Existenz des Potentialwalls die Erklärung für positiv geladene Teilchen. Ein positives Teilchen muß eine ausreichende kinetische Energie besitzen, damit es sich dem Kern bis auf eine Entfernung, in der die Kernkräfte überwiegen, nähern

---

[1]) Siehe A. Achieser und I. Pomerantschuk: „Einige Fragen der Kerntheorie". (А. Ахиезер и И. Померанчук: „Некоторые вопросы теории ядра", Гостехиздат, 1951) und auch Blatt and Weisskopf: „Theoretical Nuclear Physics", p. 437, Wiley, New York, 1952.

kann. Wenn jedoch auf der anderen Seite des Walls ein Gebiet gleicher Energie existiert, dann besteht, wie wir schon wissen (siehe Teil I, § 145) eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen mit Hilfe des Tunneleffekts durch den Potentialwall gelangt. Deshalb hängt die Einfangwahrscheinlichkeit des Teilchens im allgemeinen auch von der Eindringwahrscheinlichkeit, d. h. vom Durchlässigkeitskoeffizienten des Walls ab.

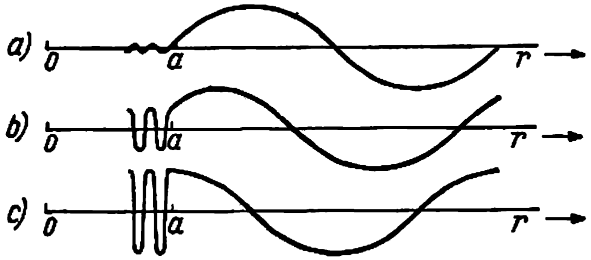


Abb. 342. Schematische Darstellung der Wellenfunktion des Neutrons in der Nähe der Kernoberfläche. Der Rand der Kernoberfläche befindet sich im Punkt a; links von a ist der Verlauf der Wellenfunktion im Kern und rechts von a im Außenraum skizziert

Wenn ein geladenes Teilchen beim Zerfall eines Zwischenkerns ausgeschleudert wird, liegen die Dinge ähnlich. Auch hier enthält die Niveaubreite, die die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Zerfalls charakterisiert, die Durchlässigkeit der Schwelle als Faktor. Mit diesen Vorbehalten kann die Formel von Breit und Wigner auch auf geladene Teilchen angewandt werden; speziell ist für $E = E_r$ Resonanz zu erwarten. Wie wir weiter unten sehen werden (§§ 267 und 268), wird diese Erwartung besonders gut für den Einfang von Protonen durch leichte Kerne bestätigt. Weniger ausgeprägte Resonanzerscheinungen kann man bei den Reaktionen mit α-Teilchen beobachten.

§ 266. Die Kernreaktionen der Neutronen

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung konkreter Beispiele von Kernreaktionen zu. Bis jetzt wurden mehr als 1000 verschiedene Reaktionen untersucht, und jährlich erscheinen einige hundert Arbeiten, in denen entweder neue Reaktionen beschrieben oder früher entdeckte von verschiedenen Seiten her untersucht werden.

Jedes Isotop, das bei Kernreaktionen entsteht, kann gewöhnlich ein Produkt mehrerer Reaktionen sein. So sind z. B. über 10 Kernreaktionen bekannt, bei denen H^3 oder T^3, das überschwere radioaktive Wasserstoffisotop, das den Namen Tritium erhalten hat, entsteht: D^2 (d, p) H^3, Li^6 (n, α) H^3 u. a. Aus diesem Grunde kann man die Kernreaktionen entweder nach den Elementen klassifizieren und die Reaktionen betrachten, die zur Entstehung bestimmter Isotope führen, oder man ordnet sie nach den primären Teilchen: Neutronen, Deuteronen, α-Teilchen und γ-Strahlen (Kernphotoeffekt). Wir beschränken uns auf die Aufzählung der Reaktionstypen nach den Teilchen, die die Reaktion einleiten, und führen einige Beispiele an.

Wir beginnen mit den Neutronenreaktionen. Die Kernreaktionen der Neutronen sind sehr zahlreich und verschiedenartig. Das liegt daran, daß sie keine Potentialschwelle zu überwinden haben und in beliebig schwere Kerne frei eindringen können. Da jedes Neutron dabei eine Energie, die gleich seiner kinetischen Energie zuzüglich der Bindungsenergie von 7 bis 8 MeV ist, mitbringt, wird der durch Einfang entstandene Kern stark angeregt und

„entlädt" sich, indem er diese oder jene Umwandlung erfährt. Es sind viele Beispiele folgender Reaktionstypen bekannt: (n,γ), (n,p), (n,α), $(n,2n)$. Außer den aufgezählten Typen gibt es noch einen anderen, äußerst wichtigen Typ: *die Kernspaltung.* Diesem Prozeß wird wegen seiner Wichtigkeit ein besonderes Kapitel gewidmet (Kapitel XXIII). In Kurzform schreibt man Spaltungsreaktionen durch Neutroneneinwirkung (n,f).

Die (n,γ)-*Reaktionen.* Als einfachstes Beispiel für eine (n,γ)-Reaktion kann der Einfang eines Neutrons durch einen Wasserstoffkern mit der Bildung des Deuteriums angeführt werden.

$$H^1(n,\gamma)D^2.$$

Der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion ist klein: $\sigma_e = 0{,}30 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$. Ihre Energie ist gleich der Bindungsenergie des Deuterons, d. h. 2,18 MeV. Der Querschnitt für den Einfang eines Neutrons durch ein Deuteron $D^2(n,\gamma)T^3$ ist äußerst klein; das ist für die sogenannten Kettenreaktionen wichtig (siehe Kapitel XXIII).

Andererseits haben einige Kerne einen sehr großen Querschnitt für Neutroneneinfang und zeigen für langsame Neutronen scharf ausgeprägte Resonanzen. Ein klassisches Beispiel dafür ist der Kadmiumkern. Sein Einfangquerschnitt beträgt $\sigma_e = 2500 \cdot 10^{-24}$; für Neutronen mit einer Energie von 0,18 eV besteht eine Resonanz, $\sigma_e = 7800 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$.

Die (n,p)-*Reaktionen.* Mit langsamen Neutronen gehen diese Reaktionen im allgemeinen nicht vor sich, da das Proton zum Austritt aus dem Zwischenkern außer einem Energieüberschuß, der gleich der Bindungsenergie ist, noch einen zusätzlichen Energiebetrag zur Überwindung des Potentialwalls benötigt. Unter den leichten Elementen gibt es jedoch zwei wichtige Ausnahmen. Es handelt sich um die Reaktionen $_7N^{14}(n,p)\,_6C^{14}$ und $_{17}Cl^{35}(n,p)\,_{16}S^{35}$. Bei beiden Reaktionen entstehen β^--radioaktive Isotope, da in beiden Fällen in den stabilen Isotopen N^{14} und Cl^{35} unter Beibehaltung der Massenzahl ein Proton durch ein Neutron ersetzt wird. Der Überschuß an Neutronen wird durch einen β^--Prozeß kompensiert. Dabei entstehen wieder die stabilen Ausgangsisotope

$$_6C^{14} \rightarrow {}_7N^{14} + \beta^-, \quad {}_{16}S^{35} \rightarrow {}_{17}Cl^{35} + \beta^-.$$

Der Querschnitt der Reaktion $N^{14}(n,p)C^{14}$ ist gleich $1{,}75 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$, der Reaktion $Cl^{35}(n,p)S^{35}$ gleich $33 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$. Die entstehenden radioaktiven Isotope haben folgende Halbwertszeiten: C^{14} — 5100 Jahre, S^{35} — 87,1 Tage. Beiden Isotopen kommt große praktische Bedeutung zu, da sie in Chemie und Biologie als „Indikatoren" Verwendung finden.

Für ausreichend große Energie der Neutronen werden die (n,p)-Reaktionen wahrscheinlicher, und es existiert eine Reihe dieser Reaktionen.

Die (n,α)-*Reaktionen* sind ebenso wie die (n,p)-Reaktionen mit langsamen Neutronen nur für leichte Kerne möglich, da die Potentialschwelle für die Aussendung von α-Teilchen doppelt so hoch wie die für Protonen ist. Eine praktisch wichtige (n,α)-Reaktion mit langsamen Neutronen ist die des Bors B^{10}:

$$_5B^{10}(n,\alpha)\,_3Li^7.$$

Diese Reaktion hat für Neutronen mit einer Energie von 0,025 MeV den großen Querschnitt $\sigma = 400 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$. Wegen des großen Q (3,6 MeV) geht die Reaktion auch mit thermischen Neutronen vor sich; dabei wird ein α-Teilchen mit der Energie 2,5 MeV ausgesendet und kann mit Zählrohren oder Ionisationskammern nachgewiesen werden. Aus diesem Grunde füllt man die Kammer mit der gasförmigen Borverbindung BF_3 oder bedeckt die Wände mit Bor, um eine Anzeige langsamer Neutronen zu ermöglichen.

Die (n, 2n)-Reaktionen. Bei ausreichend großer Energie der eingeschossenen Neutronen ist der Energievorrat, der dem Zwischenkern nach der Verdampfung eines Neutrons übrigbleibt, groß genug, um ein weiteres Neutron zu verdampfen. Bei einer solchen Reaktion werden zwei Neutronen ausgesandt. Für diese Reaktion gibt es zahlreiche Beispiele. In allen Fällen erhält man natürlich ein Isotop des beschossenen Kerns mit einer um eine Einheit kleineren Masse: ${}_4Be^9\,(n, 2n)\,{}_4Be^8$, ${}_{29}Cu^{63}\,(n, 2n)\,{}_{29}Cu^{62}$, ${}_{49}In^{115}\,(n, 2n)\,{}_{49}In^{114}$. Um eine Vorstellung von der Energie, die zur Auslösung einer solchen Reaktion notwendig ist (Schwellenwert), zu gewinnen, weisen wir darauf hin, daß die Schwelle für die Reaktion $Be^9\,(n, 2n)\,Be^8$ gleich 1,8 MeV ist (der entstehende Kern Be^8 ist unbeständig, siehe unten). Die Schwelle der Reaktion $Cu^{63}\,(n, 2n)\,Cu^{62}$ liegt bei 12 MeV. Diese Reaktionen sind interessant, da bei ihnen eine „Vervielfachung" von Neutronen stattfindet. An Stelle jedes absorbierten Neutrons entstehen zwei Neutronen.

§ 267. Die Reaktionen der Protonen und Deuteronen

Die Reaktionen der Protonen erfordern eine große Teilchenenergie, damit das stark abstoßende COULOMB-Feld des Kerns überwunden werden kann. Wenn die Reaktion mit leichten Kernen vor sich geht, kann diese Energie beim Einfang des Primärteilchens infolge des Tunneleffekts bedeutend niedriger sein.

Protonen können folgende Reaktionstypen hervorrufen: (p, γ), (p, n), (p, α).

Die (p, γ)-Reaktionen. Beim Strahlungseinfang des Protons, der dem Strahlungseinfang des Neutrons entspricht, wird ein Proton vom beschossenen Kern eingefangen. Dabei bildet sich ein Kern mit einer um eine Einheit größeren Ladung, und die überschüssige Energie wird als γ-Strahlung abgegeben. Beispiel:

$$ {}_{13}Al^{27}\,(p, \gamma)\,{}_{14}Si^{28}. $$

Diese Reaktionen sind besonders interessant, da bei ihnen oft scharf ausgeprägte Resonanzen beobachtet werden. Der Wirkungsquerschnitt für den Einfang genügt der Formel und BREIT-WIGNER (265,6):

$$ \sigma(p, \gamma) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\Gamma_\gamma \Gamma}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}. $$

Aus dieser Formel folgt, daß die Einfangwahrscheinlichkeit wie beim Neutroneneinfang stark ansteigt, wenn die Summe aus der kinetischen Energie des Protons (mit der Korrektur auf die Bewegung des Massenzentrums) und seiner Bindungsenergie im Zwischenkern einem Niveau dieses Kerns genau gleich ist. Ein Zeichen für das Anwachsen der Wahrscheinlichkeit ist die scharfe Intensitätssteigerung der γ-Strahlen bei der entsprechenden Protonenenergie.

Wir betrachten die erwähnte Reaktion des Al^{27} etwas näher. Die Höhe des Potentialwalls beträgt beim Al für Protonen 4,2 MeV, während das erste Maximum der Kurve für den Wirkungsquerschnitt des Protoneneinfangs bei 0,225 MeV liegt, d. h. bedeutend niedriger als der Potentialwall. Hinter diesem Maximum folgen noch 34 Maxima, die durch schmale Zwischenräume getrennt sind und sich bis zur Energie 1,393 MeV erstrecken. Die Resonanzschärfe kann man an Hand der Kurve in Abb. 343 beurteilen. Dort ist die Abhängigkeit der Intensität der γ-Strahlung von der Protonenenergie dargestellt. Um die Lage der

Niveaus aus den Protonenenergien auszurechnen, muß man die jeweils einem Maximum entsprechende Energie der Protonen auf das System des Schwerpunkts umrechnen. So liegt z. B. das erste Maximum im Laborsystem, wie gesagt, bei der Protonenenergie 0,225 MeV. Die kinetische Energie des Protons relativ zum Kern Al^{27} ist also gleich $0{,}225 \frac{27}{28} = 0{,}217$ MeV, und das entsprechende Energieniveau liegt bei $(E_0 + 0{,}22)$ MeV, wobei E_0 die Bindungsenergie des Protons im Kern Si^{28} ist. Diese Größe E_0 wird gewöhnlich aus den Massendifferenzen bestimmt. Im uns interessierenden Fall erhält man z. B.

$$E_0 = ({}_{13}Al^{27} + {}_1H^1) - {}_{14}Si^{28} = 11{,}69 \text{ MeV},$$

so daß die Niveauhöhe gleich

$$11{,}69 + 0{,}217 = 11{,}907 \text{ MeV}$$

ist. Die übrigen Niveaus werden analog bestimmt.

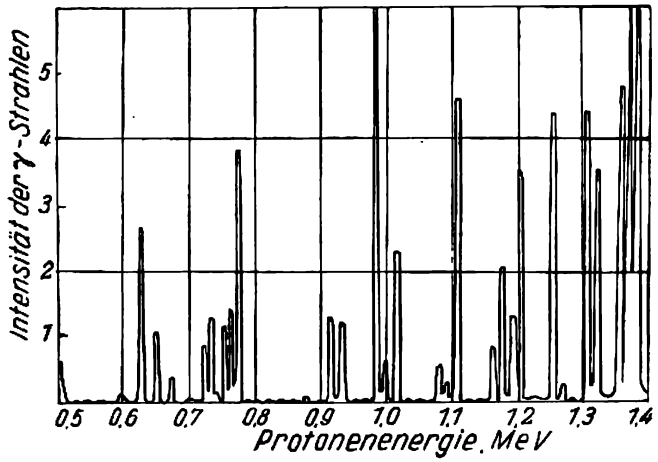


Abb. 343. Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für den Protoneneinfang durch den Kern Al^{27} von der Protonenenergie

Ein anderes interessantes Beispiel für die (p, γ)-Reaktion ist der Protoneneinfang durch den Kern Li^7. Die Reaktion $Li^7 + p$ führt zur Bildung des Zwischenkerns Be^8, der sich im Grundzustand an der Stabilitätsgrenze *in bezug auf den Zerfall in zwei α-Teilchen* befindet, wie man sofort durch Vergleich seiner Masse mit der Masse zweier α-Teilchen feststellen kann:

$$\begin{array}{rlcrl} Be^8 &= 8{,}00785 & \qquad & He^4 &= 4{,}00390 \\ 2He^4 &= 8{,}00780 & & He^4 &= 4{,}00390 \\ \hline \Delta m &= +\,0{,}00005 & & 2He^4 &= 8{,}00780 \end{array}$$

Es ist deshalb verständlich, daß der Kern Be^8 vom energetischen Standpunkt aus schon bei beliebiger Anregungsenergie sofort in zwei α-Teilchen zerfällt. Nun wird jedoch bei der

Protonenenergie 0,44 MeV ein Strahlungseinfang des Protons mit einem scharf ausgeprägten schmalen Maximum beobachtet. Das weist darauf hin, daß das Proton bei der Energie $0{,}44 \cdot \frac{7}{8} = 0{,}39$ MeV, im System des Schwerpunkts auf ein Niveau des Be^8 gelangt, auf dem sich dieser Kern *lange Zeit* aufhält. Die Anregungsenergie des Be^8 in diesem Zustand beträgt 17,2 MeV, und da kein Zerfall erfolgt, wird diese ganze Energie als γ-Quant mit der Energie $h\nu = 17{,}2$ MeV abgegeben. Der Grund dafür, daß der Kern unter den genannten Bedingungen trotz des sehr großen Energieüberschusses nicht zerfällt, ist in besonderen Auswahlregeln zu suchen. Diese regulieren die Übergangswahrscheinlichkeiten im Kern, so wie es auch in der Elektronenhülle geschieht. Die Auswahlregel, die den Übergang des Be^8 aus dem Zustand mit der Energie 17,2 MeV in den Grundzustand verbietet, trägt der Tatsache Rechnung, daß die Wellenfunktionen in diesen Zuständen gerade oder ungerade sein können.

Die praktische Bedeutung der Reaktion $Li^7\,(p, \gamma)\,Be^8$ besteht darin, daß sie eine Quelle für γ-Quanten sehr großer Energie darstellt. Die Energie dieser Photonen ist einige Male größer als die der härtesten γ-Strahlen von natürlich-radioaktiven Substanzen. Bis zur Erfindung des Betatrons war diese Reaktion die einzige Quelle für γ-Strahlen, die zur Untersuchung der Kernphotospaltung Verwendung fanden.

Die (p, n)-Reaktionen. Diese Reaktionen bestehen offensichtlich darin, daß ein Proton und ein Neutron ihre Plätze tauschen. Ein Proton „bleibt im Kern stecken", und ein Neutron wird ausgesandt. Der entstehende Kern wird also ein Isobar des Ausgangskerns mit einer um eine Einheit größeren Ladung sein. Zwei Umstände sind für den Verlauf dieser Reaktionen wesentlich. Erstens ist die Masse des Neutrons größer als die des Protons, zweitens hat das entstehende Isobar des stabilen Kerns eine größere Protonenzahl als dem Gleichgewicht entspricht und unterscheidet sich vom stabilen nur um eine Ladungseinheit. Diese Faktoren beeinflussen den Verlauf der Reaktion und die Eigenschaften ihrer Produkte in folgender Weise:

a) Der Massenüberschuß des Neutrons muß durch einen Vorrat an kinetischer Energie des Protons kompensiert werden; er darf nicht kleiner als eine bestimmte Größe sein. Das bedeutet, daß die Reaktion eine bestimmte Schwelle in Form einer für jeden Fall notwendigen Mindestenergie der Protonen haben muß.

b) Das entstehende Isobar muß radioaktiv, und zwar β^+-radioaktiv sein. Die überschüssige Protonenzahl wird dabei durch Umwandlung eines Protons in ein Neutron mit der Aussendung eines Positrons kompensiert; dabei entsteht wieder der Ausgangskern.

Als Beispiel betrachten wir nach der Reaktion $Li^7\,(p, \gamma)\,Be^8$ die Reaktion $Li^7\,(p, n)\,Be^7$. Die Energie dieser Reaktion ist negativ und gleich $-1{,}63$ MeV. Deshalb liegt die Reaktionsschwelle (d. h. die kleinste kinetische Energie der Protonen) bei $1{,}63 \cdot \frac{8}{7} = 1{,}87$ MeV. Für 2,22 MeV zeigt der Querschnitt ein breites Maximum, das auf die Existenz eines Energieniveaus des Zwischenkerns, d. h. des Be^8, hinweist, das bei 19,1 MeV liegt. Der entstehende Kern Be^7 ist, wie zu erwarten war, radioaktiv und besitzt eine Halbwertszeit von 53 Tagen[1]).

Es sind viele Beispiele der (p, n)-Reaktionen bekannt, die alle ähnlich der beschriebenen verlaufen.

---

[1]) Es ist zu bemerken, daß die Kompensation der überschüssigen Protonenzahl im Kern Be^7 nicht durch β^+-Radioaktivität erfolgt. Es wird vielmehr ein K-Elektron der eigenen Hülle eingefangen und ein Proton in ein Neutron verwandelt. Das Endergebnis ist dasselbe wie beim β^+-Radioaktivitätszerfall.

Die (p, α)-*Reaktionen.* Ein historisch interessantes Beispiel dieser Reaktionen ist die oft erwähnte Reaktion Li^7 (p, α) He^4. Es ist die erste Reaktion, die mit künstlich beschleunigten Protonen durchgeführt wurde. Die Reaktionsenergie beträgt 17,25 MeV. Bei 3 MeV liegt ein Resonanzmaximum der Ausbeute, das dem Niveau des Be^8 bei 19,8 MeV entspricht.

Wenn wir die beschriebenen Resonanzerscheinungen bei der Reaktion des Li^7 mit Protonen zusammenfassen, können wir uns eine Vorstellung über die Energieniveaus des Be^8-Kerns bilden. In Abb. 344a sind die Niveaus aufgetragen, die man mit Hilfe der betrachteten Reaktionen festgestellt hat. Rechts sind die Kurven für den Verlauf der Ausbeute der Reaktion wiedergegeben, nach deren Maximalwerten die entsprechenden Niveaus festgestellt wurden. Wir bemerken, daß einige Niveaus höher als der Potentialwall für das Proton, der für Be^8 1,9 MeV beträgt, liegen. Diese Tatsache, daß beim Zwischenkern scharf ausgeprägte Niveaus bei Energien liegen, die größer als dessen Dissoziationsenergie sind, darf uns nach den früher gegebenen Erklärungen über die Eigenschaften des Zwischenkerns nicht in Erstaunen setzen.

Als anderes interessantes Beispiel der (p, α)-Reaktion mit scharf ausgeprägten Resonanzen kann die Reaktion ${}_9F^{19}$ (p, α) ${}_8O^{16}$ dienen. Das Gesamtschema der Reaktion ist

$$ {}_9F^{19} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{10}Ne^{20} \rightarrow {}_8O^{16} + He^4 . $$

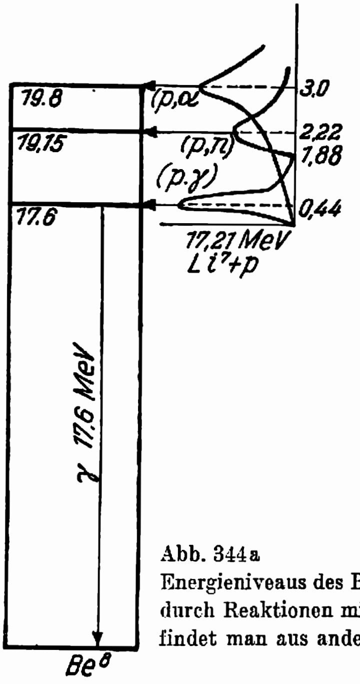


Abb. 344a
Energieniveaus des Be^8. Es sind nur die Niveaus eingezeichnet, die durch Reaktionen mit Li^7 festgestellt wurden. Die übrigen Niveaus findet man aus anderen Reaktionen

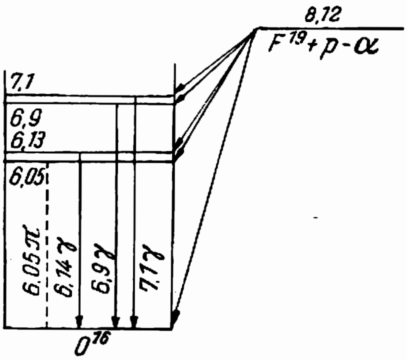


Abb. 344b. Die Energieniveaus des O^{16} aus der Reaktion F^{19} (p, α) O^{16}

Diese Reaktion bietet ein kompliziertes Bild, mit dessen Hilfe man einige Energieniveaus der Kerne O^{16} und Ne^{20} ermitteln kann. Die α-Teilchen werden in fünf Gruppen ausgesandt: die Gruppe α_0 mit der Maximalenergie 8,12 MeV und vier Gruppen geringerer Energie α_1, α_2, α_3, α_π, wobei die ersten drei Gruppen $(\alpha_1 - \alpha_3)$ von γ-Strahlung begleitet

werden, während bei der Aussendung der α_π-Gruppe Elektron-Positron-Paare entstehen. Man erklärt diese Tatsachen folgendermaßen. Bei der Aussendung der Gruppe α_0 besitzen die α-Teilchen die gesamte Anregungsenergie des Zwischenkerns Ne^{20}, und der Kern O^{16} bleibt im Grundzustand zurück. Bei der Aussendung der Gruppen mit kleinerer Energie α_1, α_2, α_3 wird durch die α-Teilchen nur ein Teil der Energie abgeführt, die übrige Energie bleibt im angeregten Kern O^{16*} zurück.

Bei der Rückkehr in den Grundzustand gibt dieser Kern seinen Energieüberschuß als γ-Strahlung ab:

$$\begin{array}{l} Ne^{20} \to O^{16*} + He^4 \\ \qquad\quad \searrow \\ \qquad\qquad O^{16} + \gamma \end{array}$$

In Tabelle XLIX sind die Energien der α-Teilchen und der ausgesandten γ-Quanten zusammengestellt. Die Übereinstimmung der Zahlen in der 3. und 4. Spalte bestätigt die Richtigkeit der Deutung.

Tabelle XLIX

Gruppe der α-Teilchen	Energie der α-Teilchen	Energiedifferenz $\alpha_0 - \alpha_n$	Energie des γ-Quants
α_0	8,12	—	—
α_1	1,97	6,15	6,14
α_2	1,21	6,91	6,91
α_3	1,01	7,11	7,11

Die Gruppe α_π mit der Energie 2,06 MeV wird, wie schon gesagt, nicht von γ-Strahlung begleitet. Die Anregungsenergie des Kerns O^{16} ist dann gleich $8{,}12 - 2{,}06 = 6{,}06$ MeV; der Übergang aus diesem in den Grundzustand ist jedoch wegen einer Auswahlregel verboten, die auf den Symmetrieeigenschaften des Anfangs- und Endzustandes beruht. Der angeregte Kern O^{16*} hat keine Möglichkeit, die Energie durch Strahlung abzugeben. Er wendet sie zur Bildung eines Elektron-Positron-Teilchenpaares auf (siehe §§ 281 bis 283). Da zur Paarbildung 1 MeV erforderlich ist, müssen die übrigen 5,05 MeV als kinetische Energie des Elektrons und Positrons erscheinen, wie man es auch tatsächlich beobachtet hat. Das Niveauschema des O^{16}, das man auf Grund dieser Reaktion gewonnen hat, ist in Abb. 344b dargestellt.

Bei der Anregung der Reaktion mit monochromatischen Protonen verschiedener Energien beobachtet man 18 scharf ausgeprägte Maxima der γ-Ausstrahlung. Sie weisen darauf hin, daß die Protonen bei genau bestimmten Energien von den Resonanzniveaus des Kerns Ne^{20} eingefangen werden. Mit Hilfe dieser Reaktion kann man also auch eine Reihe höherer Niveaus des Ne^{20} feststellen.

Die Reaktionen der Deuteronen. Die zahlreichen Reaktionen der Deuteronen sind von theoretischen und praktischen Gesichtspunkten aus sehr interessant. Beim Studium dieser Reaktionen stieß man in der ersten Zeit auf einen Widerspruch zur Theorie des Zwischenkerns. Man stellte fest, daß die Schwelle der Reaktion (d, p) gewöhnlich tiefer als die der Reaktion (d, n) liegt. Diese scheinbare Anomalie wurde von Oppenheimer und Phillips damit

erklärt, daß das Deuteron bei kleinen Energien eine Kernreaktion ohne vorhergehenden Deuteroneneinfang durch den beschossenen Kern auslösen kann. Der Grund dafür ist die starke Polarisation des Deuterons durch das COULOMB-Feld des beschossenen Kerns zu suchen. Wegen der elektrostatischen Abstoßung des Protons nähert sich das Deuteron dem Kern mit seinem „Neutronenende", während das Proton möglichst weit abgestoßen wird. Da der Abstand zwischen Proton und Neutron im Deuteron überhaupt groß ist, kann sich das Neutron an der Kernoberfläche befinden, während sich das Proton noch am Potentialwall aufhält. Das Neutron wird unter der Wirkung der Kernkräfte eingefangen und das Proton durch das elektrostatische Kernfeld abgestoßen.

Ein interessantes Beispiel für die Deuteronenreaktionen ist die Reaktion mit $_{29}Cu^{63}$. Diese Reaktion läuft je nach der Deuteronenenergie verschieden ab:

$$_1D^2 + {}_{29}Cu^{63} \to {}_{30}Zn^{65} \to \begin{cases} {}_{29}Cu^{64} + {}_1H^1 & (1) \\ {}_{30}Zn^{64} + {}_0n^1 & (2) \\ {}_{28}Ni^{61} + {}_2He^4 & (3) \\ {}_{30}Zn^{63} + 2\,{}_0n^1 & (4) \\ {}_{29}Cu^{62} + {}_1H^3 & (5) \end{cases}$$

Der Potentialwall des Cu hat für Deuteronen eine Höhe von etwa 7 MeV. Die Reaktion (1) beginnt jedoch schon bei Deuteronenenergien von 2—3 MeV und hat bei dieser Energie einen größeren Querschnitt als die Reaktion (2). Das wäre unverständlich, wenn die erste Reaktionsetappe im Einfang eines Deuterons durch den Kern Cu^{63} bestünde. Die (d, α)-Reaktion (3) beginnt bei den gleichen Energien wie die (d, p)-Reaktion, obwohl der Potentialwall für die Aussendung eines α-Teilchens doppelt so hoch wie für ein Proton ist. Das liegt daran, daß der Massendefekt des Protons fast doppelt so groß wie der Massendefekt des α-Teilchens ist. Die $(d, 2n)$-Reaktion hat einen großen Querschnitt für Deuteronenenergien von 13 — 16 MeV.

Der Mechanismus des „teilweisen Deuteroneneinfangs" schließt den gewöhnlichen Reaktionsverlauf, bei dem das ganze Deuteron vom Kern eingefangen wird, natürlich nicht aus. Der Unterschied in der Ausbeute der Reaktion für den einen oder anderen Mechanismus ist speziell für kleine Z derart gering, daß man nicht entscheiden kann, wie die Reaktion verläuft. Bei genügend hohen Werten von Z wird der von OPPENHEIMER-PHILLIPS erkannte Prozeß bevorzugt.

Am deutlichsten kann man diesen Prozeß gerade an einem sehr schweren Kern, nämlich am Wismut, $_{83}Bi^{209}$, feststellen. Die (d, p)- und (d, n)-Reaktionen sehen beim Wismut, das nur ein einziges stabiles Isotop besitzt, folgendermaßen aus:

$$_{83}Bi^{209} + {}_1D^2 \to {}_{83}Bi^{210} + {}_1H^1,$$

$$_{83}Bi^{209} + {}_1D^2 \to {}_{84}Po^{210} + {}_0n^1.$$

Die entstehenden Kerne sind radioaktiv und haben große Halbwertszeiten: Bi^{210} ist mit einem Glied der radioaktiven Uran-Radium-Familie, dem RaE, identisch und β^--radioaktiv mit einer Halbwertszeit von fünf Tagen. Das Po^{210} (RaF) ist auch ein Glied dieser radioaktiven Familie und α-radioaktiv mit einer Halbwertszeit von 138 Tagen. Wenn man die Radioaktivität der Reaktionsprodukte untersucht, kann man deshalb leicht die relative Wahrscheinlichkeit der Prozesse (d, p) und (d, n) bestimmen. Es zeigte sich, daß die Wahrscheinlichkeit des (d, p)-Prozesses bei Deuteronenenergien von 5 MeV 10 mal größer als die Wahrscheinlichkeit des (d, n)-Prozesses ist.

Zum gewöhnlichen Reaktionsverlauf mit Bildung des Zwischenkerns ist zu sagen, daß der Prozeß (d, γ), d. h. der Strahlungseinfang, für Deuteronen äußerst unwahrscheinlich ist. Das liegt am großen Massendefekt des Deuterons, der in energetischen Einheiten ausgedrückt 13,71 MeV beträgt. Deshalb bewirkt der Deuteroneneinfang eine so starke Anregung des Kerns, daß der anschließende Kernzerfall mit der Emission von Teilchen sehr viel wahrscheinlicher als die Energieabgabe durch Strahlung ist.

In praktischer Hinsicht sind die Deuteronenreaktionen besonders wichtig, da die Auslösung von Kernumwandlungen mit Deuteronen am zweckmäßigsten ist, insbesondere deshalb, weil sie bei gleicher Geschwindigkeit die doppelte Energie wie die Protonen haben.

§ 268. Die Reaktionen der α-Teilchen

Zu den Reaktionen, die durch α-Teilchen ausgelöst werden, gehören die Typen (α, p) und (α, n). Die ersten Kernreaktionen wurden gerade mit α-Teilchen, die man aus natürlich-radioaktiven Substanzen bezog, erzeugt. Diese Quellen liefern gewöhnlich α-Teilchen geringer Energie. Deshalb wurden die Reaktionen nur mit leichten Elementen beobachtet, und die Ausbeuten waren sehr klein. Außer der schon genannten historischen Reaktion $_7N^{14}\,(\alpha, p)\,_8O^{17}$ kann man als Beispiel die Reaktion

$$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{31} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_1H^1$$

nennen. Die Reaktionsenergie beträgt $Q = 2{,}26$ MeV, die Ausbeute ist von der Größenordnung ein Proton auf 10^7 α-Teilchen. Für Energien der α-Teilchen zwischen 3,92 und 6,61 MeV weist die Ausbeute sechs deutliche Resonanzmaxima auf, die die Lagen der Energieniveaus des Zwischenkerns $_{15}P^{31}$ zu bestimmen erlauben.

Von den Reaktionen des Typs (α, n) kommt der Reaktion mit Be^9 großes Interesse zu

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{13} \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1.$$

Die Energie dieser Reaktion beträgt 5,75 MeV. Für verschiedene Energien der α-Teilchen wird eine Reihe von Resonanzen beobachtet. Die Neutronen werden in einigen gleichartigen Gruppen ausgesandt; bei maximaler Neutronenenergie bleibt der Kern C^{12} im Grundzustand zurück; für andere Energien ist er angeregt.

Die Reaktion $Be^9\,(\alpha, n)\,C^{12}$ ist zunächst vom historischen Gesichtspunkt aus interessant, da bei ihrer Untersuchung die Neutronen entdeckt wurden. Außerdem behält sie auch heute noch praktische Bedeutung, indem sie als einfachste Neutronenquelle dient. Man benutzt dazu ein Röhrchen mit Berylliumoxydpulver und einer radioaktiven Substanz (z. B. gasförmiges Radon).

Im Jahre 1934 entdeckten Irene Curie-Joliot und Frederic Joliot-Curie drei Reaktionen des Typs (α, n). Sie waren deshalb bemerkenswert, weil durch die Aussendung von Neutronen Kerne entstehen, die einem langsamen spontanen Zerfall mit Abgabe von Positronen unterliegen. Daraus folgt, daß die Reaktionsprodukte radioaktiv sind. Man untersuchte die Abnahme ihrer Aktivität und fand, daß die Zahl der spontan zerfallenden Kerne tatsächlich mit der Zeit nach dem Exponentialgesetz

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

wie bei natürlich-radioaktiven Stoffen, abnimmt. Die künstlich-radioaktiven Stoffe, die bei Reaktionen des Typs (α, n) entstehen, sind, wie gesagt, β^+-radioaktiv.

Das Ehepaar JOLIOT-CURIE beobachtete die Entstehung von künstlich-radioaktiven Kernen bei Beschuß von Bor, Aluminium und Magnesium mit α-Teilchen. Man konnte annehmen, daß in diesen drei Fällen folgende Kernreaktionen ablaufen:

1. ${}_5B^{10} + {}_2He^4 \rightarrow {}_7N^{14} \rightarrow {}_7N^{13} + {}_0n^1$ (augenblicklich),
   ${}_7N^{13} \rightarrow {}_6C^{13} + \beta^+$ (langsam);
2. ${}_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{31} \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$ (augenblicklich),
   ${}_{15}P^{30} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + \beta^+$ (langsam);
3. ${}_{12}Mg^{24} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{14}Si^{28} \rightarrow {}_{14}Si^{27} + {}_0n^1$ (augenblicklich),
   ${}_{14}Si^{27} \rightarrow {}_{13}Al^{27} + \beta^+$ (langsam).

Das Schema der Reaktion (1) wurde bald auf anderem Wege bestätigt. Es stellte sich heraus, daß beim Beschuß des Kohlenstoffkerns ${}_6C^{12}$ mit Protonen auch radioaktiver Stickstoff durch Protoneneinfang entsteht.

4. ${}_6C^{12} + {}_1H^1 \rightarrow {}_7N^{13} + h\nu$; ${}_7N^{13} \rightarrow {}_6C^{13} + \beta^+$.

Die Halbwertszeiten der erhaltenen drei neuen radioaktiven Elemente — des Radiostickstoffs, des Radiophosphors und des Radiosiliziums, wurden von JOLIOT-CURIE mit 14 min, 2,5 min, 3,25 min angegeben. Wegen dieser ausreichend langen Zeit war es JOLIOT-CURIE möglich, die Richtigkeit des angenommenen Reaktionsverlaufs auf einem außerordentlich geistreichen Wege chemisch zu bestätigen. Die Methode beruht auf folgenden Überlegungen. Die Zahl der entstehenden Atome des künstlich-radioaktiven Elements ist so klein, daß der unmittelbare chemische Nachweis nicht durchführbar ist. Es ist jedoch möglich, diesem eine ausreichende Menge des entsprechenden stabilen Isotops beizumischen und letzteres einer Reihe chemischer Reaktionen zu unterwerfen. Wenn die in meßbaren Mengen beigemischte Substanz wirklich ein Isotop des erhaltenen künstlich-radioaktiven Elements ist, dann müssen sich beide bei den chemischen Reaktionen gleich verhalten. Wenn z. B. die stabile Substanz als Niederschlag ausfällt, dann muß auch die radioaktive mit ihm ausfallen. Man kann nachprüfen, daß dies in der Tat so ist, wenn man beobachtet, wo sich die Radioaktivität konzentriert. Wenn der Niederschlag ausgefällt wird, dann muß auch die Radioaktivität in den Niederschlag übergehen.

Bei der Reaktion mit Bor (Reaktion 1) nahm man an, daß die radioaktiven Atome Stickstoffatome N^{13} seien. Um dies nachzuprüfen, gingen JOLIOT-CURIE folgenden Weg. Das feste Bornitrid BN wurde mit α-Teilchen bestrahlt. Danach wurde es mit Ätznatron erwärmt, wobei der Stickstoff des BN in gasförmiges Ammoniak NH_3 überging. Mit dem stabilen Stickstoff mußte auch das durch die Bestrahlung des Bors entstandene radioaktive Element in gasförmiges Ammoniak übergehen, wenn es sich um Radiostickstoff handelt. Es zeigte sich, daß das feste Bor, das nach dem Aufarbeiten des BN mit Ätznatron übrigbleibt, seine Aktivität verliert und diese vollständig zum Ammoniak übergegangen ist. Hiervon kann man sich auch überzeugen, wenn man das Ammoniak mit flüssiger Luft kondensiert. Wenn man jetzt in dieses flüssige Ammoniak mit HCl getränktes Papier taucht, geht die Aktivität wegen Bildung von NH_4Cl auf das Papier über. Das neue radioaktive Element reagiert also chemisch wie Stickstoff, und man sieht daraus, daß es sich tatsächlich um Radiostickstoff handelt.

§ 269. Die Kernreaktionen bei sehr hohen Energien

Nachdem das Phasotron erfunden und in Gang gesetzt worden war, konnte man Teilchenströme mit Energien in der Größenordnung von hundert Millionen Elektronenvolt erzeugen. Mit dem 184-Zoll-Phasotron wurden anfangs Neutronen mit einer Energie von 100 MeV erzielt, während man heute sogar 350 MeV erreicht. Bei solchen Energien der eingeschossenen Teilchen nehmen die Kernreaktionen einen besonderen Charakter an, und das Modell des Zwischenkerns ist zu ihrer Erklärung unzureichend.

Wir wollen nun die DE-BROGLIE-Wellenlänge oder genauer $\frac{\lambda}{2\pi}$ für ein schnelles Neutron berechnen

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h}{2\pi p} .$$

Bei der Berechnung darf man nicht außer acht lassen, daß es auf die Energie der *relativen* Bewegung des eingeschossenen Teilchens, d. h. auf die Energie im System des Schwerpunkts, ankommt.

Wenn die Geschwindigkeit des Neutrons im Laboratoriumssystem gleich v und die Geschwindigkeit des Kerns gleich Null ist, und der Unterschied der Massen von Proton und Neutron vernachlässigt wird, gilt[1])

$$p_s = \frac{1}{2} p_{\mathrm{Lab}} = \frac{1}{2} \sqrt{2ME_{\mathrm{Lab}}} ,$$

so daß man

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{2\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{2ME_{\mathrm{Lab}}}} = \frac{2{,}11 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{3{,}4 \cdot 10^{-24} \cdot E_{\mathrm{Lab}} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}}} = 9{,}0 \cdot 10^{-13} E_{\mathrm{Lab}}^{-1/2}$$

erhält (E_{Lab} in MeV). Für $E_{\mathrm{Lab}} = 100$ MeV ergibt sich

$$\frac{\lambda}{2\pi} = 0{,}9 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{cm} .$$

Wir sehen, daß $\frac{\lambda}{2\pi}$ für Neutronen mit der Energie 100 MeV kleiner ist als der Wirkungsradius der Kernkräfte. Daraus folgt, daß man für Neutronenenergien in der Größenordnung von 100 MeV die Wechselwirkung des Neutrons mit den einzelnen Nukleonen des Kerns betrachten kann. Ein solches Neutron kann sich bereits im Kern bewegen, indem es ihm nur einen Teil seiner Energie abgibt. Der Kern hat für dieses Neutron eine gewisse „Durchsichtigkeit“ zum Unterschied von den Neutronen mit Energien < 10 MeV, für die der Kern „absolut schwarz“ ist. Die Rechnung zeigt tatsächlich[2]), daß die mittlere freie

---

[1]) Für ein schweres Teilchen, wie z. B. das Neutron, kann man bei 100 MeV noch die nichtrelativistische Formel für den Impuls benutzen. Der relativistische Impuls unterscheidet sich bei 100 MeV nur sehr wenig von $\sqrt{2ME}$.

[2]) Siehe A. ACHIESER und I. POMERANTSCHUK: „Einige Fragen der Kerntheorie“, S. 151; (А. Ахиезер и И. Померанчук: „Некоторые вопросы теории ядра“, стр. 151, Гостехиздат, 1951.)

Weglänge des Neutrons mit der Energie von 100 MeV im Kern mit $A = 240$ etwa gleich $4 \cdot 10^{-13}$ cm, d. h. vergleichbar mit dem Radius dieses Kerns ($9 \cdot 10^{-13}$ cm), ist. Der durch den überschnellen Neutron beim Stoß mit einem Nukleon übertragene Impuls ist nach der Unbestimmtheitsrelation $\sim \frac{h}{r_0}$; die übertragene Energie liegt in der Größenordnung $\frac{p^2}{2M} = \frac{h^2}{2Mr_0^2} \sim 10$ MeV und hängt nicht von der Energie des Neutrons ab.

Aus all diesen Überlegungen folgt, daß sich die Wechselwirkung der überschnellen Teilchen mit den Kernen wesentlich von den Wechselwirkungen unterscheiden müssen, die in den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels betrachtet wurden. Impuls und Energie können einem einzelnen Nukleon oder einigen Nukleonen des Kerns übertragen werden. Dabei erhalten die Nukleonen eine Energie, die größer als ihre Bindungsenergie ist. Sie werden deshalb aus dem Kern herausgeschlagen, während das Teilchen durch den Kern fliegt. Es kann auch passieren, daß das Teilchen im Kern steckenbleibt und diesem seine ganze Energie übergibt. Der Kern wird dadurch so hoch „erwärmt", daß er in den Zustand des „Kochens" gerät und eine große Zahl von Bruchstücken ausstößt. Ein Teilchen mit einer Energie in der Größenordnung von 1000 MeV (solche Teilchen sind in der Höhenstrahlung anzutreffen) kann den Kern schließlich völlig sprengen, d. h. einen Zerfall des Kerns in alle seine Nukleone hervorrufen.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen betrachten wir einige interessante Erscheinungen, die experimentell bei Versuchen mit überschnellen Teilchen beobachtet wurden.

Das Zerreißen des Deuterons

Beim Beschuß einer beliebigen Folie mit Deuteronen, deren Energie bis zu 200 MeV beträgt, beobachtete man die Entstehung eines intensiven Neutronenbündels mit einer Energie von etwa 100 MeV. Die Neutronen bewegten sich innerhalb eines engen Kegels, so daß die Intensität des Bündels zwischen 5 — 6° in bezug auf die Symmetrieachse auf die Hälfte abfiel. Für diese Erscheinung können zwei verschiedene Erklärungen gegeben werden:

a) Ein Neutron am Rande des Kerns kann durch ein nahe vorbeifliegendes Deuteron herausgeschlagen werden. In diesem Falle würde das herausgeschlagene Neutron unter den günstigsten Bedingungen eine Energie von der Größenordnung 10 MeV, d. h. bedeutend weniger als die beobachtete Maximalenergie, erhalten.

b) Das Deuteron kann durch die Einwirkung des elektrostatischen Feldes oder der Kernkräfte auseinandergerissen werden. Wir wollen diesen Fall etwas ausführlicher behandeln.

Zum Verständnis des Prozesses muß man sich vor allem das Schema des Versuchs vorstellen (Abb. 345). Die Folie war im Innern des Phasotrons derart angeordnet, daß sie von den Deuteronen der letzten Bahn, d. h. gerade von solchen, die die Maximalenergie erreicht haben, getroffen wird (es ist zu beachten, daß es beim Phasotron zum Unterschied vom Zyklotron nur einen Duanten gibt, wie es auch im Bild gezeigt ist).

Wenn die Neutronen durch Zerreißen des Deuterons entstehen, werden sie ihren Weg geradlinig fortsetzen. Die Protonen werden dagegen vom starken Magnetfeld des Phasotrons nach der Seite abgelenkt und geraten nicht in das Bündel. Deshalb werden wir in den weiteren Ausführungen, unabhängig davon, ob das Zerreißen des Deuterons durch die elektrostatische Abstoßung des Protons oder durch die Kernkräfte zu erklären ist, von der Wechselwirkung des *Protons* sprechen, obgleich in dem Falle, in dem das Deuteron durch

Einwirkung der Kernkräfte zerrissen wird, sowohl das Proton als auch das Neutron der gleichen Wechselwirkung mit den Nukleonen des Kerns unterliegen.

Das Wesentliche in der Erklärung ist nun folgendes. Das Deuteron ist, wie wir wissen, ein sehr schwach gebundener Kern (Bindungsenergie 2,18 MeV). Das Zerreißen des Deuterons durch elektrostatische Kräfte ist eine tatsächlich beobachtete Erscheinung, wie wir bei der Betrachtung der Kernreaktionen von Deuteronen gesehen haben. Der Unterschied zwischen dem hier uns interessierenden Prozeß und dem OPPENHEIMER-PHILLIPS-Prozeß besteht nun darin, daß im letzteren Fall das Neutron vom Kern eingefangen wird, während es bei sehr großen Deuteronenenergien seinen Weg fortsetzt. Der auf der Grundlage des elektrostatischen Mechanismus berechnete Wirkungsquerschnitt und die Winkelverteilung der Neutronen stimmen jedoch nicht mit den experimentellen Ergebnissen überein. Wahrscheinlicher ist, daß das Deuteron nur durch die Einwirkung von Kernkräften zerreißen wird. Wenn ein Deuteron mit einer Energie von 190 — 200 MeV durch den Rand des Kerns tritt, ist die Dauer seines Zusammenstoßes mit einem Kernnukleon kurz im Vergleich zur Periode der relativen Bewegung des Neutrons und Protons im Deuteron selbst, und der dem Proton übergebene Impuls ist groß im Vergleich zum Impuls der relativen Bewegung. Das Proton wird deshalb vom Neutron abgerissen, wobei letzteres seine Bahn mit dem Impuls fortsetzt, den es im Augenblick des Zusammenstoßes hatte.

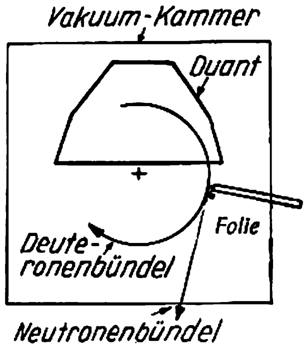


Abb. 345. Schema des Versuchs zur Beobachtung des Zerreißens des Deuterons bei sehr großen Energien

Einfache Rechnungen, die auf dem Impulssatz beruhen, zeigen, daß das Neutron seine Bewegung im Grenzfall mit einer Energie fortsetzt, die gleich der halben Energie des Deuterons ist. Da es aber außerdem erforderlich ist, die Energie des Neutrons in seiner Bewegung relativ zum Massenzentrum des Deuterons in Betracht zu ziehen, erhält man eine bestimmte Verteilung der Energie mit einem scharf ausgeprägten Maximum.

Auf Grund dieser Vorstellung wurden der Wirkungsquerschnitt, die Winkel- und die Energieverteilung ausgerechnet; dabei wurde gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen gefunden[1]).

[1]) Zur Diskussion dieser Experimente siehe die Arbeit von N. A. WLASSOW, (Н. А. Власов, *Успехи физических наук*, т. XLIII, стр. 220 и след , 1951). Deutsche Übersetzung in Abh. a. d. sowj. Phys. II, 1951, 215 — 300.

Die Entstehung von Neutronen beim Durchgang von Protonen sehr großer Energie

Diese Versuche wurden schon auf S. 343 bei der Erörterung des Austauschcharakters der Kernwechselwirkungen erwähnt. In den letzten Versuchen (1950) wurden auf diesem Wege durch Einwirkung von Protonen mit der Energie 350 MeV Neutronen erzeugt, die sich geradlinig mit einer Energie bis zu 350 MeV bewegten. Die Energieverteilung weist dabei ein breites Maximum bei 270 MeV auf. Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß man dies nicht damit erklären kann, daß Neutronen aus dem Kern herausgeschlagen werden, da sich die Energie von etwa 10 MeV, die das Nukleon beim Zusammenstoß mit dem schnellen Proton erhält, als unabhängig von der Energie des letzteren erweist. Eine viel glaubwürdigere Erklärung ist die „Umladung“ auf Kosten der Austauschwechselwirkungen. Das Proton des Bündels verwandelt sich dabei in ein Neutron, und das Kernneutron wird zum Proton. Im günstigsten Fall behält das neu entstandene Neutron die Energie, die es als Proton hatte. Die mögliche Energiedifferenz hängt in diesem günstigsten Fall von dem Unterschied der Energien des primären Kerns und des Kerns, der durch die Umwandlung eines seiner Neutronen in ein Proton entsteht, ab. In weniger günstigen Fällen wird ein Teil der Energien in verschiedenen Wechselwirkungsprozessen beim Durchgang durch den Kern verloren gehen, und deshalb weisen die entstandenen Protonen ein ganzes Spektrum von Energiewerten bis zur Maximalenergie auf.

Die Kernzertrümmerung

Auf die Besonderheiten der Kernreaktionen bei sehr großen Energien der anregenden Teilchen wurde am Anfang dieses Paragraphen bereits hingewiesen. Diese Reaktionen nehmen eine Zwischenstellung zwischen den gewöhnlichen Kernreaktionen und der Kernspaltung ein. Bei den gewöhnlichen Kernreaktionen werden nach der Bildung des Zwischenkerns entweder γ-Strahlen ausgesandt, oder es werden ein bzw. bei höheren Energien zwei Teilchen ausgestoßen. Das Kernprodukt ist dabei entweder ein Isotop des beschossenen Kerns (beim Neutroneneinfang) oder es steht im Periodischen System ein bis zwei Plätze von diesem entfernt. Bei der Spaltung zerbricht der Kern in zwei oder drei Splitter mit vergleichbarer Masse. Die Reaktionen unter der Einwirkung von Teilchen mit Energien in der Größenordnung von

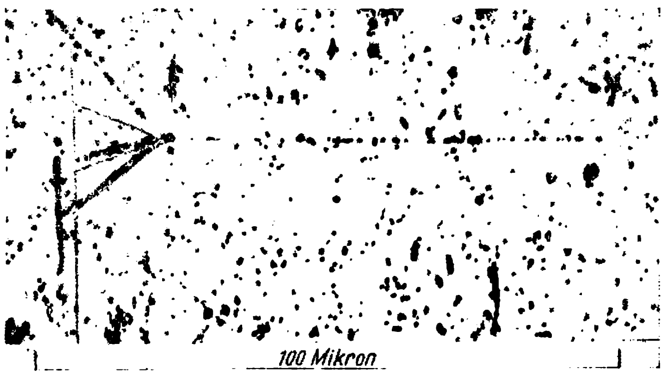


Abb. 346. Ein Zertrümmerungsstern in der Photoemulsion, der durch die Einwirkung eines schnellen Neutrons entstanden ist. Es sind die Spur des ausgestoßenen Kerns Li^8 und der Zerfall des letzteren in zwei α-Teilchen zu erkennen

100 MeV und mehr bestehen dagegen in der Aufspaltung des beschossenen Kerns in eine ganze Anzahl von Splittern mit sehr verschiedener Masse. Es ist meist sehr schwierig, alle Produkte einer solchen weitgehenden Zertrümmerung genau zu identifizieren. Zur Beschreibung dieser Reaktionen benutzt man eine Kurzschrift, in der auf die Zahl der abgespaltenen Teilchen ohne genauere Nennung der Kerne, in deren Form diese Teilchen abgespalten worden sind, hingewiesen wird, z. B.

$$_{33}As^{75}\,(d,\ 9p,\ 12n)\,_{23}V^{52}\,.$$

Als interessante Beispiele können die Zertrümmerungsprozesse des Cu-Kerns dienen, bei denen radioaktive Produkte beobachtet werden, die sich von $_{15}P^{32}$ bis $_{30}Zn^{63}$ verteilen. Noch weiter geht der Aufsplitterungsprozeß des Kerns U^{238}, der neben der Spaltung bei Beschuß des Urans mit α-Teilchen von 380 MeV auftritt. Durch beide Prozesse erhält man eine große Anzahl von Splittern, die sich ohne Unterbrechung bis zu $Z = 25$ (Mn) erstrecken.

Die Zertrümmerung oder Explosion von Kernen ist in einer Reihe von Fällen mit der Wilson-Kammer oder nach der Photoplattenmethode festgehalten worden. Die Bahnen der ausgeschleuderten Teilchen bilden dabei einen sogenannten „Zertrümmerungsstern". Ein interessantes Beispiel für einen solchen Stern in der Photoemulsion ist in Abb. 346 dargestellt. Der Zertrümmerungsstern wurde durch ein schnelles Neutron, dessen Spur nicht zu sehen ist, verursacht. Eine dicke, nach links unten gerichtete Spur fällt besonders auf. Sie gehört zu einem als Splitter ausgeschleuderten Li^8-Kern, der ein β^--Elektron aussendet und sich in Be^8 verwandelt; letzterer zerfällt sofort in zwei α-Teilchen.

§ 270. Der Kernphotoeffekt

γ-Strahlen ausreichender Härte rufen besondere „photochemische Kernreaktionen" hervor. Für Energien der γ-Quanten bis zu 20 MeV geht der Prozeß nach dem Schema (γ, n) vor sich, d. h., es wird ein Neutron nach der Absorption eines γ-Quants ausgesandt. Dieser Prozeß läßt sich gut in die Theorie des Zwischenkerns einordnen. Die Absorption des γ-Quants „erwärmt" den Kern, und es wird ein Nukleon ausgeschleudert, da die Emission von γ-Strahlen wenig wahrscheinlich ist. Die Tatsache, daß bei nicht allzu hohen Energien nur die Befreiung von Neutronen beobachtet wird, hängt offenbar mit der Existenz des Potentialwalls für die Loslösung eines Protons zusammen.

Die einfachste (γ, n)-Reaktion ist der Kernphotoeffekt für Deuteronen $D^2\,(\gamma, n)\,H^1$. Da die Bindungsenergie des Deuterons insgesamt 2,18 MeV ausmacht, konnte man die Reaktion mit γ-Strahlen eines natürlich-radioaktiven Stoffes, des Radiothors ($h\nu = 2{,}6$ MeV), auslösen. Eine ganze Zeit lang bildete diese Reaktion das einzige Beispiel für den (γ, n)-Typ, da man keine Quellen für γ-Strahlen mit ausreichend hoher Photonenenergie kannte, denn diese Energie mußte auf alle Fälle größer als die Bindungsenergie des Nukleons im Kern, d. h. größer als 7 — 8 MeV, sein. Diese Schwierigkeit wurde dann durch die Anwendung von γ-Strahlen, die bei der früher betrachteten Reaktion $Li^7\,(p, \gamma)\,Be^8$ frei werden (siehe S. 410), überwunden. Die Energie dieser Photonen beträgt, wie wir wissen, 17,2 MeV. Deshalb war es möglich, noch eine ganze Reihe von (γ, n)-Reaktionen zu finden. Als Beispiele nennen wir hier die Reaktionen

$$O^{16}\,(\gamma, n)\,O^{15}\,, \quad Mg^{24}\,(\gamma, n)\,Mg^{23}\,.$$

Diese Reaktionen konnten beobachtet und ihre Produkte identifiziert werden, weil sie radioaktiv sind und ihre Halbwertszeiten schon früher aufgefunden wurden. Die unmittelbare Beobachtung der befreiten Neutronen wird jedoch durch den Untergrund der γ-Strahlen sehr erschwert.

Nach der Inbetriebnahme des Betatrons erweiterten sich die Möglichkeiten zum Studium des Kernphotoeffektes wesentlich. Schon mit dem ersten Betatron für 20 MeV konnte man eine Reihe neuer (γ, n)-Reaktionen entdecken und die Schwelle für die Neutronenabspaltung bestimmen. Die Schwelle, d. h. die zur Verwirklichung des Prozesses erforderliche Minimalenergie, liegt für die Elemente vom Kohlenstoff bis zum Silber zwischen 9,5 und 19,5 MeV.

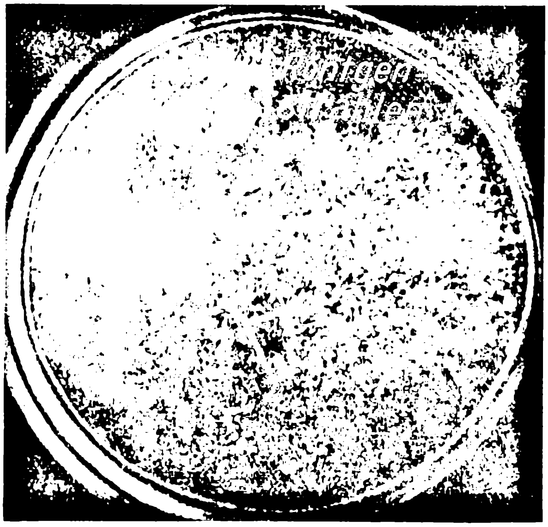


Abb. 347. Eine Vielfachspaltung

Mit dem Betatron für 100 MeV erweiterten sich die experimentellen Möglichkeiten bedeutend. Photonen dieser Energie können sowohl Protonen als auch Neutronen mit praktisch gleicher Wahrscheinlichkeit befreien. Der zurückbleibende Kern wird außerdem so weit „erwärmt“, daß es möglich ist, noch weitere Teilchen zu verdampfen. Man konnte von vornherein erwarten, daß für Anregungsenergien von 100 MeV Reaktionen zu beobachten sind, die durch Emission von 6 bis 8 Teilchen begleitet werden.

Zur Untersuchung der Vielfachspaltung verwendet man eine Wilson-Kammer in einem Magnetfeld oder auch die Methode der dickschichtigen Photoplatten. In beiden Fällen kann man die Emissionsrichtungen der Teilchen beobachten und ihre relative Energie bestimmen. Diese Methoden erlauben jedoch nicht, die Emission von Neutronen zu registrieren, so daß das Bild nicht vollständig ist. Eine andere, in mancher Hinsicht bessere Methode ist die Untersuchung der künstlichen Radioaktivität, die bei der Bestrahlung des Objekts mit Röntgenstrahlen der Energie $\sim$ 100 MeV entsteht.

In Abb. 347 ist ein Beispiel für eine Vielfachspaltung wiedergegeben, die in der Wilson-Kammer beobachtet wurde. Die Teilchen wurden folgendermaßen identifiziert: 1 ist ein α-Teilchen mit einer Reichweite von 3 cm und einer Energie von 4,5 MeV; 2 und 3 sind Protonen; 4 ist wahrscheinlich der Rückstoßkern. Da die Natur des primären Kerns nicht bekannt ist, kann man bezüglich des Rückstoßkerns nur die Vermutung aussprechen, daß es sich bei ihm um Li^6 oder Li^7 handelt, wenn ein Stickstoffkern gespalten worden ist (das ist am wahrscheinlichsten).

XXI. DIE RADIOAKTIVITÄT

A. Gesetze der radioaktiven Umwandlungen

§ 271. Allgemeine Charakteristik der radioaktiven Prozesse

Die Entdeckung der Radioaktivität des Urans durch BECQUEREL im Jahre 1896 ist eins der wichtigsten Ereignisse in der Geschichte der Atomphysik. Die darauf folgende Entdeckung des Poloniums und Radiums und die Untersuchung ihrer Radioaktivität durch MARIE und PIERRE CURIE im Jahre 1898 bildeten den Ausgangspunkt einer langen Kette von Untersuchungen der „spontanen“[1]) Prozesse der Kernumwandlungen. Obwohl der Atomkern erst 15 Jahre später entdeckt wurde, wies die Unabhängigkeit der radioaktiven Prozesse von solchen Änderungen der äußeren physikalischen und chemischen Bedingungen, die zum Umbau der Elektronenhülle führen, darauf hin, daß sich diese Prozesse in den innersten Teilen des Atoms abspielen.

Die radioaktiven Substanzen zeigen eine Reihe eigentümlicher Wirkungen. Sie ionisieren Gase, schwärzen photographische Emulsionen, bringen einige fluoreszierende Substanzen zum Leuchten, schließlich setzen sie Energie frei, so daß die Temperatur eines radioaktiven Präparats immer höher als die des umgebenden Mediums ist. Die Träger aller dieser Wirkungen sind bekanntlich die Strahlen, die von den radioaktiven Substanzen ausgesandt werden. Es handelt sich dabei um α-, β- und γ-Strahlen. Diese drei Strahlungsarten unterscheiden sich in ihrer Natur und ihrem Durchdringungsvermögen.

1. Die α-Strahlen sind durch geringes Durchdringungsvermögen und starke ionisierende (und auch photographische) Wirkung ausgezeichnet.

2. Die β-Strahlen besitzen großes Durchdringungsvermögen und geringe Ionisationswirkung.

3. Die γ-Strahlen zeichnen sich durch das größte Durchdringungsvermögen und die geringste Ionisationswirkung aus.

Im Jahre 1900 wurde von RUTHERFORD und SODDY eine Erklärung für die eigentümlichen Erscheinungen, wie sie an radioaktiven Substanzen zu beobachten sind, gegeben. Diese Autoren schufen eine Theorie des radioaktiven Zerfalls. Nach dieser Theorie sind alle radioaktiven Erscheinungen dadurch bedingt, daß sich die Kerne[2]) radioaktiver Substanzen „spontan“ in andere Kerne verwandeln. Zum Unterschied von den radioaktiven Prozessen der im letzten Kapitel betrachteten Kernreaktionen erfordern die radioaktiven Umwandlungen kein äußeres anregendes Agens. Sie laufen im allgemeinen verzögert ab und haben mitunter sehr große Halbwertszeiten. Die Mannigfaltigkeit dieser Zeiten ist tatsächlich sehr groß; neben solchen von Milliarden Jahren gibt es solche von einigen 10^{-6} Sekunden. Aber auch diese letzteren Halbwertszeiten sind noch sehr groß im Vergleich zu den Größen τ, die die Lebensdauer der Zwischenkerne bei Kernreaktionen charakterisieren.

---

[1]) Über den Sinn des Wortes „spontan“ siehe S. 286 und 425.

[2]) 1900 wußte man noch nichts von der Existenz des Atomkerns und sprach vom Zerfall der Atome. Wir benutzen hier die modernen Vorstellungen.

Die Radioaktivität wurde zuerst bei den in der Natur vorkommenden schweren Elementen Uran, Radium, Aktinium und Thorium beobachtet. In der Folgezeit wurden jedoch auch natürliche radioaktive Isotope mit kleinen und mittleren Atommassen gefunden. Es handelt sich um die radioaktiven Isotope des Kaliums $_{19}K^{40}$, Rubidiums $_{37}Rb^{87}$, Samariums $_{62}Sm^{152}$, Lutetiums $_{71}Lu^{176}$ und Rheniums $_{75}Re^{187}$. Von den genannten Isotopen unterliegt nur das Samarium einer α-Umwandlung, die übrigen sind β-radioaktiv. Als interessantes Beispiel für die ständige Neubildung von radioaktiven Kernen in der Natur kann die Entstehung des radioaktiven Kohlenstoffisotops C^{14} dienen. Dieses Isotop besitzt eine große Zerfallszeit ($>$ 5000 Jahre), die jedoch zur Erhaltung des C^{14} durch die geologischen Epochen der Erdgeschichte unzureichend ist. Das Isotop C^{14} entsteht in der Atmosphäre durch Einwirkung von Neutronen der Höhenstrahlen nach der Reaktion $_7N^{14}\,(n, p)\,_6C^{14}$. Es wird durch Photosynthese von den Pflanzen aufgenommen und gelangt so in den Kreislauf der Stoffe in der Natur.

Heute sind außerdem mehr als 600 radioaktive Isotope, die man künstlich gewinnt, bekannt.

Der häufigste radioaktive Prozeß ist die β-Umwandlung. Man kann sie ganz allgemein als eine Umwandlung ansehen, bei der sich die Kernladung um eine Einheit verringert oder vergrößert und die Massenzahl unverändert bleibt. Dieser allgemeinen Definition entsprechen Prozesse, bei denen entweder die gewöhnlichen negativen Elektronen (β^--Prozesse) oder Positronen (β^+-Prozesse) ausgesandt werden oder vom Kern ein Elektron aus der eigenen Elektronenhülle absorbiert wird (sogenannter K-Einfang). Die α-Umwandlungen kommen unter allen natürlichen und künstlich erzeugten radioaktiven Isotopen bedeutend seltener vor. Sie nehmen ihrem Wesen nach eine Zwischenstellung zwischen den typischen β-radioaktiven und tiefergehenden Kernteilungs- und Kernspaltungsprozessen ein.

In den meisten Fällen besteht der radioaktive Zerfall künstlich erzeugter Isotope aus nur einem Kettenglied. Der radioaktive Kern wandelt sich dabei in einen stabilen Kern um. Eine lange Kette von sich ineinander verwandelnden Kernen erhält man nur bei radioaktiven Isotopen, die durch eine Spaltung entstehen und deren Gleichgewichtsrelation zwischen der Protonen- und Neutronenzahl besonders stark gestört ist. Von den schweren natürlich-radioaktiven Isotopen (Uran, Thorium) gehen ebenfalls lange Zerfallsreihen aus; sie bilden die sogenannten radioaktiven Familien.

In diesem Kapitel betrachten wir zuerst die Grundgesetze der radioaktiven Umwandlungen. Danach behandeln wir kurz die Wechselwirkungen der radioaktiven Strahlungen mit dem Medium, und schließlich untersuchen wir einzeln die verschiedenen Arten der radioaktiven Umwandlungen.

§ 272. Das Elementargesetz des radioaktiven Zerfalls

Wir wollen das Grundgesetz der radioaktiven Umwandlungen an Hand des historisch wichtigen und interessanten Beispiels der Umwandlung des Radiums $_{88}Ra^{226}$ betrachten. Wenn man in eine abgeschmolzene Glasröhre 1,318 g Radiumchlorid ($RaCl_2$), das gerade 1 g Radium enthält, einschließt, dann kann man nach einigen Tagen auf Grund einer mikroanalytischen chemischen Untersuchung der Luft in der Röhre feststellen, daß sich zwei neue Gase gebildet haben, und zwar Helium und Radon. Das letztere ist stark radioaktiv, und es reichert sich nach einem anderen Gesetz an als das Helium. Während die Menge des Heliums proportional zur Zeit ansteigt und während eines Jahres auf 167 mm³ wächst, nimmt das Radon nur bis zu einer bestimmten Grenze zu. Nach 4 Tagen stellt man 0,311 mm³ Radon, nach 8 Tagen 0,463 mm³, nach 30 Tagen 0,607 mm³ fest, und

diese Menge bleibt schon konstant, so daß nach einem Jahr die gleiche Menge (0,607 mm³) Radon in der Röhre enthalten ist. Wenn man das Radon vom Radium trennt, nimmt die Radonmenge ziemlich schnell ab, und zwar nach 4 Tagen auf die Hälfte, nach 8 Tagen auf ein Viertel und nach 30 Tagen verschwindet das Radon praktisch vollständig.

Die Zunahme des Radons in Gegenwart von Radium und die Abnahme im isolierten Zustand werden durch die Kurven der Abb. 348 dargestellt.

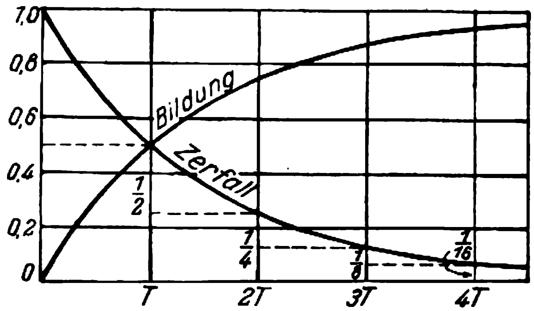


Abb. 348
Bildung und Zerfall des Radons

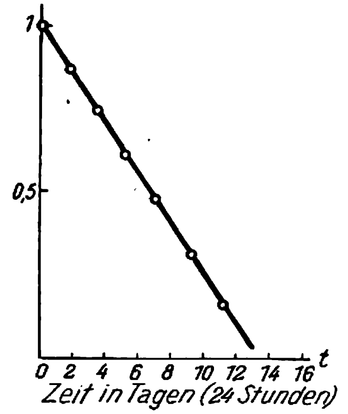


Abb. 349. Der Zerfall des Radons (halblogarithmische Koordinaten)

Beide Kurven liegen spiegelsymmetrisch zueinander, wie ihre genaue Analyse zeigt. Wenn man die Kurve für die Abnahme des isolierten Radons in anderen Koordinaten aufträgt, und zwar auf der Abszissenachse die Zeit und auf der Ordinatenachse den natürlichen Logarithmus der Menge des Radons oder der Intensität seiner Strahlung, dann erhält man eine Gerade (Abb. 349). Dies bedeutet, daß die Abnahme des Radons mit der Zeit dem Exponentialgesetz

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{272,1}$$

gehorcht. Hier bedeutet N die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne zur Zeit t, N_0 die Zahl der Kerne zur Zeit $t = 0$ und λ eine Konstante, die die Zerfallsgeschwindigkeit charakterisiert. Man sieht, daß die Konstante λ aus dem t, $\ln N$-Diagramm (Abb. 349) als Steigung der Geraden gegen die Abszissenachse bestimmt werden kann.

Die Formel (272,1) ist das Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls einer isolierten radioaktiven Substanz.

Zahlreiche Versuche, die man sowohl mit Radon als auch mit anderen radioaktiven Stoffen durchgeführt hat, zeigten, daß die gewöhnlichen Änderungen der äußeren Bedingungen keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit der radioaktiven Umwandlungen haben. Die radioaktiven Substanzen wurden auf Temperaturen in der Größenordnung von 1000 Grad erhitzt, sie wurden dem Druck von einigen hundert Atmosphären ausgesetzt und in ein Magnetfeld mit einer Feldstärke von einigen tausend Oersted gebracht. Bei all diesen Einwirkungen konnte keine Geschwindigkeitsänderung der radioaktiven Prozesse beobachtet werden. Diese Tatsachen weisen darauf hin, daß der radioaktive Zerfall eine Eigenschaft

des Kerns selbst ist und nur von seinem inneren Zustand abhängt[1]). Unter diesen Bedingungen ist die Formel (272,1) einfach das *statistische* Gesetz des spontanen Kernzerfalls. Wenn der Zerfall spontan erfolgt, dann besteht tatsächlich die einfachste Annahme, die man in bezug auf die Geschwindigkeit dieses Prozesses machen kann, in folgendem: Die Anzahl der Kerne, die während des Zeitabschnitts zwischen t und $t + dt$ zerfallen, muß dem Zeitintervall dt und der Zahl der Kerne N, die zur Zeit t noch nicht zerfallen sind, proportional sein:

$$-dN = \lambda N\, dt. \tag{272,2}$$

Wenn man diese Gleichung integriert und die Anfangsbedingung (die Anzahl der Atome zur Zeit $t = 0$ gleich N_0) einführt, erhält man

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

d. h. das Exponentialgesetz (272,1).

Die Konstante λ heißt *Zerfallskonstante*. Wenn man λ kennt, kann man die mittlere Lebensdauer eines radioaktiven Atoms ausrechnen, indem man von uns schon bekannten Überlegungen ausgeht (siehe z. B. Teil I, § 93). Die Anzahl der Atome, die während des Zeitabschnitts von t bis $t + dt$ zerfallen, d. h., die t sec leben, beträgt nach (272,2) $\lambda N\, dt$. Die Summe ihrer Lebensdauer ist $t\lambda N\, dt$, und die Summe der Lebensdauer aller N_0 Atome, die zur Zeit $t = 0$ vorhanden waren, beträgt $\int_0^\infty t\lambda N\, dt$. Die mittlere Lebensdauer τ ist deshalb gleich

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N\, dt = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{272,3}$$

Man kann also die Formel (272,1) in der Form

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{272,1'}$$

schreiben.

In der Praxis ist es günstiger, die Lebensdauer durch die Halbwertszeit T, d. h. durch die Zeit zu charakterisieren, in deren Verlauf die Hälfte aller Atome einer gegebenen radioaktiven Substanz zerfallen. Aus (272,1) erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda T},$$

woraus sich

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693\,\tau \tag{272,4}$$

[1]) Das bedeutet natürlich nicht, daß auf den Verlauf des radioaktiven Prozesses prinzipiell keine Einwirkung möglich ist. Für uns ist es hier wesentlich, daß intensive Einwirkungen, die man bis jetzt anwandte, keinen Einfluß auf die Zerfallsgeschwindigkeiten haben, woraus folgt, daß sich dieser Prozeß in den innersten Teilen des Atoms, d. h. im Atomkern selbst, abspielt.

ergibt. Für das Radon ist z. B. $\lambda = 2{,}097 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1}$, d. h.

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}097 \cdot 10^{-6}} = 477\,000\ \mathrm{sec} = 5{,}56\ \mathrm{Tage}.$$

Hieraus ergibt sich eine Halbwertszeit von $0{,}603 \cdot 5{,}56 = 3{,}825$ Tagen.

Die Halbwertszeiten der verschiedenen radioaktiven Stoffe sind sehr unterschiedlich, wie man aus den folgenden Zahlen ersehen kann:

Substanz	T
Samarium, $_{62}Sm^{152}$	$2{,}5 \cdot 10^{11}$ Jahre
Uran, $_{92}U^{238}$	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ Jahre
Radium, $_{88}Ra^{226}$	1622 Jahre
Radon, $_{86}Rn^{222}$	3,82 Tage
Kohlenstoff, $_{6}C^{11}$	20,4 min
Radium C′, $_{84}RaC'^{214}$	$1{,}5 \cdot 19^{-4}$ sec
Thorium C′, $_{84}ThC'^{212}$	$3 \cdot 10^{-7}$ sec

Weitere Beispiele sind in der Tabelle des Anhangs XIV angegeben.

§ 273. Der statistische Charakter des radioaktiven Zerfallsgesetzes

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß das exponentielle Zerfallsgesetz, das experimentell für isolierte radioaktive Stoffe (z. B. Radon) bestätigt wird, allein aus der Annahme des spontanen Kernzerfalls abgeleitet werden kann. Mit spontanem Zerfall ist dabei gemeint, daß der Zerfall unter dem Einfluß innerer Störungen abläuft. Wir haben keinerlei Voraussetzungen über den Zerfallsmechanismus gemacht, sie sind hier auch nicht notwendig. Die einzige wesentliche Tatsache, von der wir uns leiten ließen, bestand darin, daß die Konstante λ, die die Instabilität des Kerns charakterisiert, vom Zustand des Kerns selbst abhängt. Deshalb ist der Atomzerfall ein rein individuelles Ereignis, das nicht von äußeren Einwirkungen beeinflußt wird. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein gegebenes Atom das „Alter“ t erreicht, hängt nur vom Betrag dieses Alters ab.

Wir zeigen sofort, daß dieser rein statistische Gesichtspunkt direkt zum exponentiellen Zerfallsgesetz führt. Nach dem Gesagten ist also für ein gegebenes Atom die Wahrscheinlichkeit p, das Alter t zu erreichen, nur eine Funktion von t:

$$p = p(t). \tag{273,1}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Alter $t + \tau$ zu erreichen, ist dann eine Funktion von $t + \tau$, d. h. $p(t + \tau)$. Andererseits kann man dieses „am-Leben-bleiben“ während der Zeit $t + \tau$ als zusammengesetztes Ereignis ansehen, das aus dem „Am-Leben-Bleiben“ während der Zeit von 0 bis t und von t bis $t + \tau$ besteht (siehe analoge Überlegungen in Teil I, § 24). Die Wahrscheinlichkeit eines solchen zusammengesetzten Ereignisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten $p(t)\,p(\tau)$. Es gilt also

$$p(t + \tau) = p(t)\,p(\tau). \tag{273,2}$$

Wir differenzieren jetzt diese Gleichung und setzen dabei voraus, daß t veränderlich und τ konstant ist:

$$p'(t+\tau) = p'(t)\, p(\tau). \tag{273,3}$$

Wir dividieren (273,3) durch (273,2) und erhalten

$$\frac{p'(t+\tau)}{p(t+\tau)} = \frac{p'(t)}{p(t)} \tag{273,4}$$

oder, da τ beliebig ist,

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = \text{const}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Alter $t = 0$ zu erreichen, ist offensichtlich 1; die Wahrscheinlichkeit, daß der Kern nicht das Alter $t = \infty$ erreicht, ist ebenfalls 1. Die Wahrscheinlichkeit, einen unendlichen Zeitraum zu überleben, ist also gleich 0. Daraus folgt, daß $p(t)$ eine abnehmende Funktion der Zeit und damit die Konstante auf der rechten Seite von (273,4) eine negative Zahl ist:

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = -k \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = -k\,dt.$$

Hieraus und aus der Anfangsbedingung $p(0) = 1$ finden wir

$$p = e^{-kt}. \tag{273,5}$$

Wenn also die Wahrscheinlichkeit für ein Atom, das Alter t zu erreichen, gleich e^{-kt} ist, dann bleiben von N_0 Atomen, die zur Zeit $t = 0$ vorhanden waren, zur Zeit t im Mittel

$$N = N_0 e^{-kt} \tag{273,6}$$

nichtzerfallene übrig. Durch Vergleich dieser Formel mit (272,1) sehen wir, daß (273,6) das Gesetz des radioaktiven Zerfalls darstellt, wobei die Konstante $k = \lambda$ zu setzen ist.

Dasselbe Resultat kann man auch auf anderem Wege erhalten. Für ein genügend kleines Zeitintervall Δt ist die Zerfallswahrscheinlichkeit q proportional Δt:

$$q = \lambda \Delta t.$$

Diese Annahme bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit λ, einen Zerfall *in der Zeiteinheit* zu erleiden, nicht von der Zeit, d. h. *von der Vorgeschichte des Atoms*, abhängt und für alle Atome des gegebenen radioaktiven Produkts konstant ist. Die Wahrscheinlichkeit, die Zeit Δt zu *überleben*, d. h. nicht zu zerfallen, ist deshalb

$$p = 1 - \lambda \Delta t. \tag{273,7}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Alter $t = k\Delta t$ zu erreichen, kann man aufschreiben, indem man dieses Ereignis als zusammengesetzt betrachtet. Es besteht aus dem Überleben von 0 bis Δt, dann von Δt bis $2\Delta t$ usw. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird deshalb ein Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten

$$(1 - \lambda \Delta t)^k = (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}},$$

das man in der Form

$$[(1-\lambda\Delta t)^{-\frac{1}{\lambda\Delta t}}]^{-\lambda t}$$

schreiben kann. Als Grenzwert für $\Delta t \to 0$ erhalten wir

$$p = \lim_{\Delta t\to 0} [(1-\lambda\Delta t)^{-\frac{1}{\lambda\Delta t}}]^{-\lambda t} = e^{-\lambda t},$$

d. h. wiederum das Exponentialgesetz.

Aus dem statistischen Charakter des Gesetzes für den radioaktiven Zerfall folgt, daß dieses Gesetz

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

nur dann streng erfüllt wird, wenn N sehr groß ist. Für nicht zu große N werden wie bei allen statistischen Erscheinungen Schwankungen (Fluktuationen) auftreten.

Diese Fluktuationen kann man bei radioaktiven Umwandlungen besonders bequem beobachten, da bei jeder Umwandlung ein so großer Energiebetrag frei wird, daß die Registrierung der Umwandlungsakte einzelner Atome möglich ist. Solche Beobachtungen wurden tatsächlich vielfach durchgeführt; es wurden dabei die α-Teilchen während eines bestimmten Zeitintervalls gezählt. Bei den Versuchen von Rutherford und Geiger wurden z. B. insgesamt 10000 Szintillationen von α-Teilchen eines schwachen radioaktiven Präparats gezählt. Man zählte jeweils die Szintillationen, die während eines bestimmten Zeitintervalls $\left(\frac{1}{8}\text{ Minute}\right)$ beobachtet wurden.

So erhielt man beispielsweise folgende Resultate:

Tabelle L

Zahl der α-Teilchen, die während des Intervalls beobachtet wurden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zahl der Intervalle experimentell	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	0	1	1
Zahl der Intervalle theoretisch	54	210	407	525	508	394	254	140	68	29	11	4	1	1	1

Die Ziffern der zweiten Zeile haben folgende Bedeutung: 57mal wurde während eines Intervalls $\left(\frac{1}{8}\text{ Minute}\right)$ kein einziges α-Teilchen registriert, 203mal ein Teilchen, 383mal zwei Teilchen usw. Die mittlere Teilchenzahl pro Intervall ist gleich 3,87. Die Zahlen der dritten Reihe wurden nach der statistischen Formel von Poisson berechnet. Auf unseren Fall angewendet sagt sie aus: Bei einer sehr großen Zahl von Beobachtungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während eines Intervalls gerade n α-Teilchen auftreten, gleich

$$\frac{x^n}{n!}e^{-x},$$

wo x die mittlere Teilchenzahl pro Intervall und n eine beliebige ganze, positive Zahl bedeuten. Durch Vergleich der zweiten und dritten Zeile überzeugt man sich von der befriedigenden Übereinstimmung zwischen der Theorie und den experimentellen Ergebnissen. Diese Übereinstimmung wird durch Abb. 350 veranschaulicht, wo die ausgezogene Kurve nach der Poisson-Formel berechnet ist, während die aus dem Experiment erhaltenen Intervallzahlen durch Kreise dargestellt sind. Es sind kleine Abweichungen vorhanden, die offensichtlich damit zusammenhängen, daß die Anzahl der Versuche für die Statistik nicht groß genug war.

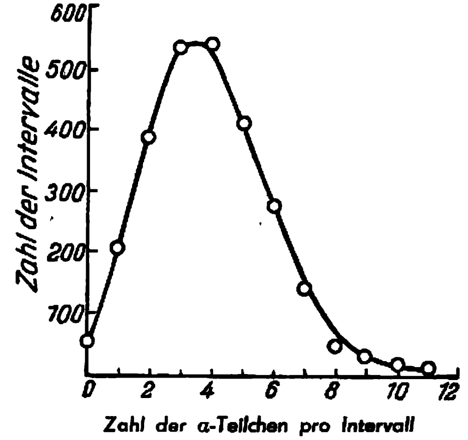


Abb. 350. Die Fluktuationen des radioaktiven Zerfalls

Die Fluktuationen des radioaktiven Zerfalls illustrieren in interessanter Weise ein in § 109 des ersten Teiles erwähntes statistisches Gesetz, nach dem die mittlere quadratische Schwankung

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n_k - \bar{n})^2}$$

gleich $\bar{n}$ ist. Die Auswertung der im beschriebenen Experiment erzielten Ergebnisse lieferte folgende Resultate:

Tabelle LI

Beobachtungs-serie	Zahl der gezählten Teilchen	$\bar{n}$	$\overline{\varepsilon^2}$
I	792	4,014	3,843
II	596	3,918	3,770
III	632	3,755	3,680
IV	588	3,760	3,448

Wie man sieht, stimmen die Ziffern der letzten beiden Spalten völlig befriedigend überein, insbesondere, wenn man die kleine Teilchenzahl in jeder Serie beachtet.

§ 274. Die Theorie der Zerfallsreihen

Bisher haben wir uns nur für das Elementargesetz der radioaktiven Umwandlungen, dem eine isolierte Substanz gehorcht, interessiert. Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, wenn eine ganze Zerfallsreihe vorhanden ist. Eine bestimmte Ausgangssubstanz A verwandelt sich in B, diese verwandelt sich in C usw.:

$$A \to B \to C \to D \to \ldots \tag{274,1}$$

Obwohl die Abnahme des Stoffes in jedem Glied dieser Kette, für sich betrachtet, exponentiell von der Zeit abhängt, ändert sich die Menge der Zwischensubstanzen im allgemeinen nach einem ziemlich komplizierten Gesetz.

Von den Stoffen der Reihe (274,1) mögen z. B. zur Zeit t $N_1, N_2, N_3, \ldots$ Atome vorhanden sein. Die Ausgangssubstanz A (Stammvater der Familie) habe zur Zeit $t = 0$ gerade $N_1(0)$ Atome. Für die Umwandlung $A \to B$ gilt die Gleichung

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1. \tag{274,2}$$

Durch Integration erhält man

$$N_1 = N_1(0)\, e^{-\lambda_1 t}. \tag{274,3}$$

Für die zweigliedrige Reihe

$$A \to B \to C$$

haben wir außer (274,2) die Gleichung

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \tag{274,4}$$

Sie drückt aus, daß die Atome B aus A mit der Geschwindigkeit $\lambda_1 N_1$ entstehen und sich ihrerseits mit der Geschwindigkeit $\lambda_2 N_2$ in C verwandeln. Mit (274,3) bringen wir die Gleichung (274,4) auf die Form

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1(0)\, e^{-\lambda_1 t}. \tag{274,5}$$

Wir suchen eine partielle Lösung dieser linearen inhomogenen Gleichung erster Ordnung in der Gestalt

$$N_2 = N_1(0)\,(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}). \tag{274,6}$$

Um die allgemeine Lösung zu erhalten, müssen wir hier noch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (274,5), d. h. $N_2(0)\, e^{-\lambda_2 t}$, hinzufügen. Die gesuchte allgemeine Lösung stellt sich dann folgendermaßen dar:

$$N_2(t) = N_2(0)\, e^{-\lambda_2 t} + N_1(0)\,(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}). \tag{274,7}$$

Wegen der selbstverständlichen Anfangsbedingung $N_2(0) = 0$ für $t = 0$ interessiert uns nur die partielle Lösung (274,6). Wir setzen sie in (274,5) ein und finden nach einfacher Rechnung

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

so daß man

$$N_2(t) = N_1(0)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}\right) \qquad (274{,}7')$$

erhält.

Mit der Anfangsbedingung: für $t = 0$ ist $N_2(0) = 0$ erhalten wir aus (274,7')

$$c_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

und schließlich

$$N_2(t) = \frac{N_1(0)\,\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \qquad (274{,}8)$$

Wenn die Kette aus drei Gliedern besteht

$$A \to B \to C \to D\,,$$

tritt noch eine Gleichung hinzu:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3\,.$$

Wir setzen für N_2 den Ausdruck (274,8) ein und bringen $\lambda_3 N_3$ auf die linke Seite. Es ergibt sich dann

$$\frac{dN_3}{dt} + \lambda_3 N_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_1(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \qquad (274{,}9)$$

Wir suchen nun die Lösung in der Form

$$N_3 = N_1(0)\left(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + c_3 e^{-\lambda_3 t}\right)$$

und bestimmen die Konstanten c_1, c_2, c_3 wie früher zu

$$c_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}\,, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)}\,, \quad c_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}\,.$$

Für eine n-gliedrige Kette wird die Abhängigkeit der Menge des n-ten Produkts von der Zeit durch die Formel

$$N_n(t) = N_1(0)\left(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{-\lambda_n t}\right),$$

mit

$$c_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\ldots(\lambda_n - \lambda_1)}\,,$$

$$c_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)\ldots(\lambda_n - \lambda_2)}$$

dargestellt.

Wir analysieren die erhaltenen Resultate für den einfachen Fall einer zweigliedrigen Kette: $A \to B \to C$. Die Substanz B entsteht aus A und zerfällt weiter. Dabei wird sie in die Substanz C verwandelt. Wir bezeichnen A als Mutter- und B als Tochtersubstanz und setzen

zunächst voraus, daß die Muttersubstanz schneller als die Tochtersubstanz zerfällt, d. h., daß $\lambda_1 > \lambda_2$ gilt. Die Anzahl der Tochteratome ist nach (274,8) zur Zeit t

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1(0)\,(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}). \tag{274,10}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist noch keine Tochtersubstanz vorhanden. Ihre Menge wächst allmählich auf Kosten des Zerfalls der Muttersubstanz, durchläuft dann ein Maximum und beginnt abzunehmen. Wegen $\lambda_1 > \lambda_2$ gilt für hinreichend großes t

$$e^{-\lambda_2 t} \gg e^{-\lambda_1 t}$$

und

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1(0)\,e^{-\lambda_2 t}, \tag{274,11}$$

d. h., die Aktivität des Gemisches aus Mutter- und Tochtersubstanz wird mit der Halbwertszeit der Tochtersubstanz abnehmen.

Wir setzen jetzt $\lambda_2 > \lambda_1$ voraus. Dann erhalten wir

$$N_2 = \frac{N_1(0)\,\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

und, nach einem genügend langen Zeitabschnitt, wenn $e^{-\lambda_1 t} \gg e^{-\lambda_2 t}$ gilt,

$$N_2 = \frac{N_1(0)\,\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}, \tag{274,12}$$

d. h., die Aktivität der Tochtersubstanz nimmt mit der Halbwertszeit der Muttersubstanz ab.

Wir erhalten ferner aus (274,12) unter Beachtung von $N_1 = N_1(0)\,e^{-\lambda_1 t}$, daß

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \text{const}.$$

Die beiden Substanzen bilden also ein konstantes Verhältnis, ihre Mengen nehmen jedoch mit gleicher Geschwindigkeit ab.

Einen solchen Zustand bezeichnet man als *Übergangsgleichgewicht.* Als Beispiel kann das Gleichgewicht zwischen dem Radon und seinen Zerfallsprodukten dienen. Die radioaktiven Konstanten des Radons und des Radiums A sind gleich $2{,}09 \cdot 10^{-6}$ bzw. $3{,}79 \cdot 10^{-3}\,\text{sec}^{-1}$. Fünf Stunden ($1{,}8 \cdot 10^3$ sec) nach der Abtrennung des Radons vom Radium wird $e^{-\lambda t}$ für das Produkt des Radons RaA gleich $1{,}2 \cdot 10^{-3}$, während sich $e^{-\lambda t}$ zu dieser Zeit für das Radon selbst noch wenig von 1 unterscheidet ($\sim 0{,}99$). Deshalb zerfällt das Gemisch aus Radon und dessen unmittelbaren Produkten bereits nach fünf Stunden mit der Halbwertszeit des Radons, und ihr Mengenverhältnis ist gleich

$$\frac{\text{RaA}}{\text{Rn}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Ein wenig anders als hier liegen die Dinge, wenn die Halbwertszeit des Ausgangsstoffes die Halbwertszeiten der übrigen Kettenglieder nicht nur um ein Vielfaches übersteigt, sondern

auch absolut sehr groß ist. Die Zerfallskonstante ist also sehr klein:

$$\lambda_2 \gg \lambda_1 .$$

Wir schreiben (274,8) in die Form

$$N_2(t) = \frac{N_1(0)\,\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} - 1\right]$$

um. Wegen $\lambda_2 \gg \lambda_1$ erhalten wir

$$N_2(t) = \frac{N_1(0)\,\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}(e^{\lambda_2 t} - 1) = \frac{N_1(0)\,\lambda_1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t}). \qquad (274,13)$$

Für genügend große t gilt

$$e^{-\lambda_2 t} \ll 1 .$$

Mit dieser Bedingung erhalten wir aus (274,13)

$$\frac{N_2(t)}{N_1(0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1} .$$

Als Beispiel kann das Gleichgewicht zwischen Radium und Radon dienen. Hier ist

$$\lambda_1 = 1{,}38 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{sec}^{-1}\,(T = 1590\ \mathrm{Jahre}),$$

$$\lambda_2 = 2{,}097 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1}\,(T = 3{,}82\ \mathrm{Tage}).$$

Nach zwei Monaten stellt sich zwischen dem Radon und dem Radium das Gleichgewicht ein. Die Radiummenge, die während dieser Zeit zerfällt, beträgt nur $7 \cdot 10^{-5}$ der ursprünglich vorhandenen Menge. Man kann deshalb das Radium als konstante Radonquelle ansehen, die sich praktisch nicht mit der Zeit ändert. In diesem Falle bezeichnet man das Gleichgewicht als *dauernd.*

In den Abb. 351, 352 und 353 ist die Änderung der Aktivität mit der Zeit für die drei betrachteten Fälle dargestellt. Auf der Abszissenachse ist überall die Zeit und auf der Ordinatenachse die Aktivität im logarithmischen Maßstab ($\sim \ln N$) aufgetragen. Die gestrichelten Geraden stellen den Aktivitätsabfall der isolierten Substanzen (der Mutter- und Tochtersubstanz) dar; die übrigen Bezeichnungen sind im Text unter den Zeichnungen erklärt. Es empfiehlt sich, diese Zeichnungen aufmerksam zu betrachten, sie sind für das Verständnis des radioaktiven Gleichgewichts wichtig.

Der „Stammvater" einer radioaktiven Familie besitzt gewöhnlich eine sehr große Halbwertszeit. Das ist unbedingt notwendig, damit ein bestimmtes Element in merklichen Mengen über geologische Epochen hinweg erhalten bleibt. Selbst wenn die Halbwertszeit dieser Ausgangssubstanz gleich einer Million Jahre wäre, hätte sich ihre Menge während der geologischen Geschichte der Erde ($\sim 10^9$ Jahre) um $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} = 10^{-300}$ verringert. Nur weil die Halbwertszeiten des Urans und Thoriums $4{,}5 \cdot 10^9$ bzw. $1{,}65 \cdot 10^{10}$ Jahre betragen, blieben diese Substanzen bis in unsere Tage in großen Mengen erhalten. Aus dem gleichen Grunde existieren noch die radioaktiven Isotope des Kaliums, Rubidiums und Samariums in der Natur. Ihre Perioden betragen $1{,}4 \cdot 10^9$ Jahre für ${}_{19}K^{40}$, $6{,}3 \cdot 10^{10}$ Jahre für ${}_{37}Rb^{87}$ und $1{,}2 \cdot 10^{12}$ Jahre für ${}_{62}Sm^{152}$. Stoffe mit kleineren Halbwertszeiten werden nur dann

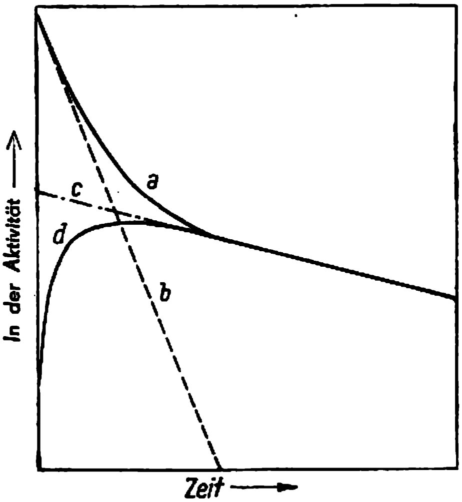


Abb. 351. Der Fall $\lambda_1 > \lambda_2$.
a — Gesamtaktivität; *b* — Aktivität der Muttersubstanz; *c* — Aktivität der isolierten Tochtersubstanz, die für genügend große *t* gleich der Gesamtaktivität ist; *d* — Aktivität der Tochtersubstanz, die in der Muttersubstanz entsteht

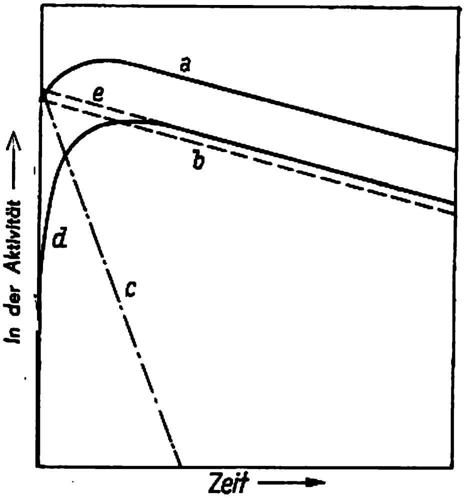


Abb. 352. Übergangsgleichgewicht für $\lambda_2 > \lambda_1$.
a — Gesamtaktivität; *b* und *c* — die Aktivitäten der isolierten Stoffe (Mutter- und Tochtersubstanz); *d* — Aktivität der Tochtersubstanz im Gemisch mit der Muttersubstanz; *e* — Grenzaktivität der Tochtersubstanz im Übergangsgleichgewicht mit der mütterlichen Substanz (extrapoliert)

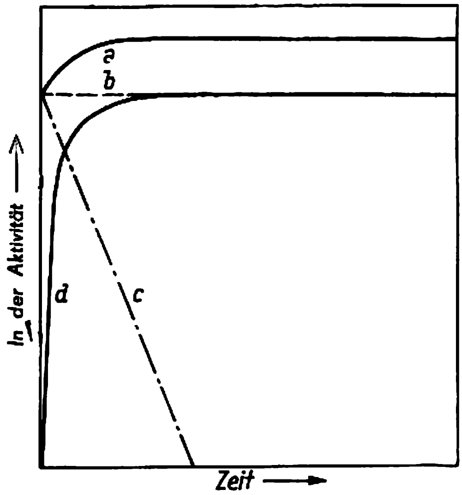


Abb. 353. Dauergleichgewicht für $\lambda_2 \gg \lambda_1$ ($\lambda_1 \ll 1$).
a — Gesamtaktivität der Mutter- im Gemisch mit der Tochtersubstanz; *b* und *c* — Aktivitäten der isolierten Substanzen (der Mutter- und Tochtersubstanz); *d* — Gesamtaktivität der Tochter- im Gemisch mit der Muttersubstanz

vor dem Verschwinden bewahrt, wenn sie ununterbrochen aus den vorherigen Gliedern der radioaktiven Familie neu entstehen. Dabei stellt sich im Verlaufe geologischer Zeiträume zwischen allen Gliedern der Familie ein Dauergleichgewicht ein, bei dem die Mengen aller radioaktiven Substanzen ihren Halbwertszeiten proportional sind. Mit 1 g Uran befinden sich z. B. $3{,}4 \cdot 10^{-7}$ g Ra und $2{,}2 \cdot 10^{-12}$ g Rn in Übereinstimmung mit dem Verhältnis der Halbwertszeiten (in Sekunden)

$$1{,}4 \cdot 10^{17} : 4{,}99 \cdot 10^{10} : 3{,}305 \cdot 10^{5}$$

im Gleichgewicht.

§ 275. Die Einheit der Radioaktivität

Zur Messung der Menge radioaktiver Substanzen wurde am Anfang der Forschungen über die Radioaktivität (vor der Entdeckung der künstlichen Radioaktivität) zu Ehren der Entdecker des Radiums, Marie und Pierre Curie, eine als „*Curie*" bezeichnete Einheit festgesetzt. Diese Einheit ist folgendermaßen definiert: „1 Curie Radon ist der Radonmenge gleich, die sich mit 1 g Radium im Gleichgewicht befindet". Diese Radonmenge hat bei 0° C und 760 mm Hg ein Volumen von 0,66 mm³ und eine Masse von $6{,}51 \cdot 10^{-6}$ g.

Genaue Messungen mit Hilfe von Zählrohren zeigten, daß 1 g Radium in 1 sec gerade $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-Teilchen aussendet. Das bedeutet, daß in 1 sec die gleiche Menge, d. h. $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Radiumatome, zerfällt.

Da ein *Curie* eine große Einheit ist, verwendet man oft abgeleitete Einheiten: 1 *Millicurie* (1 mc $= 10^{-3}$ *Curie*) und 1 *Mikrocurie* (1 μc $= 10^{-6}$ *Curie*). Der Radongehalt von Quellwässern wird sogar in *Millimikrocurie* (10^{-9} *Curie*) gemessen. Das internationale Standard, das im Internationalen Bureau für Maß und Gewicht in Sévres bei Paris aufbewahrt wird, besteht aus Radon im Gleichgewicht mit 21,99 mg Radiumchlorid. Entsprechende Vergleichsstandarde gibt es in allen Ländern.

Aus der angeführten Definition ist ersichtlich, daß das *Curie* eine Einheit ist, die zur Abschätzung von Radonmengen bestimmt ist. Im Jahre 1930 empfahl jedoch die Internationale Kommission für Radiumstandards, diese Einheit auch auf die anderen Glieder der Radiumfamilie, die α-Teilchen aussenden, anzuwenden. Unter einem *Curie* ist dann diejenige Menge einer radioaktiven Substanz zu verstehen, die in 1 sec ebensoviel α-Teilchen wie 1 g Ra aussendet, d. h. $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-Teilchen pro Sekunde.

Nach der Entdeckung der künstlich-radioaktiven Substanzen hat man eine zeitlang die Einheit „*Curie*" und die von ihr abgeleiteten Einheiten auch auf diese angewandt, da man keine andere Einheit hatte. Das war jedoch mit Schwierigkeiten verbunden, insbesondere, weil die Mehrzahl der künstlich-radioaktiven Kerne β-Strahler sind und einige weder α- noch β-Teilchen aussenden (K-Einfang). Deshalb hat man jetzt eine andere Einheit der Radioaktivität festgesetzt: das *Rutherford* (rd). Diese Einheit ist folgendermaßen definiert:

$$1 \text{ rd} = 1{,}00 \cdot 10^{6} \text{ Zerfälle pro sec};$$

deshalb gilt

$$1 \text{ rd} = \frac{1}{37} \text{ mc} = 27\ \mu\text{c Ra, Rn, Po usw.},$$

$$1 \text{ mc} = 37 \text{ rd}.$$

Im Bedarfsfalle kann man abgeleitete Einheiten benutzen: *Rutherford* mit den Vorsilben „*Mega*" (1 Mrd $= 10^{6}$ rd), „*Kilo*" (krd $= 10^{3}$ rd), „*Milli*" (1 mrd $= 10^{-3}$ rd), „*Mikro*"

(1 μrd = 10^{-6} rd). Der Vorteil dieser Einheit besteht jedoch insbesondere darin, daß für die meisten Laboratoriumsarbeiten mit radioaktiven Isotopen keine abgeleiteten Einheiten notwendig sind. Einige Beispiele mögen diese Behauptung erläutern: Die therapeutische Dosis des Phosphorisotops $_{15}P^{32}$ ist von der Größenordnung 100 rd; die üblichen Dosen von radioaktiven Indikatoren, wie sie in Chemie und Biologie angewandt werden, liegen zwischen 0,1 und 10 rd; die schwächsten Quellen, die man noch mit GEIGER-MÜLLER-Zählern messen kann, sind von der Größenordnung 1 μrd.

Es empfiehlt sich, die Einheit „*Curie*" entsprechend ihrer Definition, d. h. für Radium, Radon, Polonium und andere Glieder der Radiumfamilie, anzuwenden.

§ 276. Der Erwärmungseffekt

PIERRE CURIE und A. LABORDE zeigten 1903 als erste, daß die radioaktive Substanz eine höhere Temperatur als die umgebende Luft hat. Der Versuch wurde auf außerordentlich einfache Art durchgeführt. In einem kleinen Dewargefäß wurden ein Radiumpräparat und ein Thermometer untergebracht. Daneben stand ein genau gleiches Dewargefäß, in dem sich statt Radium Barium befand (Abb. 354). Das Thermometer im Dewargefäß mit dem Radium zeigte eine höhere Temperatur.

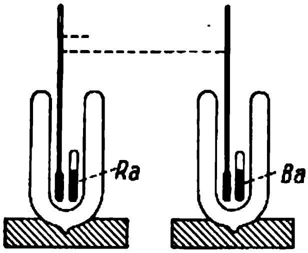


Abb. 354. Versuch von CURIE und LABORDE zur Beobachtung des Erwärmungseffekts beim Radium

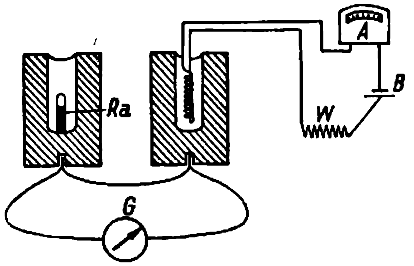


Abb. 355. Schema der Differentialmethode zur Bestimmung der Energie, die von radioaktiven Substanzen abgegeben wird

Zur quantitativen Bestimmung der von den radioaktiven Substanzen entwickelten Wärme wurde eine Reihe von Spezialkalorimetern entwickelt. Eine typische Versuchsanordnung ist in Abb. 355 dargestellt. In einem der dickwandigen Kupferblocks (Abb. 355 links) befindet sich das radioaktive Präparat und im anderen eine durch Strom geheizte Spirale. Beide Blöcke sind in einer wärmeisolierenden Hülle angeordnet, und mit jedem ist ein Thermoelement verbunden. Die beiden Thermoelemente sind so geschaltet, daß bei gleicher Temperatur der Blöcke kein Strom durch das Galvanometer *G* fließt. Erwärmt sich das linke Thermoelement unter dem Einfluß der vom radioaktiven Präparat entwickelten Wärme, so fließt durch das Galvanometer ein Strom. Wenn man jetzt aus dem Element *B* Strom durch die Spirale im rechten Block schickt, kann man den Galvanometerstrom infolge der Erwärmung des rechten Thermoelements zum Verschwinden bringen. Da die Stromstärke im Kreis *ABW*, der Widerstand der Spirale und die Zeit bekannt sind, kann man leicht die Wärmemenge berechnen, die vom radioaktiven Präparat abgegeben wird.

Die ersten Versuche lieferten für die von einem Gramm reinen Radiums abgegebene Wärme 100 cal/Stunde. Die darauffolgenden genaueren Versuche ergaben höhere Werte: 1 g

des Elements Radium im Gleichgewicht mit seinen ersten Zerfallsprodukten (bis zum Radium C′ einschließlich) entwickelt bei vollständiger Absorption der α- und β-Strahlen und etwa 18%iger Absorption der γ-Strahlen 132,3 cal/Stunde = 0,1539 W. Es wurde auch die Wärmemenge gemessen, die vom Radium selbst ohne das Radon und seine Zerfallsprodukte abgegeben wird. Diese Wärmemenge beträgt 25,5 cal/Stunde, während die von Rn + + RaA + RaB + Ra (C + C′) entwickelte Wärme 107,1 cal/Stunde ausmacht. Bei Berücksichtigung der Gesamtenergie der γ-Strahlen ist die oben genannte Zahl von 132,3 cal/Stunde auf 137,9 cal/Stunde zu erhöhen.

Die von der radioaktiven Substanz entwickelte Energie wird durch die Strahlung übertragen. Es ist lehrreich und einfach, die auf den Anteil der α-Teilchen kommende Energie zu berechnen. Wenn die Geschwindigkeit der α-Teilchen gleich v und die Zahl der von der Substanz in 1 sec ausgesandten Teilchen N ist, dann beträgt ihre Energie $N\frac{mv^2}{2}$. Dazu müssen wir noch die Rückstoßenergie addieren. Bei der Emission eines α-Teilchens erfährt das Atom mit der Masse M einen Rückstoß und erhält dadurch die Geschwindigkeit V. Nach dem Impulssatz ist $V = \frac{m}{M}v$, und wir erhalten als kinetische Energie des Rückstoßatoms $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v^2 = \frac{m}{M}\cdot\frac{1}{2}mv^2$. Die bei dem α-Prozeß freiwerdende Gesamtenergie ist deshalb

$$N\frac{mv^2}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right),$$

und die in 1 Stunde entwickelte Wärme

$$Q = N\frac{mv^2}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{3600}{J},$$

wobei J das mechanische Wärmeäquivalent

$$J = 4{,}18\cdot 10^7 \text{ erg/cal}$$

bedeutet. Für Radium ist $v = 1{,}5\cdot 10^9$ cm/sec;

$$\frac{1}{2}mv^2 = 7{,}53\cdot 10^{-6} \text{ erg}; \quad \frac{m}{M} = \frac{4}{226}; \quad N = 3{,}7\cdot 10^{10};$$

also

$$Q = 3{,}7\cdot 10^{10}\cdot 7{,}53\cdot 10^{-6}\left(1+\frac{4}{226}\right)\cdot\frac{3600}{4{,}18\cdot 10^7} = 24{,}5 \text{ cal}.$$

Auf diese Weise erhält man die Energiebilanz für das Radium und seine nächsten Zerfallsprodukte, die in Tabelle LII auf S. 428 angeführt sind.

Interessant sind auch die folgenden ungefähren Zahlen für die Gesamtenergie, die von radioaktiven Substanzen während ihrer gesamten Lebensdauer $\left(\text{als Lebensdauer nimmt man nicht die Halbwertszeit, sondern die mittlere Lebensdauer } \tau = \frac{1}{\lambda}\right)$ entwickelt wurde.

1 g Radium ohne Zerfallsprodukte erzeugt in einer Stunde ungefähr 25 cal. Da seine mittlere Lebensdauer $\tau = 2280$ *Jahre* beträgt, ist die von 1 g Radium entwickelte Gesamtwärmemenge gleich

$$25 \cdot 8760 \cdot 2280 = 5{,}0 \cdot 10^8 \text{ cal}.$$

1 g Radium mit den ersten Zerfallsprodukten (bis RaC′ einschließlich) setzt in einer Stunde $\sim$ 140 cal frei; während der ganzen Lebensdauer –

$$140 \cdot 8760 \cdot 2280 = 2{,}8 \cdot 10^9 \text{ cal}.$$

1 g Radium mit den Zerfallsprodukten bis zum RaF einschließlich entwickelt in einer Stunde $\sim$ 170 cal; während der ganzen Lebensdauer –

$$170 \cdot 8760 \cdot 2280 = 3{,}4 \cdot 10^9 \text{ cal}.$$

1 *Curie* Radon ($6{,}5 \cdot 10^{-6}$ g) + RaA + RaC $\approx$ 115 cal; mittlere Lebensdauer $\tau = 133$ *Stunden*, daraus ergibt sich die Gesamtwärmemenge

$$115 \cdot 133 = 15\,300 \text{ cal}.$$

Tabelle LII

Substanz	Wärmemenge in cal/Stunde			
	α-Strahlen	β-Strahlen	γ-Strahlen	Summe
Radium	24,5		0,96	$\sim$ 25,5
Radon	27,9			27,9
Radium A	30,6			30,6
Radium B		1,3	0,86	$\sim$ 2,2
Radium C + C′	39,7	4,3	7,7	51,7
Summe	122,7	5,6	9,5	137,9

§ 277. Radioaktive Familien

Die natürlich-radioaktiven Substanzen sind in radioaktiven Familien zusammengefaßt. Bis vor kurzem waren drei solcher Familien bekannt. Unlängst wurde die Existenz einer vierten Familie festgestellt. Die Stammväter der ersten drei radioaktiven Familien sind langlebige Elemente: Uran, Thorium und Aktinium. Die nachfolgenden Familienmitglieder entstehen aus den vorangehenden entweder durch α- oder durch β-Umwandlung. Da das α-Teilchen ein Heliumkern mit der Ladung $+2e$ und der Massenzahl 4, das β-Teilchen aber ein Elektron ist, verringert sich die Ladung im ersten Fall um zwei und die Massenzahl um vier Einheiten, im zweiten Fall ändert sich aber die Massenzahl nicht, und die Kernladung steigt um eine Einheit. Diese einfache Regel heißt *Verschiebungssatz*. Sie erlaubt, die radioaktiven Substanzen im Periodischen System einzuordnen, indem man von der Lage des Stammvaters der Familie ausgeht.

Der Stammvater der Uranfamilie, zu der auch das Radium gehört, ist das Uranisotop $_{92}U^{238}$. Seine Halbwertszeit ist gleich $4{,}5 \cdot 10^9$ *Jahren*. Die Kette der aus U^{238} entstehenden Zerfallsprodukte ist in Abb. 356 der Einfachheit halber im Protonen-Neutronen-Schema

dargestellt. Auf der Abszissenachse sind die Atomnummern Z, d. h. die Anzahl der Protonen im Kern, und auf der Ordinatenachse $A - Z$, d. h. die Neutronenzahl, aufgetragen. Nach einer α- und zwei β-Umwandlungen entsteht aus U^{238} das Isotop U^{234}, oder, nach der alten Bezeichnungsweise, U II mit der Halbwertszeit $2{,}7 \cdot 10^5$ *Jahre*. Diese Substanz geht durch zwei α-Umwandlungen in Radium über. Die ersten Zerfallsprodukte der auf das Radium folgenden Substanz Radon (RaA, RaB, RaC) sind durch kurze Halbwertszeiten ausgezeichnet. Danach jedoch kommt eine Gruppe von Stoffen, die sich langsam umwandeln. Unter ihnen ist das RaF oder Polonium mit einer Halbwertszeit von 140 Tagen bemerkenswert. Es war das erste radioaktive Element, das von Marie Curie aus dem Uranerz gewonnen wurde. Das stabile Endisotop der Uranreihe ist das RaG, ein Bleiisotop mit der Massenzahl 206.

Die Thoriumfamilie (Abb. 356) beginnt mit dem Thorium ${}_{90}Th^{232}$ (Halbwertszeit $1{,}39 \cdot 10^{10}$ *Jahre*) und endet nach einer Reihe von Umwandlungen, die denen der Uranreihe analog sind, auch mit einem Bleiisotop ThD mit der Massenzahl 208.

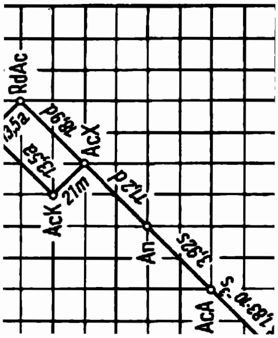
Die Aktiniumreihe erhielt ihren Namen vom Element Aktinium ${}_{89}Ac^{227}$. Heute jedoch weiß man, daß der Stammvater dieser Reihe das Uranisotop U^{235} ist; es wird auch Aktino-Uran (AcU) genannt. Seine Halbwertszeit beträgt $8{,}52 \cdot 10^8$ *Jahre*, es ist zu 0,7% im natürlichen Uran enthalten. Dieses Isotop gewann in den letzten Jahren in Zusammenhang mit der Ausnutzung der Kernenergie große Bedeutung (siehe Kapitel XXIII). Aus AcU bildet sich Uran Y, das mit der kurzen Halbwertszeit von 24,6 *Stunden* zerfällt und sich in Protaktinium verwandelt. Protaktinium ist ein radioaktives Element mit der ziemlich großen Halbwertszeit 32000 *Jahre* und nimmt den 91. Platz im Periodischen System ein; es hat die Massenzahl 231. Man findet es in der Natur in den Uranmineralien, und es macht schätzungsweise etwa 40% des in diesen Mineralien auch vorhandenen Radiums aus. Die abgeschiedene Menge dieses Stoffes wird aber in *Milligramm* gemessen. Durch α-Zerfall des Protaktiniums entsteht unmittelbar das Aktinium.

Das Aktinium, das einem β-Zerfall mit der Halbwertszeit 13,5 *Jahre* unterliegt, wandelt sich in Radioaktinium (RdAc) um. Im Jahre 1939 wurde von der französischen Forscherin M. Perey bewiesen, daß neben dieser β-Umwandlung ein Teil der Aktiniumatome eine α-Umwandlung, die zum Element Aktinium K führt, erfährt. Die Umwandlung des Aktiniums bildet also eine „Verzweigung". Sie ist den schon vorher bekanntgewesenen „Verzweigungen" des RaC, ThC und AcC ähnlich (Abb. 356):

$$ {}_{89}Ac^{227} \begin{array}{c} \overset{\alpha}{\nearrow}\ {}_{87}AcK^{223}\ \overset{\beta}{\searrow} \\ \underset{\beta}{\searrow}\ {}_{90}RdAc^{227}\ \underset{\alpha}{\nearrow} \end{array} {}_{88}AcX^{223} . $$

Das Aktinium K war das schon lange gesuchte Element mit der Nummer 87, für das ein besonderer Name vorgeschlagen wurde: Francium (Fr). Das Endprodukt der Aktiniumreihe ist das stabile Aktinoblei AcD mit der Massenzahl 207.

Die beschriebenen drei großen radioaktiven Familien zeichnen sich dadurch aus, daß die Massenzahlen ihrer Glieder den Formeln $4n$ für die Thoriumfamilie [Th^{232} $(232 = 4 \cdot 58)$], $4n + 2$ für Uran [U^{238} $(238 = 4 \cdot 59 + 2)$] und $4n + 3$ für Aktinium [Ac^{231} $(231 = 57 \cdot 4 + 3)$] oder [U^{235} $(235 = 4 \cdot 58 + 3)$] gehorchen. Da die Änderung der Massenzahlen in allen drei Reihen nur durch die Abspaltung eines α-Teilchens zustande kommt, genügen die Massenzahlen aller Glieder einer Reihe derselben Formel. Es fällt auf, daß die Familie mit der Formel $4n + 1$ für die Massenzahlen fehlt. Die Existenz dieser Familie wurde 1935 von Irene Curie-Joliot, Halban und Preiswerk festgestellt. Vollständige Angaben über die


RdAc
AcX
AcK
An
AcA
18,9d
13,5a
21m
11,2d
3,92s

Isotope, die die Glieder dieser vierten radioaktiven Familie bilden, wurden erst 1947 veröffentlicht.

Die Ausgangssubstanz dieser Familie ist das neue Uranisotop U^{233}, das in den Jahren 1941/42 entdeckt und untersucht wurde. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von $1{,}63 \cdot 10^5$ Jahren und geht durch α-Umwandlung in das Thoriumisotop Th^{229} über. Der weitere Verlauf des Zerfalls ist aus Abb. 356a ersichtlich. Die Reihe wird durch das stabile Wismutisotop Bi^{209} abgeschlossen. Unter den Zwischenprodukten gibt es Isotope der neu entdeckten Elemente Francium (Fr^{221}) und Astatine (At^{217}).

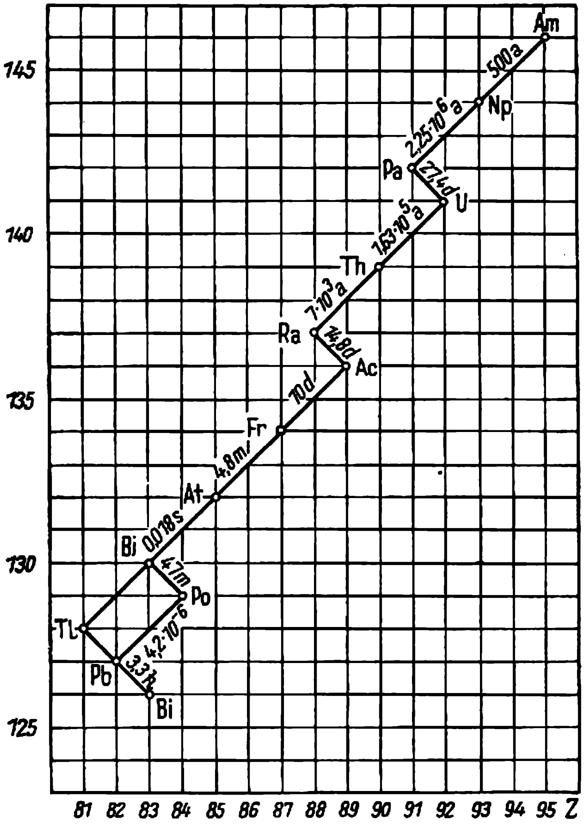


Abb. 356a. Das Protonen-Neutronen-Schema der vierten radioaktiven Familie

Das Uranisotop U^{233}, das die Reihe eröffnet, hat Vorgänger. Man kann wohl als gesichert ansehen, daß die Familie $4n + 1$ mit dem Transuran Plutonium (siehe § 310), und zwar seinem Isotop ${}_{94}Pu^{241}$, anfängt. Der weitere Zerfall erfolgt nach dem Schema

$$ {}_{94}Pu^{241} \xrightarrow[(?)]{\beta} {}_{95}Am^{241} \xrightarrow[5 \cdot 10^2 \text{ Jahre}]{\alpha} {}_{93}Np^{237} \xrightarrow[2{,}25 \cdot 10^6 \text{ Jahre}]{\alpha} $$

$$ \rightarrow {}_{91}Pa^{233} \xrightarrow[27{,}4 \text{ Tage}]{\beta} {}_{92}U^{233} \rightarrow \ldots $$

Isotop des Transurans Neptunium $_{93}Np^{237}$ die längste Halbwertszeit
nnenden und mit Bi^{209} endenden Reihe besitzt, ist es üblich geworden
+ 1 als Neptuniumreihe zu bezeichnen.

B. Die Wechselwirkung radioaktiver Strahlung mit Substanzen

§ 278. Die Reichweite von α-Teilchen

en, d. h. Heliumkerne, die eine große Energie besitzen, entstehen bei vi
mwandlungen und auch bei bestimmten Kernreaktionen (siehe vorigen /
t sie schließlich auch durch Beschleunigung von Heliumionen im Zykl
. Die Anfangsgeschwindigkeit, mit der die α-Teilchen von schweren ra
rausgeschleudert werden, liegt bei 1 — $2 \cdot 10^9$ cm/sec; die Energie beträgt
n, die man mit dem Phasotron gewinnt, haben eine maximale Energie voı

ırtig hoher Energie erzeugen die α-Teilchen auf ihrem Wege in Gaseı
große Zahl von Ionenpaaren. Die mittlere Energie, die vom α-Teilch
ines Ionenpaares (genauer eines positiven Ions und eines Elektrons) in
ist, beträgt 32,5 eV. Die gesamte Ionenzahl, die ein α-Teilchen von ei
t erzeugt, bevor es seine kinetische Energie aufgebraucht hat und zu
n Heliumatom wird, ist von der Größenordnung 10^5.

Energie des α-Teilchens sehr groß und der Energieverlust bei einem einz
ır klein ist, verlaufen die Bahnen der α-Teilchen im Gase geradlinig. D
hnen sind auf WILSON-Kammer-Aufnahmen gut zu sehen (Abb. 357).

Bei konstanter Anfangsenergie der α-Teilchen hat ihre Reichweite im gegebenen Medium eine bestimmte Größe, obwohl auch kleine Schwankungen zu beobachten sind. Wenn man die α-Teilchen in verschiedenen Entfernungen von der Quelle zählt, erhält man einen Verlauf, wie ihn Kurve a in Abb. 358 darstellt. Diese Kurve zeigt, daß die Anzahl der α-Teilchen trotz ihres Energieverlusts beim Durchgang durch die Substanz fast auf ihrem ganzen Wege gleich bleibt. Wenn jedoch alle α-Teilchen eine genau gleiche Reichweite hätten, müßte die Kurve in der Entfernung, die gleich der Reichweite ist, scharf auf Null abfallen. In Wirklichkeit fällt aber die Anzahl der α-Teilchen am Ende der Reichweite allmählich ab. Diese Tatsache weist auf die Existenz der erwähnten Schwankungen in bezug auf die Länge der Reichweiten hin. Wenn man die Kurve a graphisch differenziert, erhält man die Kurve 358 b, die die Reichweitenverteilung der α-Teilchen darstellt (man vergleiche das mit dem analogen Verfahren, das beim Übergang von der Strom-Spannungs-Charakteristik zur Kurve für die Energieverteilung der Elektronen angewandt wurde, Teil I, § 86). Das Maximum dieser Kurve entspricht der als mittlere Reichweite des α-Teilchens bezeichneten Länge $\bar{R}$. Die durch Fortsetzen des fast geradlinigen Teils am Ende der Kurve a bis zum Schnitt mit der Abszissenachse erhaltene Länge heißt extrapolierte Reichweite R_{extr}. Der Schnittpunkt der Kurve a mit der Abszissenachse bestimmt die maximale Reichweite R_{max}.

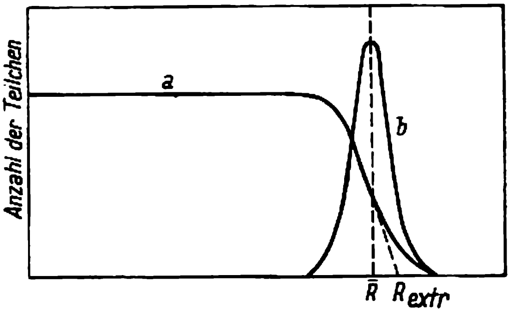


Abb. 358. Abhängigkeit der α-Teilchenzahl von der Dicke der absorbierenden Gasschicht

Die Reichweitenverteilung der α-Teilchen, die mit genau bestimmter Energie ausgeschleudert werden, wird durch die statistisch schwankende Stoßzahl der α-Teilchen mit den Gasmolekülen erklärt. Da das α-Teilchen bei jedem Stoß Energie zur Ionisation des Gasmoleküls (oder -atoms) abgibt und die Anzahl der entgegenkommenden Moleküle schwankt, unterliegt auch die Länge, auf der die ganze kinetische Energie des α-Teilchens verbraucht wird, kleinen Schwankungen. Es sei z. B. die mittlere Zahl der Ionen, die von einem α-Teilchen auf seiner Weglänge gebildet werden, gleich n. Dann ist auch die mittlere quadratische Schwankung dieser Zahl nach dem mehrfach erwähnten statistischen Gesetz (siehe Teil I, Anhang IV) ebenfalls gleich n, und die Zahl der entstandenen Ionen schwankt zwischen den Grenzen $\pm \sqrt{n}$. Wenn die mittlere Zahl der Ionen, die von einem α-Teilchen auf 1 mm Weglänge in Luft erzeugt werden, gleich 3000 ist, dann beträgt die zu erwartende Schwankung dieser Zahl also $\sqrt{3000} \approx 55$, und da zur Bildung jedes Ionenpaares im Mittel 32,5 eV erforderlich sind, muß der Energieverlust für eine mittlere Reichweite der Größenordnung nach um $32{,}5 \cdot 55 \approx 1800$ eV schwanken. Diese Tatsache führt zu einer Streuung der Reichweiten. Diese Erscheinung wird Längenschwankung genannt. Ihr statistischer Charakter wird durch die Kurve in Abb. 359 veranschaulicht. Hier sind auf der Abszissenachse die Reichweiten der

α-Teilchen in Zentimetern und auf der Ordinatenachse die Anzahl der Teilchen mit der gegebenen Reichweite aufgetragen. Die ausgezogene Kurve ist nach der bekannten GAUSSschen Formel für zufällige Fehler berechnet; die beobachteten Werte sind durch Kreise angedeutet. Wie man sieht, schmiegen sich alle Kreise gut an die ausgezogene Kurve an.

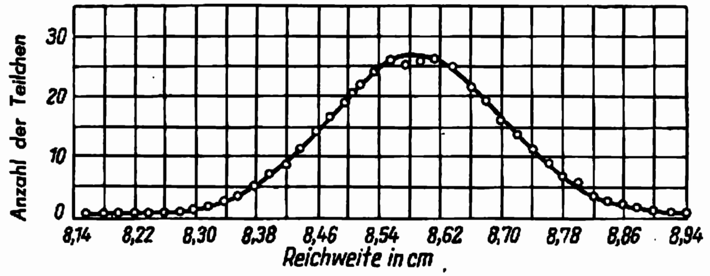


Abb. 359. Der statistische Charakter der Längenstreuung von α-Teilchen in Stickstoff

In allen früheren Rechnungen interessierte uns die mittlere Ionisation, die von einem α-Teilchen auf seinem Wege hervorgerufen wird. Wenn man aber die Anzahl der Ionenpaare untersucht, die durch ein Teilchen auf 1 mm Weglänge (spezifische Ionisation) in verschiedenen Teilen seiner Bahn gebildet werden, dann stellt sich heraus, daß diese spezifische Ionisation am Anfang der Bahn annähernd konstant bleibt und langsam wächst. Am Ende der Bahn wächst sie aber auf mehr als das Doppelte. Man erhält die typische Kurve der spezifischen Ionisation, wie sie in Abb. 360 dargestellt ist (sogenannte BRAGG-Kurve).

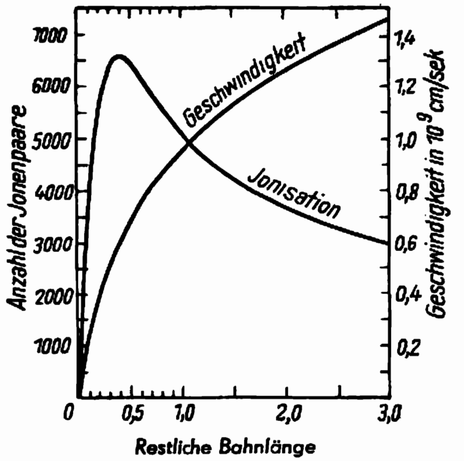


Abb. 360. Spezifische Ionisation und Geschwindigkeit der α-Teilchen in Luft bei 15° C und 1 Atmosphäre als Funktionen der restlichen Bahnlänge (in mm)

In diesem Bild ist auf der Abszissenachse die restliche Bahnlänge aufgetragen, d. h. die Differenz zwischen der extrapolierten Reichweite und der Entfernung von der Quelle. Man sieht, daß die Kurve der spezifischen Ionisation in etwa 3 mm Entfernung vom

Ende der Bahn ein Maximum erreicht. Die Geschwindigkeit der α-Teilchen ist dort $\sim 5 \cdot 10^8$ cm/sec und die Energie ~ 500 keV.

In Abb. 361 ist durch drei Kurven die Abhängigkeit der mittleren Reichweite in Luft unter Normalbedingungen von der Anfangsenergie der α-Teilchen dargestellt. Derartige Kurven kann man zur Bestimmung der Anfangsenergie von α-Teilchen aus ihrer mittleren Reichweite in Luft heranziehen. Die Gegenüberstellung der Reichweiten der α-Teilchen mit ihrer Anfangsgeschwindigkeit führt zu folgender empirischer Gesetzmäßigkeit: Die Reichweite ist der dritten Potenz der Anfangsgeschwindigkeit annähernd proportional, $R \approx kv^3$. Es ist interessant, zu bemerken, daß sich die mittlere Reichweite für andere Korpuskularstrahlen (Protonen, Deuteronen) bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit nach der einfachen Formel $\frac{A}{Z^2}\bar{R}$ ergibt. Dabei ist A die Massenzahl der Teilchen, Z ihre Ladung und $\bar{R}$ die mittlere Reichweite der α-Teilchen. Die Reichweite von Protonen ($A = 1, Z = 1$), ist gleich der Reichweite der α-Teilchen, und die Reichweite von Deuteronen ($A = 2$, $Z = 1$) ist doppelt so groß.

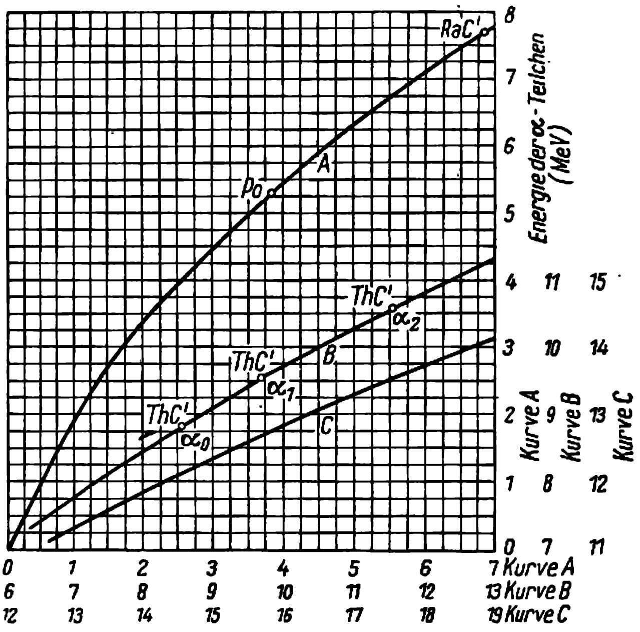


Abb. 361. Abhängigkeit der Reichweite von der Anfangsenergie der α-Teilchen

Die Reichweite in anderen Medien findet man mit Hilfe der empirischen Näherungsformel von Bragg-Cleeman

$$L = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\,\bar{R}\,\frac{A^{\frac{1}{2}}}{d} \qquad (278{,}1)$$

mit einer Genauigkeit von $\pm$ 10%. $\bar{A}$ bedeutet hier die mittlere Massenzahl und d die Dichte des Stoffes in g/cm³. Hieraus ergibt sich z. B. für α-Teilchen, die in der Luft eine mittlere Reichweite von einigen Zentimetern haben, die Reichweite in tierischen Geweben zu 30 — 40 μ.

Die Gegenüberstellung der kinetischen Energie von α-Teilchen mit der Zerfallswahrscheinlichkeit des α-Strahlers $\left(\text{d. h. mit der Radioaktivitätskonstante } \lambda = \frac{1}{\tau}\right)$ zeigt, daß zwischen diesen Größen ein direkter Zusammenhang besteht. Qualitativ drückt er sich derart aus, daß zu größerem λ (d. h. zu kleinerer mittlerer Lebensdauer) auch eine größere Energie der α-Teilchen gehört. Durch Vergleich der quantitativen Meßergebnisse für λ und R von verschiedenen α-Strahlern fanden Geiger und Nuttall folgendes wichtige Gesetz:

$$\ln \lambda = A + B \ln R. \tag{278,2}$$

Abb. 362 veranschaulicht dieses Gesetz für die drei natürlich-radioaktiven Familien. Man sieht, daß alle Strahler einer Familie in den Koordinaten $\ln \lambda$ und $\ln R$ genau auf einer Geraden liegen. Es ist bemerkenswert, daß alle drei Geraden annähernd parallel zueinander verlaufen. Daraus folgt, daß die Konstante B für alle drei Reihen fast gleich ist.

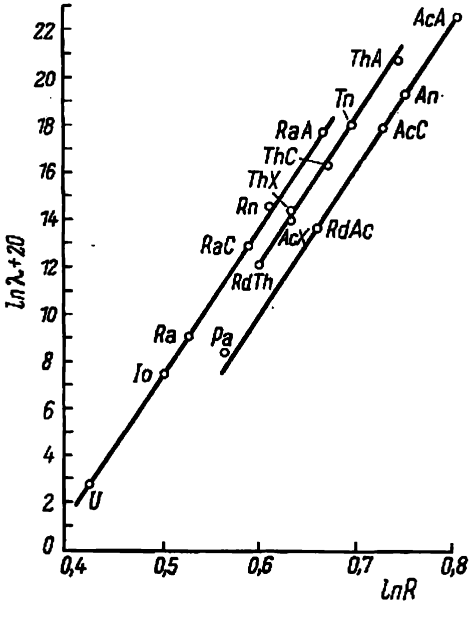


Abb. 362. Das Geiger-Nuttallsche Gesetz

Da die Reichweite mit der Geschwindigkeit durch die Beziehung $R = kv^3$ verknüpft ist, folgt aus (278,2)

$$\ln \lambda = A + B \ln kv^3 = A' + B' \ln E, \tag{278,3}$$

so daß das Geiger-Nuttallsche Gesetz einen Zusammenhang zwischen der Zerfallswahrscheinlichkeit und der Energie der ausgeschleuderten α-Teilchen liefert.

Bei der Aufstellung dieses Gesetzes wies GEIGER darauf hin, daß die Beziehung (278,3) wegen der Unzulänglichkeit der empirischen Ergebnisse als erste Näherung zu betrachten ist und daß die genauere Beziehung auch andere Konstanten des Atomkerns enthalten muß. Die Theorie des α-Zerfalls (siehe § 284) zeigt, daß $\ln\lambda$ wirklich nicht nur von der Energie der α-Teilchen, sondern auch von der Atomnummer Z und vom Kernradius abhängt. Deshalb kann man die Abhängigkeit des $\ln\lambda$ von den Konstanten, die den Atomkern charakterisieren, nicht zweidimensional darstellen. Die Tatsache, daß dies GEIGER und NUTTALL trotzdem gelang, ist durch die gleichsinnige Änderung von Z, v und r in jeder radioaktiven Reihe beim

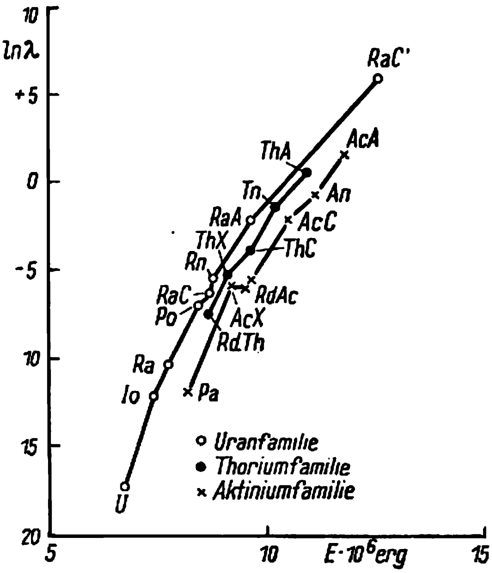


Abb. 363. Das GEIGER-NUTTALLsche Gesetz in den Koordinaten $\ln\lambda$, E

Übergang von einem Glied der Reihe zum nächsten zu erklären. An den Stellen, wo dieser monotone Charakter gestört wird, ist eine Abweichung vom GEIGER-NUTTALLschen Gesetz zu erwarten. Diese Abweichungen sind auch tatsächlich vorhanden und besonders merklich, wenn auf der Abszissenachse nicht $\ln E$, sondern einfach E aufgetragen wird (d. h., wenn man den Abszissenmaßstab stark vergrößert). Aus Abb. 363 ist ersichtlich, daß die Kurve für Aktinium im Punkt AcX einen Sprung aufweist. An dieser Stelle nimmt die Geschwindigkeit des ausgeschleuderten α-Teilchens im Vergleich zur Geschwindigkeit beim vorangehenden Element RdAc ab, während die Geschwindigkeiten der α-Teilchen längs der ganzen Reihe anwachsen.

§ 279. Reichweite und Energie der β-Teilchen

Beim β-Zerfall ist sowohl die Emission von gewöhnlichen negativen als auch von positiven Elektronen möglich. Die Gesetze, die die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Medium beschreiben, sind jedoch mit Ausnahme der sogenannten Zerstrahlung (Paarvernichtung § 283) für beide Arten gleich.

Die geringe Masse der Elektronen im Vergleich zu α-Teilchen oder schweren geladenen Teilchen überhaupt ist der Grund für die Komplikation der Prozesse, die beim Durchgang von Elektronen durch Substanzen ablaufen. Der Energiebereich der ausgesandten Elektronen und Positronen ist sehr groß: von kleinen, schwer meßbaren Energien reicht er bis 16 MeV (β^+-Zerfall des Stickstoffisotops $_7N^{17}$). Wegen ihrer kleinen Masse sind die Elektronen schon bei geringen Energien relativistisch zu betrachten. Bei 100 keV ist ihre Masse um 20% größer als die Ruhemasse, und die Geschwindigkeit beträgt 0,55 c; bei 1 MeV besitzt das Elektron schon fast die dreifache Ruhemasse, $\beta = 0{,}94$, und bei 16 MeV ist schließlich das Verhältnis $\frac{m}{m_0} = 31{,}6$ und die Geschwindigkeit gleich 0,9995 c. Bei Rechnungen für β-Elektronen muß man deshalb im allgemeinen mit relativistischen Formeln arbeiten. Wir erinnern uns an die relativistischen Ausdrücke für die kinetische Energie und den Impuls (Teil I, § 61):

$$E_{\text{kin}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \frac{eV}{300},$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Mit Formel (243,1) erhalten wir ferner

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2m_0c^2)}. \tag{243,1'}$$

Da man Energie und Impuls der Elektronen gewöhnlich aus ihrer Ablenkung im magnetischen Querfeld bestimmt, ist es zweckmäßig, die folgenden Formeln zu beachten. Sie verbinden das Produkt der magnetischen Feldstärke mit dem Krümmungsradius der Elektronenbahn, $\mathfrak{H}\varrho$, mit der Energie und dem Impuls. Nach einer von uns schon oft benutzten Formel (siehe Teil I, § 4) gilt

$$\mathfrak{H}\varrho = \frac{c}{e}\,mv = \frac{c}{e}\,p \tag{279,1}$$

oder, mit Formel (243,1),

$$\mathfrak{H}\varrho = \frac{1}{e}\sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2m_0c^2)}. \tag{279,2}$$

Das Produkt $\mathfrak{H}\varrho$ wird in Oersted · cm ausgedrückt und E_{kin} in Formel (279,2) entsprechend in erg. Es ist zweckmäßig, die Formel so umzuformen, daß man rechts E'_{kin} in MeV einsetzen kann. Wenn man beachtet, daß für das Elektron $2m_0c^2 = 1{,}02$ MeV und

$$E_{\text{kin}}\,\text{erg} = E_{\text{kin}}\,\text{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{erg}}{\text{MeV}}$$

gilt, erhalten wir

$$\mathfrak{H}\varrho = \frac{1{,}6\cdot 10^{-6}}{4{,}8\cdot 10^{-10}}\sqrt{E'_{\text{kin}}(E'_{\text{kin}} + 1{,}02)} = \frac{10^4}{3}\sqrt{E'_{\text{kin}}(E'_{\text{kin}} + 1{,}02)} \tag{279,3}$$

(E'_{kin} in MeV). Für $E'_{\text{kin}} \gg 1$ MeV erhalten wir offensichtlich

$$\mathfrak{H}\varrho = \frac{10^4}{3}E'_{\text{kin}}. \tag{279,4}$$

Wenn man $\mathfrak{H}\varrho$ kennt, kann man also den Impuls und die kinetische Energie eines schnellen Elektrons leicht berechnen.

Beim Durchgang von Elektronen durch Substanzen treten folgende Erscheinungen auf: 1. Elastische Streuung, 2. Ionisation, 3. Bremsstrahlung.

1. *Die elastische Streuung* wird sowohl von Atomelektronen als auch von Kernen hervorgerufen. In beiden Fällen hat die Erscheinung besonders für langsame Elektronen wesentliche Bedeutung. Die Streuung von nicht-relativistischen Elektronen an Kernen gehorcht der RUTHERFORD-Formel (Teil I, § 27), so daß der Wirkungsquerschnitt des Kerns mit der Ladung $+Ze$ proportional Z^2 und umgekehrt proportional dem Quadrat der kinetischen Energie des Elektrons ist. Die quantenmechanische Theorie der Elektronenstreuung ist gut ausgearbeitet, ihre Darstellung überschreitet jedoch den Rahmen dieses Buches[1].

2. Durch *Ionisation* tritt ein sehr wesentlicher Energieverlust beim Durchgang von Elektronen durch Substanzen auf. Im Energieintervall von 10 keV bis 2 MeV ist die spezifische Ionisation durch Elektronen annähernd dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit umgekehrt proportional. Statistische Schwankungen der Reichweite sind bei Elektronen bedeutend ausgeprägter als bei α-Teilchen. Das hängt z. T. damit zusammen, daß das Elektron bei nur einem Zusammenstoß einen großen Teil seiner Energie verlieren kann, und z. T. damit, daß die Elektronenbahnen in Gasen nicht geradlinig sind und die Elektronen deshalb beim Durchgang durch eine gleichdicke Stoffschicht in Wirklichkeit in diesem Stoff Wege von sehr verschiedener Länge zurücklegen.

Die Frage nach den Ionisationsverlusten schneller Elektronen, die für die Höhenstrahlforschung große Bedeutung hat, wird in Kapitel XXIV betrachtet.

3. *Strahlung.* Die Bremsung von Elektronen bei ihrem Durchgang durch das elektrische Kernfeld führt zur Entstehung der Röntgenbremsstrahlung. Dieser Prozeß ist auch eine wichtige Quelle des Energieverlusts bei der Wechselwirkung von Elektronen mit der Substanz (siehe in diesem Zusammenhang Kapitel XXIV, § 322).

Die Kombination von Streuung und Verlusten wirkt dahingehend auf die Strahlung, daß die Elektronen bestimmter Maximalenergie in der Substanz annähernd exponentiell mit zunehmender Schichtdicke absorbiert werden. Das Absorptionsgesetz hat also die Gestalt

$$N = N_0 e^{-\mu d}, \tag{279,5}$$

wo N die Anzahl der durch die Schicht der Dicke d hindurchgegangenen Elektronen und N_0 die Anzahl der auf die vordere Oberfläche der Schicht auffallenden Elektronen bedeuten. Die Elektronenabsorption wird durch die Schichtdicke $d_{\frac{1}{2}}$, für die $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$ gilt, charakterisiert.

Aus (279,5) folgt

$$d_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{\mu}.$$

---

[1]) Eine gründliche Darstellung dieser Theorie findet man im Buche von MOTT und MASSEY: „The Theory of Atomic Collisions", Oxford Clarendon Press, 2 Ed., 1949.

Wenn man (279,5) in der Form

$$N = N_0 e^{-\frac{\mu}{\varrho}\varrho d} \tag{279,6}$$

schreibt, kann man die Absorption durch die Größe $D = \varrho d_{\frac{1}{2}}$ kennzeichnen:

$$D = \varrho\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}} \times d_{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm} = \varrho d_{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g \cdot cm^{-2}} = \frac{0{,}693\,\varrho}{\mu}\ \mathrm{g \cdot cm^{-2}}.$$

Deshalb gibt man die Zahlenwerte zur Charakterisierung der Absorption häufig in $\mathrm{g \cdot cm^{-2}}$ oder $\mathrm{mg \cdot cm^{-2}}$ an.

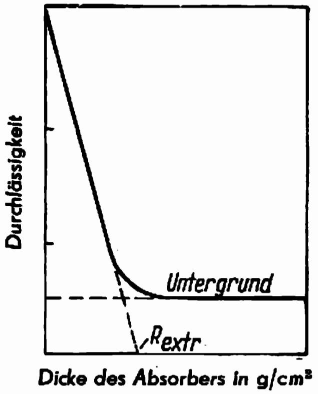


Abb. 364. Bestimmung der Reichweite von Elektronen (β-Teilchen)

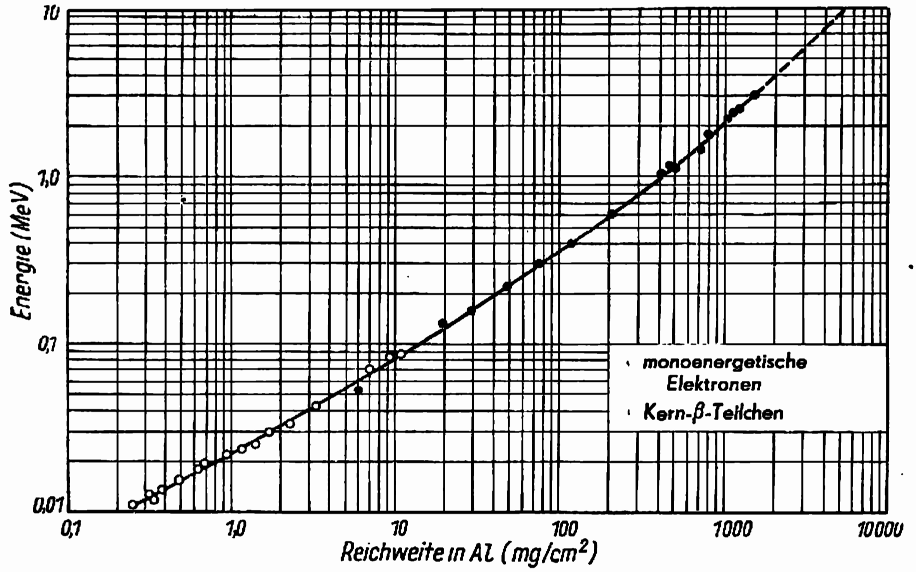


Abb. 365. Die „Reichweite-Energie"-Kurve für Elektronen und β-Teilchen

Trotz der komplizierten Wechselwirkungen von Elektronen mit Substanzen hat ihre Reichweite für eine bestimmte Anfangsenergie einen bestimmten Wert. Die Abhängigkeit der Durchlässigkeit $\left(\text{d. h. } \ln \frac{N_0}{N}\right)$ von der Dicke der absorbierenden Schicht hat den in Abb. 364 dargestellten Verlauf. Hier kann man zwei Teile — den horizontalen und den abfallenden — deutlich voneinander unterscheiden. Der horizontale Teil wird durch den Untergrund von Röntgenstrahlen bedingt, die beim Durchgang von Elektronen durch Substanzen immer entstehen. Der abfallende Teil wird durch Elektronenabsorption hervorgerufen. Wenn man das annähernd geradlinige Stück dieses fallenden Teils bis zum Schnitt mit der Horizontalen fortsetzt, erhält man den Abschnitt R, der die extrapolierte Reichweite der Elektronen (oder β-Teilchen) darstellt. Wenn man die Reichweite kennt, kann man die Anfangsenergie der Elektronen bestimmen. Zu diesem Zweck kann man empirische Formeln benutzen. Am zweckmäßigsten ist es jedoch, die Energie aus der Reichweite mit Hilfe der empirischen „Reichweite-Energie"-Kurve, die durch sorgfältige experimentelle Messungen gewonnen wird, zu bestimmen. Diese Kurve ist in Abb. 365 wiedergegeben.

§ 280. Absorption und Streuung von γ-Strahlen

Bei den γ-Strahlen handelt es sich um eine kurzwellige elektromagnetische Strahlung. Die Wellenlänge weicher γ-Strahlen kann man nach der Methode der Kristallreflexion bestimmen. Wegen ihrer Kleinheit ist die X-Einheit zur Ausmessung dieser Wellenlängen am geeignetsten. Diese Einheit findet in der Spektroskopie der Röntgenstrahlen (siehe Teil I, § 35) Anwendung:

$$1\,\text{X} = 10^{-3}\,\text{Å} = 10^{-11}\ \text{cm}\,.$$

Die unmittelbar gemessenen Wellenlängen der γ-Strahlen liegen in der Größenordnung von zehn oder hundert X. Die kürzeste auf diese Weise ausgemessene Wellenlänge beträgt 16X. Der Beugungswinkel beträgt in diesem Falle nur 9,8′. Im weiteren wird uns die Photonenenergie $h\nu$ mehr als die Wellenlänge interessieren. Diese Energie drücken wir in Elektronenvolt oder in Millionen Elektronenvolt (MeV) aus. Der Wellenlänge 16X entspricht z. B. eine Photonenenergie

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}99 \cdot 10^{10}}{16 \cdot 10^{-11}} = 1{,}24 \cdot 10^{-6}\ \text{erg} = 0{,}778\ \text{MeV}.$$

Für sehr hohe Frequenzen kann man die Ruhenergie (Eigenenergie) des Elektrons als Energieeinheit benutzen:

$$m_0c^2 = 9{,}106 \cdot 10^{-28} \cdot 8{,}988 \cdot 10^{20} = 8{,}108 \cdot 10^{-7}\ \text{erg} = 5{,}108 \cdot 10^{5}\ \text{eV} = 0{,}5108\ \text{MeV}.$$

Beim Durchgang von γ-Strahlen durch Substanzen wird eine Reihe von Erscheinungen beobachtet, die wir nun behandeln wollen. Wenn die Energie des Photons kleiner als 1 MeV ist, beschränken sich diese Erscheinungen auf photoelektrische Absorption und Streuung. Bei Photonenergien, die größer als 1 MeV sind, wird außerdem die eigenartige Erscheinung der Paarbildung beobachtet. Sie wird in den nächsten Paragraphen behandelt.

Wenn ein homogenes paralleles Bündel von γ-Strahlen durch eine x cm dicke Stoffschicht geht, dann folgt seine Schwächung dem gleichen Exponentialgesetz wie die Schwä-

chung der Röntgenstrahlen (siehe Teil I, § 31):

$$J = J_0 e^{-\mu x}.$$

Der Koeffizient μ mit der Dimension [cm^{-1}] heißt Schwächungskoeffizient. Da die Schwächung von verschiedenen physikalischen Erscheinungen (z. B. von Photoeffekt und Streuung) herrühren kann, ist es zweckmäßig, μ als Summe darzustellen:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots$$

Hier bezieht sich jeder Summand auf einen bestimmten physikalischen Prozeß. Wenn die Schwächung nur durch Photoeffekt und Streuung verursacht wird, gilt $\mu_1 = \tau$, $\mu_2 = \sigma$ (siehe Teil I, § 31) und $\mu = \tau + \sigma$.

Es ist bequemer, an Stelle des linearen Schwächungskoeffizienten μ die Massenkoeffizienten μ/ϱ, τ/ϱ, σ/ϱ mit der Dimension $g^{-1} \cdot \text{cm}^2$ und die auf 1 Atom und 1 Elektron bezogenen Koeffizienten

$$\mu_a = \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{A}{N}, \quad \tau_a = \frac{\tau}{\varrho} \cdot \frac{A}{N},$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{A}{N}, \quad \mu_a = \mu_e Z \text{ usw.}$$

zu benutzen. Die Koeffizienten μ_a, μ_e, τ_a, $\tau_e \dots$ haben die Dimensionen [cm^2] und können deshalb als Wirkungsquerschnitte für diesen oder jenen Prozeß aufgefaßt werden.

Wenn weiche γ-Strahlen durch eine Stoffschicht hindurchgehen, die aus schweren Atomen besteht, wird die Absorption hauptsächlich durch den Photoeffekt bedingt. Dagegen ist für den Energieverlust harter γ-Strahlen, insbesondere in Substanzen mit leichten Atomen, fast ausschließlich die Streuung maßgebend.

Zur photoelektrischen Absorption ist zu sagen, daß sie ihrem Wesen nach natürlich nicht von der Absorption der Röntgenstrahlen entsprechender Härte verschieden ist. Wie bei den Röntgenstrahlen geht der Photoeffekt in den inneren Atomschalen (K, L, ...) vor sich. Die Energien der dabei freiwerdenden Elektronen erlauben nach der Einsteinschen Gleichung

$$eV = h\nu - E_K, \quad eV = h\nu - E_{L_\text{I}} \text{ usw.}$$

eine unmittelbare Bestimmung der Niveaus K, L_I, L_II usw. (siehe § 225), wenn die Frequenz ν der γ-Quanten bekannt ist. Umgekehrt kann man ν bestimmen, wenn K, L_I usw. bekannt sind.

Die Auffüllung der beim Photoeffekt freigewordenen Plätze aus weiter außen liegenden Schalen führt zur Entstehung der charakteristischen Röntgenstrahlung der bestrahlten Substanz und zur Befreiung von Auger-Elektronen (siehe § 233). Die räumliche Verteilung der Photoelektronen ist durch eine bestimmte Asymmetrie gekennzeichnet. Im Falle weicher γ-Strahlen fliegen nämlich die Photoelektronen hauptsächlich senkrecht zur Richtung des γ-Strahlenbündels heraus. Sehr harte γ-Strahlen schleudern die Photoelektronen vorzugsweise nach vorn heraus. Man kann dies qualitativ durch die Wirkung des elektrischen und magnetischen Vektors der elektromagnetischen Welle der γ-Strahlen erklären. Unter der Einwirkung des elektrischen Feldes weicht das Elektron senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der γ-Strahlen aus. Auf ein bewegtes Elektron wirkt jedoch das Magnetfeld der Welle mit

der Lorentz-Kraft $\frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$ senkrecht zu $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{H}$, d. h. in der Richtung des γ-Strahlenbündels. Der Impuls, der durch diese Kraft auf das Elektron ausgeübt wird, ist $\frac{h\nu}{c}$. Bei sehr hohen Frequenzen ν hat dieser Impuls deshalb eine wesentliche Bedeutung, und die Elektronen werden hauptsächlich nach vorn „hinausgestoßen".

Mit abnehmender Wellenlänge der γ-Strahlen spielt die Streuung im Vergleich zur photoelektrischen Absorption eine immer größere Rolle. Wie wir schon gesehen haben, wird im Gebiet der Röntgenstrahlen neben der Streuung ohne Wellenlängenänderung die Compton-Streuung beobachtet (siehe Teil I, § 117). Bei letzterer vergrößert sich die Wellenlänge. Da sich bei der Compton-Streuung Rückstoßelektronen bilden, führt sie zu einer echten Absorption der Röntgen- oder γ-Strahlen zum Unterschied von der Streuung ohne Wellenlängenänderung, wo die Schwächung auf Kosten der Richtungsänderung der einfallenden ebenen Welle erfolgt. Für die klassische Streuung (ohne Wellenlängenänderung) gilt die Thomson-Formel

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m_0^2 c^4}.$$

Sie liefert den Wirkungsquerschnitt für die Streuung, die nur durch eine Richtungsänderung des Photons bedingt ist. Es ist offensichtlich, daß die Größe σ_e eine universelle Konstante ist.

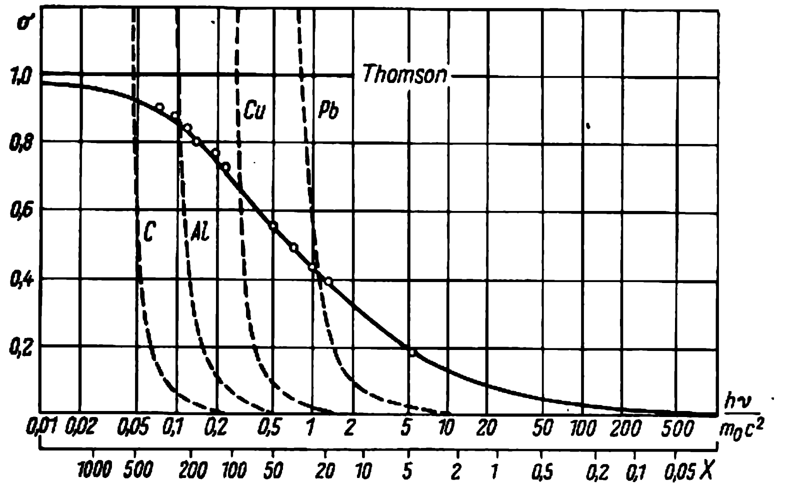


Abb. 366. Der totale Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung. Die ausgezogene Kurve ist nach der Formel von Klein-Nishina-Tamm berechnet; die experimentellen Werte sind durch Kreise bezeichnet

Die Formel des Wirkungsquerschnitts für die Compton-Streuung bei beliebiger Energie des auffallenden Photons wurde von Klein und Nishina gefunden und von I. E. Tamm

auf der Grundlage der Quantenelektrodynamik streng abgeleitet. Diese Formel hat die Form

$$\sigma = \frac{2\pi e^4}{m_0^2 c^4}\left\{\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\ln(1+2\alpha)\right] + \frac{1}{2\alpha}\ln(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2}\right\}$$

mit $\alpha = \frac{h\nu}{m_0 c^2}$, der Größe des Röntgenquants, dividiert durch die Eigenenergie des Elektrons. Im Grenzfall führt die Formel für kleine Frequenzen wieder zur THOMSON-Formel.

Die Formel von KLEIN-NISHINA-TAMM wird durch das Experiment bis zu Wellenlängen, für die $h\nu \gg 2m_0c^2$ gilt, ausgezeichnet bestätigt. In Abb. 366 ist eine Kurve wiedergegeben, die die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der COMPTON-Streuung von der Wellenlänge der einfallenden Photonen darstellt (die obere Skala auf der Abszissenachse gibt die durch die Eigenenergie des Elektrons dividierte Photonenenergie an). Zum Vergleich sind auf diesem Bild punktierte Kurven für die photoelektrische Absorption in verschiedenen Stoffen dargestellt. Man stellt fest, daß selbst bei einer so schweren Substanz wie Blei die photoelektrische Absorption von Wellenlängen, die in der Größenordnung einiger X-Einheiten liegen, verschwindend klein wird. Für längere Wellen liefert die Formel von KLEIN-NISHINA-TAMM, wie man aus der Zeichnung sieht, das THOMSONsche σ_e in asymptotischer Näherung.

§ 281. Die Entstehung von Positronen bei der Absorption von γ-Strahlen

Bei Vergrößerung der Energie der γ-Quanten fällt die photoelektrische Absorption schnell ab; auch die COMPTON-Streuung nimmt ab, wenn auch ein wenig langsamer. Wie aus Abb. 367 weiter zu sehen ist, beginnt jedoch bei Photonenenergien von 1,02 MeV ein neuer Prozeß, der zu einer starken Absorption von γ-Strahlen führt. Für $h\nu > 1{,}02$ MeV

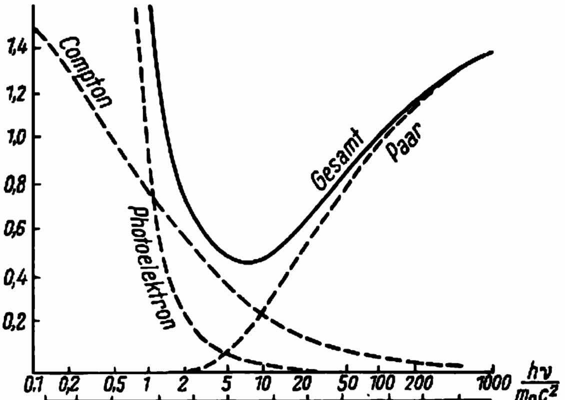


Abb. 367. Der Absorptionskoeffizient von γ-Strahlen in Blei. Die ausgezogene Linie gibt die Gesamtabsorption und die punktierten Linien ihre Bestandteile wieder

werden Photonen wie beim Photoeffekt im starken COULOMB-Feld des Kerns vollkommen absorbiert. Dabei entsteht ein Teilchenpaar, ein gewöhnliches negatives und ein positives Elektron, das Positron. Es ist hier wesentlich, daß die Elektronen und Positronen nicht aus

l nicht aus der Elektronenhülle, wo es zwa
ı aus dem sogenannten „Untergrund" ent
en sprechen. Die Energie des absorbierte
zur Erzeugung des Teilchenpaares mit eine
erden. Die restliche Energie ($h\nu$ — 1,02 MeV
Teilchen und des Rückstoßkerns, in desse
r Paarbildung und die Natur des „Unter
bilden, werden wir in den nächsten beide
ige experimentelle Ergebnisse, die sich au
ronen beziehen, anführen.

bb. 368. Paarbildung in Krypton. Die Spu
es Positrons verläuft nach rechts, die de
Elektrons nach links

deutenden Gradienten der Inhomogenitä
lchen angeordnet. Es zeigt sich, daß all
ensten Richtungen in einer zur Zeichnun
chbarten Ebene ausgesandt werden, nac
(diese Kurven heißen Trochoiden) sich i
meln. Als Quelle dient ein Röhrchen mi
ssendet (z. B. ein Salz des Radiothorium

oder Radon). Das Röhrchen ist von einer Bleihülle umgeben, die den eigentlichen Strahler der Positronen und Elektronen darstellt. Wenn man in F einen Film anbringt, dann rufen die schnellen Teilchen auf ihm eine Schwärzung in Form eines ziemlich schmalen Streifens hervor. Da bei einer gegebenen Feldrichtung der Windungssinn der Teilchen von ihrem Vorzeichen abhängt, genügt es, die Feldrichtung umzukehren, damit auf den Film F an Stelle der positiven negativ geladene Teilchen, oder umgekehrt, fallen. Vor dem Film F befinden sich zwei Netze senkrecht zur Trochoidenachse. Wenn man an sie eine Potentialdifferenz legt, rückt die Trochoide in der Zeichenebene nach links oder nach rechts (Abb. 370 rechts).

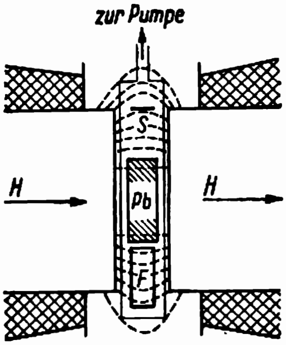


Abb. 369. Längsschnitt der Anordnung von THIBAND

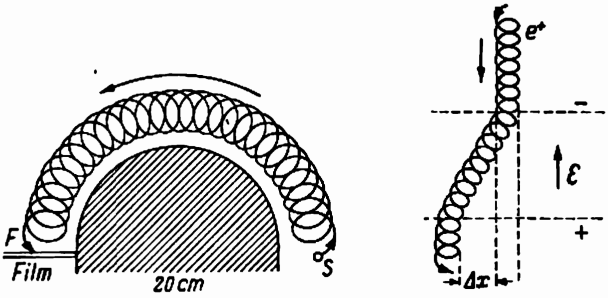


Abb. 370. Querschnitt durch die Anordnung und Form der Bahnkurven

Gleichzeitig wird das Bild der Quelle S auf dem Film verschoben. Auf diese Weise wurde die Verschiebung der Elektronen und Positronen, die von der Quelle ausgesendet werden, unter der Wirkung elektrischer Felder verschiedener Intensität ausgemessen. Diese Verschiebung erwies sich als dem Feld proportional, wobei die experimentellen Geraden für beide Teilchenarten vollkommen symmetrisch sind, d. h., die Elektronen und Positronen werden durch ein gegebenes Feld in entgegengesetzte Richtungen, aber um den gleichen Betrag, abgebeugt. Das bedeutet, daß beide Teilchenarten dem Betrage nach gleiche spezifische Ladungen $\frac{e}{m}$ besitzen.

§ 282. Die Eigenschaften der Positronen und die DIRACsche Theorie

Die erstaunlichste Eigenschaft der Positronen ist die Tatsache, daß sie im freien Zustand nur sehr kleine Zeitabschnitte, nach deren Verlauf sie „verschwinden", existieren können. Womit ist das zu erklären, und warum unterscheiden sich die Positronen in vielen Beziehungen von den gewöhnlichen Elektronen? Warum sind Elektronen sehr leicht zu erzeugen, Positronen aber nur durch Photonen, deren Energie über einer Million Elektronenvolt liegt? Diese Fragen behandelt die DIRACsche Theorie.

Das Wesen dieser Theorie besteht in folgendem: Die Lösung der DIRAC-Gleichung (§ 202) für ein freies Elektron, das nur kinetische Energie besitzt, liefert zwei Gebiete von Energieeigenwerten. Das eine beginnt mit m_0c^2 und erstreckt sich bis $+\infty$, und das andere liegt zwischen $-m_0c^2$ und $-\infty$. Neben positiven Energien erhält man also auch negative. Man

sieht leicht ein, daß das Elektron in Zuständen mit negativer Gesamtenergie sehr ungewöhnliche Eigenschaften besitzen muß. Wenn man bedenkt, daß die negative Energie $-mc^2$ der negativen Masse $-m$ äquivalent ist, dann muß das Elektron in Zuständen mit negativer Energie eine Beschleunigung erfahren, die der Kraft entgegengesetzt gerichtet ist. Um seine Energie zu verringern, müßte man ihm eine bestimmte Menge positiver Energie mitteilen und nicht entziehen usw.

Aus all diesem ist zu sehen, daß die DIRAC-Gleichung zu ernstlichen Schwierigkeiten führt. Diese Komplikationen sind jedoch nicht nur der DIRAC-Gleichung eigen, sondern sie treten in der gesamten Relativitätstheorie auf, mit der diese Gleichung unmittelbar verbunden ist. Die relativistische Beziehung zwischen Impuls und Energie $E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4$ liefert nämlich zwei Energiewerte $E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}$. Für $p = 0$ folgt $E = \pm m_0c^2$. Man erhält also zwei kontinuierliche Energiegebiete, die durch den Zwischenraum $2\,m_0c^2$ getrennt sind (Abb. 371). In der klassischen Physik wurde dieser Umstand aus folgendem Grunde

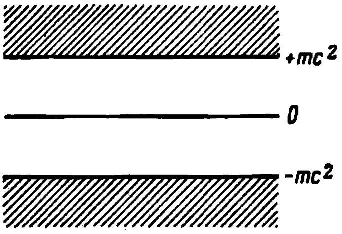


Abb. 371

ignoriert: Da sich alle dynamischen Variablen der klassischen Physik kontinuierlich ändern, der Übergang von positiven zu negativen Energiewerten aber einen Sprung um $2m_0c^2$ erforderlich macht, ist dieser Übergang in der klassischen Physik nicht möglich. Deshalb ist es hier nicht notwendig, das doppelte Vorzeichen der Energie zu berücksichtigen. In der Quantenphysik sind dagegen Übergänge zwischen diskreten Energieniveaus nicht nur erlaubt, sie sind vielmehr eine gewöhnliche Erscheinung, wenn keine Auswahlregel, die den gegebenen Übergang verbietet, besteht. DIRAC bewies nun, daß eine Auswahlregel, die den Übergang zwischen den Niveaus $+m_0c^2$ und $-m_0c^2$ verbieten würde, nicht existiert und daß die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs sogar sehr groß ist. Die relativistische Wellengleichung führt also unumgänglich zu der Erkenntnis, daß Zustände des Elektrons mit negativer (relativistischer) Gesamtenergie existieren müssen.

Wir wenden uns jetzt folgendem Umstand zu: Das Verhalten des Elektrons in elektromagnetischen Feldern hängt von dem Verhältnis $\frac{e}{m}$ ab. Ein negatives Elektron mit negativer Masse (negativer Energie) muß sich also wie ein Teilchen mit dem Verhältnis der Ladung zur Masse von $\frac{-e}{-m} = +\frac{e}{m}$, d. h. wie ein positiv geladenes Teilchen bewegen. Stellt das Elektron mit negativer Energie etwa das Positron dar? Diese Hypothese steht aber in scharfem Widerspruch zu der Tatsache, daß sich das Positron wie ein gewöhnliches Teilchen verhält und nicht mit jenen paradoxen Eigenschaften behaftet ist, die dem Elektron mit negativer Energie eigen sind. Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten schlug DIRAC eine Hypothese vor, nach der alle Niveaus negativer Energie im normalen Zustande mit Elektronen besetzt

sind, während die Niveaus positiver Energie nur zum Teil besetzt sind. Nach dem PAULI-Prinzip können sich auf jedem Niveau nur zwei Elektronen befinden. Übergänge zu Niveaus negativer Energie sind also deshalb nicht möglich, weil diese schon alle besetzt sind. Die Elektronen mit positiver Energie sind also beständig und existieren als gewöhnliche Elektronen. Da die Anzahl der negativen Energieniveaus unendlich groß ist, fordert die DIRACsche Hypothese, daß überall immer eine unendliche Menge von Elektronen mit negativer Energie existiert. Diese Elektronen bilden nun aber alle einen vollkommen homogenen Untergrund und sind deshalb der Beobachtung unzugänglich. Wenn jedoch in diesem absolut homogenen Untergrund ein „Loch" entsteht, d. h., wenn ein Elektron mit negativer Energie, das eine ausreichende Energiemenge absorbiert hat, ins Gebiet positiver Energien $E \geqslant m_0c^2$ übergeht, dann beobachten wir es erstens als gewöhnliches Elektron mit positiver Energie, und zweitens ist auch das „Loch" zu bemerken. Dieses Loch wird sich jedoch zum Unterschied von Elektronen mit negativer Energie wie ein gewöhnliches positiv geladenes Teilchen verhalten.

Im Normalzustand, wenn alle Niveaus negativer Energie besetzt sind, ist der Gesamtimpuls des ganzen Systems gleich Null. Wenn ein Elektron aus diesem Untergrund entfernt wird, entsteht ein zusätzlicher, nicht kompensierter Impuls $p_+ = -p$. Das bedeutet, daß das „Loch" einen Impuls haben muß, der dem des Elektrons mit negativer Energie entgegengerichtet ist, d. h., das Loch entbehrt die oben erwähnten paradoxen Eigenschaften und bewegt sich wie ein gewöhnliches Teilchen.

DIRAC identifizierte diese Löcher anfänglich mit Protonen. Später fand man jedoch heraus, daß sie sich wie Teilchen mit Elektronenmassen verhalten müssen. Die Entdeckung des Positrons brachte die Bestätigung dafür, daß solche positiven Elektronen existieren.

§ 283. Paarbildung

Wir wollen nun die Folgerungen der DIRACschen Löchertheorie etwas ausführlicher betrachten. Wir nehmen an, daß ein Elektron im Zustand mit negativer Energie ein γ-Quant absorbiert. Da der höchste Wert negativer Energie $-m_0c^2$ und der kleinste Wert positiver Energie $+m_0c^2$ ist, muß die Energie des Photons mindestens $2m_0c^2$ betragen, damit das Elektron aus einem Zustand mit negativer in einen Zustand mit positiver Energie übergehen kann. Da die Ruhemasse m_0 des Elektrons in energetischen Einheiten $m_0c^2 = 0{,}51$ MeV beträgt, ist $2m_0c^2 = 1{,}02$ MeV. Die Absorption der Energie $2m_0c^2$ ist für das Zustandekommen des Übergangs nicht allein ausreichend, da nicht nur der Energiesatz, sondern auch der Impulssatz erfüllt werden muß. Es ist nicht schwer sich davon zu überzeugen, daß der Impulssatz im System Photon-Teilchenpaar bei der Bildung eines Teilchenpaares mit von Null verschiedener Ruhemasse auf Kosten des absorbierten Photons nicht erfüllt wird. Für das Photon ist nämlich das Verhältnis des Impulses zur Energie gleich

$$\frac{p}{E} = \frac{h\nu/c}{h\nu} = \frac{1}{c},$$

für Teilchen mit $m_0 \neq 0$ jedoch

$$\frac{p'}{E'} = \frac{mv}{mc^2} = \beta\frac{1}{c}.$$

Daraus ergibt sich für $E = E'$

$$\frac{p'}{p} = \beta,$$

wobei $\beta = \frac{v}{c} < 1$ gilt.

Wenn sich das Photon in ein Paar aus Elektron und Positron bei gleicher Gesamtenergie ($h\nu = 2m_0c^2$) verwandelt, ist deshalb die Summe der Impulse dieser Teilchen kleiner als der Impuls des Photons. Hieraus folgt, daß bei der Paarbildung durch γ-Strahlen die Anwesenheit eines dritten Teilchens erforderlich ist. Letzteres muß den überschüssigen Impuls aufnehmen. Als solches drittes Teilchen fungiert gewöhnlich der Kern, in dessen Coulomb-Feld das Paar entsteht. Als drittes Teilchen kann auch ein Elektron dienen. In diesem Falle ist der ihm bei der Paarbildung übergebene Impuls wegen der kleinen Masse des Elektrons so groß, daß man die Spur dieses Elektrons in der Wilson-Kammer beobachten kann. Man beobachtet dann kein Paar, sondern ein Tripel von Teilchen. Es gelang, eine Reihe solcher Tripel zu photographieren. Eine Aufnahme ist in Abb. 372 wiedergegeben. Hier ist neben dem gewöhnlichen Paar noch eine kurze Spur zu sehen, die vom „Rückstoßelektron" herrührt.

Abb. 372. Die Bildung eines Tripels Elektron-Positron-Rückstoßelektron. Die Geburt des Paares ging in dem durch einen Pfeil bezeichneten Punkt vor sich. Am weitesten rechts liegt die Spur des Rückstoßelektrons

Eine eingehende Untersuchung der Paarbildung in Gasen unter der Wirkung von γ-Strahlen wurde von L. W. Groschew durchgeführt. Er fertigte zu diesem Zweck ungefähr 15000 stereoskopische Aufnahmen mit der Wilson-Kammer an, die sich in einem Magnetfeld befand, und fand etwa 450 Paare in Stickstoff und den schweren Edelgasen Krypton und Xenon. Er bestimmte die Energie beider Teilchen und die Gesamtenergie des Paares aus der Krümmung der Bahnkurven. In Abb. 373 ist eine Kurve gezeichnet, die angibt, wie die Anzahl der Paare in Stickstoff von der Energie abhängt. Wie man sieht, hat diese Kurve bei 1600 keV ein scharfes Maximum. Die Paare wurden durch die γ-Strahlung des ThC″, deren intensivster Linie eine Photonenenergie von 2620 keV entspricht, erzeugt. Da die zur Paarbildung notwendige Energie nach dem Vorangegangenen 1 MeV = 1000 keV beträgt, stellt diese Kurve eine anschauliche Demonstration der Energiebilanz bei der Paarbildung dar.

Die Paarbildung erklärt auch das starke Anwachsen der Absorption harter γ-Strahlen in schweren Stoffen. Bei kleinen Frequenzen geschieht die Absorption der γ-Strahlen nämlich auf Kosten des Photo- und des COMPTON-Effekts. Bei ausreichend hoher Frequenz des Photons wird die photoelektrische Absorption verschwindend klein, und es bleibt die

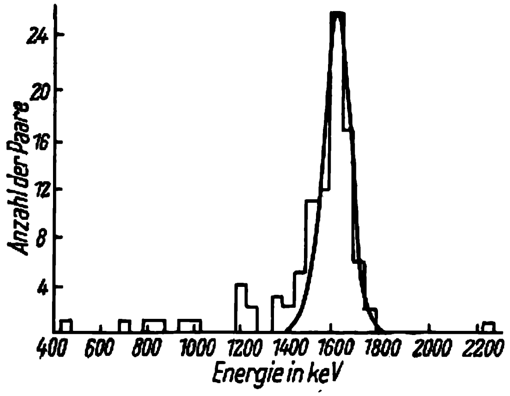


Abb. 373. Abhängigkeit der Paarbildung in Stickstoff von der Energie der γ-Strahlen

Absorption durch den COMPTON-Effekt übrig. Für sehr harte γ-Strahlen und schwere Substanzen liefert die Formel von KLEIN-NISHINA-TAMM eine Absorption, die etwa um 50% geringer als die im Experiment beobachtete ist. Dieser Überschuß an Absorption wird nun damit erklärt, daß die γ-Quanten mit einer Energie $>$ 1 MeV nicht nur durch COMPTON-Streuung, sondern auch durch Paarbildung aufgebraucht werden.

Die Theorie der Paarbildung wird in Handbüchern und Monographien der Quantenelektrodynamik dargestellt[1]). Sie führt zu folgender Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Paarbildung durch γ-Strahlen hoher Energie von der Atomnummer Z des Kerns, in dessen Feld die Paarbildung vor sich geht

$$\sigma_{\text{Paar}} = \frac{Z^2 r_0^2}{137} K ,$$

wobei r_0 der klassische Elektronenradius ($r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm) ist. Der Ausdruck für den Faktor K ist kompliziert, und wir geben nur seine Zahlenwerte für Photonen verschiedener Energien an. Wir führen die Bezeichnung

$$\bar{\sigma} = \frac{Z^2 r_0^2}{137} = \frac{7{,}84 \cdot 10^{-26}}{137} Z^2 = 5{,}71 \cdot 10^{-28} \cdot Z^2 \qquad (283{,}1)$$

ein. In der folgenden Tabelle sind die Werte für $\frac{\sigma_{\text{Paar}}}{\bar{\sigma}} = K$ für Photonen verschiedener Energie aufgeführt (die Photonenenergie ist in Einheiten $m_0 c^2$ ausgedrückt).

[1]) Siehe W. HEITLER: „The Quantum Theory of Radiation“, Chapt. IV, Oxford, University Press, 1954.

Tabelle LIII

$\frac{h\nu}{m_0c^2}$	3	4	5	10	50	∞
$\frac{\sigma_{\text{Paar}}}{\bar{\sigma}}$	0,085	0,32	0,61	1,94	6,4	11,5

Durch Anwendung der Formel (283,1) erhalten wir z. B.

$$\text{für Aluminium} \quad (Z = 13) \quad \bar{\sigma} = 9{,}7 \cdot 10^{-26};$$

$$\text{für Blei} \quad (Z = 82) \quad \bar{\sigma} = 3{,}84 \cdot 10^{-24}.$$

Mit diesen Werten von $\bar{\sigma}$ kann man mit Hilfe der Tabelle LIII σ_{Paar} berechnen. Für $\frac{h\nu}{m_0c^2} = 10$ (d. h. für $h\nu = 5$ MeV) ist z. B. $\frac{\sigma_{\text{Paar}}}{\bar{\sigma}} = 1{,}94$. Wenn wir hier $\bar{\sigma}$ einsetzen, erhalten wir z. B. für Al

$$\sigma_{\text{Paar}} = 1{,}94 \cdot 9{,}7 \cdot 10^{-26} = 1{,}88 \cdot 10^{-25},$$

für Pb

$$\sigma_{\text{Paar}} = 1{,}94 \cdot 3{,}84 \cdot 10^{-24} = 7{,}45 \cdot 10^{-24}.$$

Neben der Paarbildung ist auch der umgekehrte Prozeß möglich. Die Entstehung des Positrons bedeutet nach der Diracschen Theorie, daß ein Niveau negativer Energie frei wird. Wenn andererseits irgendein Niveau negativer Energie frei ist, kann ein Elektron mit positiver Energie einen Quantenübergang ausführen und dieses freie Niveau besetzen. Dann sind alle Niveaus negativer Energie wieder besetzt, d. h., das „Loch“ existiert nicht mehr und das Teilchenpaar „verschwindet“, während die Energiedifferenz zwischen positivem und negativem Niveau als γ-Strahlung frei wird. Dieser Prozeß trägt die unglücklich gewählte Bezeichnung „Zerstrahlung“, d. h. „Vernichtung“ der Teilchen. Dieses Wort ist insofern unglücklich, da gar kein Teilchen verschwindet. Da sich aber diese Bezeichnung schon eingebürgert hat, werden wir sie trotzdem benutzen.

Der Impulssatz fordert nun, daß die durch Vernichtung befreite Strahlung in Form zweier Photonen ausgesandt wird. Offensichtlich ist nämlich im Schwerpunktsystem die Impulssumme des Paares Elektron — Positron vor der Zerstrahlung gleich Null. Damit sie nach der Zerstrahlung gleich Null bleibt, ist die Bildung zweier entgegengerichteter Photonen notwendig. Wenn sich dabei der Übergang zwischen den Niveaus $+ m_0c^2$ und $- m_0c^2$ vollzieht (wahrscheinlichster Fall), ist die Differenz der Niveaus gleich $2m_0c^2$, und die Energie jedes Photons muß $E = m_0c^2 = 0{,}51$ MeV betragen. Die Aussendung eines Photons ist bei der Zerstrahlung nur in Gegenwart irgendeines Kerns, der den Impulsüberschuß übernimmt, möglich.

Die Existenz der Vernichtungsstrahlung mit der Photonenenergie 0,51 MeV, die von der Substanz, in der sich die Paarvernichtung abspielt, unabhängig ist, wurde durch zahlreiche Experimente bestätigt. Ihre Wellenlänge wird aus der Beziehung $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 0{,}51 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg bestimmt. Es ist daher

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{0{,}51 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-8}}\,\text{Å} = 0{,}024\ \text{Å}.$$

Man sieht leicht, daß diese Wellenlänge gleich der COMPTON-Wellenlänge Λ (Teil I, § 118) sein muß. Die Energie 0,51 MeV entspricht in der Tat der Ruhemasse des Elektrons, d. h. m_0c^2. Aus der Beziehung

$$m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda}$$

erhalten wir

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} = \Lambda\,.$$

Die Größe von Λ, die man aus den genauen Werten der universellen Konstanten h, m_0 und c berechnet,

$$\Lambda = 0{,}024265\ \text{Å},$$

stimmt gut mit der direkt gemessenen Wellenlänge λ überein.

Zwei Photonen, die bei der Zerstrahlung eines Elektrons und eines Positrons entstehen, müssen im Koordinatensystem des Schwerpunkts entgegengesetzt gerichtet sein. Beim Übergang zum Laborsystem muß man noch die Geschwindigkeit des Schwerpunkts berücksichtigen. Wenn diese Geschwindigkeit groß genug ist, muß sich der Winkel zwischen den Emissionsrichtungen der beiden Photonen im Laborsystem ein wenig von 180° unterscheiden. Die Prüfung dieser Folgerungen des Impulssatzes ist einerseits eine Kontrolle dafür, ob der beschriebene Mechanismus für die Entstehung der Vernichtungsstrahlung richtig ist, und andererseits eine Prüfung, ob der Impulssatz auf mikroskopische Prozesse anwendbar ist. Versuche, die anfangs von KLEMPERER und dann unter besseren Bedingungen von den sowjetischen Physikern A. J. ALICHANOW, A. J. ALICHANJAN und L. A. ARZIMOWITSCH durchgeführt wurden, zeigten, daß die Impulse der Zerstrahlungsphotonen tatsächlich innerhalb weniger Grade entgegengesetzt gerichtet sind. Die genaueste Prüfung des Impulssatzes bei der Paarzerstrahlung wurde vor kurzem (1950) von N. A. WLASSOW und B. S. DSCHELEPOW in folgender Weise erzielt (Abb. 374). In A ist radioaktives Kupfer

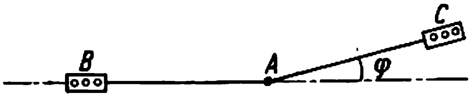


Abb. 374. Der Versuch von WLASSOW und DSCHELEPOW

$_{29}Cu^{64}$ als Quelle für die Vernichtungs-γ-Strahlen angeordnet. Zu beiden Seiten der Quelle befinden sich in B und C Zählrohrgruppen in Koinzidenzschaltung. Die Anordnung arbeitet deshalb nur dann, wenn die in verschiedenen Richtungen auseinanderfliegenden Photonen gleichzeitig durch die Zähler gehen. Der Aufbau ist so gewählt, daß die Zählrohrgruppe C um die durch A gehende Achse gedreht werden kann. Dadurch hat man die Möglichkeit, die Anzahl der Koinzidenzen für von 0 verschiedene Winkel φ zu bestimmen. Die Kurve in Abb. 375 stellt die Versuchsergebnisse dar. Auf der Abszissenachse sind die Winkel φ und auf der Ordinatenachse die Anzahl der Koinzidenzen abgetragen. Wie man aus der Abbildung sieht, hat die Kurve bei $\varphi = 0°$ ein scharfes Maximum und fällt bei $\varphi = \pm\, 1°$ fast auf Null. Dies beweist mit Nachdruck, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunkts keinen wesentlichen Einfluß (in den Grenzen des hohen Auflösungsvermögens der Anordnung) auf den

Winkel zwischen den Impulsen der Zerstrahlungsphotonen hat. Hieraus folgt wiederum, daß sich die Positronen mit langsamen Elektronen des Kupfers, d. h. mit Leitfähigkeitselektronen und nicht mit Elektronen der Ionenhülle, die das Metallgitter bilden, vernichten.

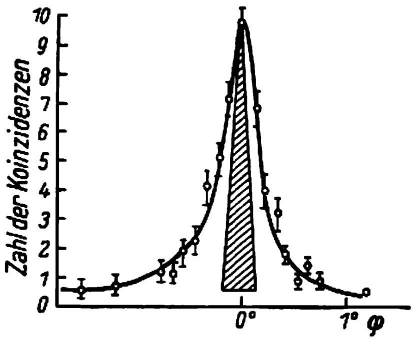


Abb. 375. Die Winkelverteilung der Impulse von Zerstrahlungsphotonen nach Wlassow und Dschelepow

C. Die radioaktiven Zerfallsarten

§ 284. α-Zerfall

Die Erklärung der Emission von α-Teilchen durch den Kern bereitet der klassischen Physik unüberwindliche Schwierigkeiten. Es zeigt sich vor allem, daß die Energie der α-Teilchen für alle natürlichen α-Strahler bedeutend kleiner als die Potentialwallhöhe des Kerns ist. Wir führen zwei Beispiele an.

1. Die Höhe des Potentialwalls ist beim $_{92}U^{238}$ für α-Teilchen gleich

$$B = 0{,}96 \cdot zZA^{-\frac{1}{3}} = 1{,}92 \frac{92}{6{,}28} = 28{,}1 \text{ MeV},$$

während die Energie der α-Teilchen des $_{92}U^{238}$ nur 4,2 MeV beträgt.

2. Die Höhe des Potentialwalls ist beim radioaktiven Samarium $_{62}Sm^{152}$ gleich 22 MeV, dagegen macht die Energie der α-Teilchen nur 2,0 MeV aus. Die sehr großen Halbwertszeiten dieser beiden α-Strahler (für U^{238} $T = 4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre, für Sm^{152} $T = 2{,}5 \cdot 10^{11}$ Jahre) weisen darauf hin, daß die Emission von α-Teilchen in diesen Fällen ein äußerst unwahrscheinlicher Prozeß ist. Man kann jedoch noch auf ein interessantes Beispiel hinweisen. Ein Zerfallsprodukt des Radiums, das $_{84}RaC'^{214}$, besitzt bei einer Wallhöhe von 26,5 MeV, die sich nur wenig von der des U^{238} unterscheidet, und einer α-Teilchenenergie von 7,365 MeV, die nur 1,75mal größer als die Energie der α-Teilchen des U^{238} ist, eine Halbwertszeit von 150 μsec. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist also 10^{21}mal größer als für U^{238}. Solche Verhältnisse sind vom Standpunkt der klassischen Physik aus absolut unverständlich.

Für die Quantenmechanik bilden derartige Eigenschaften der α-Strahler kein Rätsel. Das Herausfliegen eines α-Teilchens aus dem Kern ist ein typischer Fall des Tunneleffektes. Dieser Erscheinung sind wir schon früher des öfteren begegnet. Wir betrachten zunächst ein sehr grobes Modell dieses Prozesses. Ein α-Teilchen mit der Energie E befindet sich im

Feld des Restkerns. Es zeigt den Verlauf eines rechteckigen Potentialkastens von der Breite des Kernradius r_0 (Abb. 376). Den Wall der Breite d nehmen wir auch als rechteckig an. Nach Formel (145,13) (Teil I, § 145) beträgt die „Durchlässigkeit" des Walls D

$$D = e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U_0-E)}\,d}, \quad (U_0 = E).$$

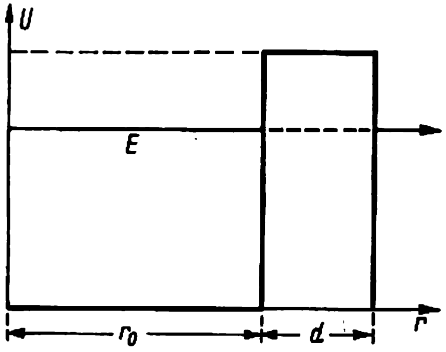


Abb. 376. Vereinfachtes Potentialmodell eines Kerns

Wie in allen Fällen, in denen wir es mit Tunneleffekten zu tun haben, hängt die Durchlässigkeit D sehr stark von den im Exponenten stehenden Größen ab. In unserem Falle sind die Energie der α-Teilchen und die Wallbreite d die Variablen. Um den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls und der Energie zu finden, gehen wir folgendermaßen vor. Wir stellen uns vor, daß sich das α-Teilchen zwischen den Wänden des Walls bewegt. Bei jedem „Stoß" mit der „Wand" hat es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, reflektiert zu werden und eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, durch den Wall hindurch nach außen zu gelangen. Die letztere Wahrscheinlichkeit ist offensichtlich gleich D. Die Gesamtwahrscheinlichkeit, in der Zeiteinheit aus dem Kern zu „entwischen", ist D und der Frequenz der Stöße n mit der Wand proportional. Diese Wahrscheinlichkeit ist auch die Zerfallskonstante λ:

$$\lambda = Dn. \tag{284,1}$$

n ist seinerseits gleich dem Kehrwert der vom α-Teilchen mit der Geschwindigkeit v benötigten Zeit, um von einer Wand zur anderen zu laufen, d. h., um eine dem Kernradius R_0 gleiche Entfernung zu durchqueren:

$$n = \frac{v}{R_0}. \tag{284,2}$$

Den Kernradius kann man größenordnungsgemäß der durch 2π dividierten De Broglie-Wellenlänge gleichsetzen:

$$R_0 = \frac{h}{2\pi M v},$$

woraus

$$v = \frac{h}{2\pi M R_0}$$

und

$$n = \frac{h}{2\pi M R_0^2} \tag{284,3}$$

folgt. Mit (284,1) und (284,3) erhalten wir

$$\lambda = \frac{h}{2\pi M R_0^2} e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2M}\sqrt{U_0 - E}\, d}. \tag{284,4}$$

Nach dieser Formel ist das GEIGER-NUTTALLsche Gesetz qualitativ verständlich. Aus (284,4) finden wir in der Tat

$$\ln \lambda = \ln \frac{h}{2\pi M R_0^2} - \frac{4\pi}{h}\sqrt{2M}\,(U_0 - E)^{\frac{1}{2}}\, d. \tag{284,5}$$

Hier kann man das erste Glied als konstant betrachten, da sich M und R_0 innerhalb einer gegebenen radioaktiven Familie kaum und der Logarithmus von $\frac{h}{2\pi M R_0^2}$ noch weniger ändern. Deshalb kann man die Formel (284,5) in der Form

$$\ln \lambda = A + f(E), \tag{284,6}$$

die dem GEIGER-NUTTALLschen Gesetz entspricht, schreiben.

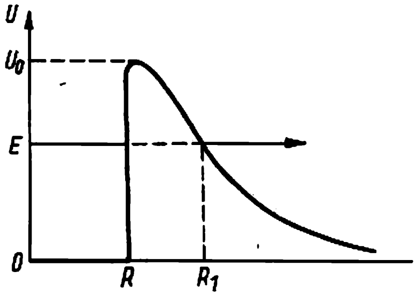


Abb. 377. Zur Theorie des α-Zerfalls

Ein quantitativ besseres Resultat erhält man, wenn man für den Potentialverlauf des Kerns die in Abb. 377 dargestellte Kurve wählt. Sie entspricht den experimentellen Ergebnissen wenigstens in ihrem äußeren Teil. In diesem Falle muß man für die Durchlässigkeit des Walls D den Ausdruck benutzen, der in Teil I, § 145, Formel (145,14) angegeben wurde:

$$D = e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2M}\int\limits_{R}^{R_1}\sqrt{U-E}\,dr}. \tag{284,7}$$

R bedeutet den Kernradius und R_1 die Abszisse des Schnittpunkts der Potentialkurve mit dem Energieniveau des α-Teilchens (Abb. 377). Das in Formel (284,7) enthaltene Integral kann berechnet werden. Man erhält dann einen Ausdruck für D und folglich auch für λ, der vom Kernradius R abhängt. Nach dieser Formel kann man die Werte für R aus bekannten Halbwertszeiten $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ berechnen. Man muß dabei für die verschiedenen radioaktive Elemente ähnliche Werte erhalten. Diese Prüfung der Theorie ist sehr streng, da sich die Halbwertszeit T schon bei sehr kleinen Änderungen von R um einen hohen Faktor ändert. Die Rechnung zeigt, daß sich R für die Glieder aller natürlich-radioaktiven Familien tatsächlich nur zwischen den Grenzen $8{,}2 - 9{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm ändert, während das Verhältnis der T-Werte im äußersten Fall von der Größenordnung 10^{14} ist.

Die außerordentlich starke Abhängigkeit des T von den Größen, die in den Exponenten der Formel (284,7) eingehen, erlauben eine Erklärung der Tatsache, daß keine Radioaktivität mit Emission von Protonen beobachtet wird. Die Höhe des Potentialwalls

$$B = \frac{zZe^2}{R}$$

(z ist die Ladung des ausgeschleuderten Teilchens) ist für Protonen nur halb so groß wie für α-Teilchen ($z = 2$). Deshalb besitzt das Integral

$$\int_R^{R_1} (U - E)^{\frac{1}{2}}\, dr$$

für angeregte Niveaus bei Protonen einen wesentlich kleineren Wert als bei α-Teilchen, und die Halbwertszeit T ist daher verschwindend klein (Größenordnung 10^{-12} sec). Derartige Radioaktivität läßt sich nicht beobachten, der Zerfall ist praktisch augenblicklich beendet.

§ 285. γ-Strahlen, die den α-Zerfall begleiten, und die Energieniveaus des Kerns

In vielen Fällen werden α-Strahlen in Form einiger Teilchengruppen mit bestimmten Energien ausgesandt. Dabei besitzt die Gruppe mit der Maximalenergie meist die größte Intensität, während die Teilchengruppen mit geringeren Energien weniger intensiv sind. In einigen seltenen Fällen werden jedoch neben der Hauptgruppe Gruppen von α-Teilchen mit bedeutend höherer Energie (α-Teilchen großer Reichweite) beobachtet. Zur genauesten Energiebestimmung dieser Gruppen von α-Teilchen verwendet man magnetische Spektrographen mit fokussierender Halbkreisablenkung (siehe Teil I, § 9). In Abb. 378 ist ein solches Korpuskelspektrum von α-Teilchen wiedergegeben. Die Schärfe der Linien dieses Spektrums zeugt von den streng definierten Energien der ausgesandten α-Teilchen, und dies läßt wiederum darauf schließen, daß die energetischen Kernniveaus vollkommen bestimmt sind.

Um die Feinstruktur im Energiespektrum der α-Teilchen und ihren Zusammenhang mit der γ-Strahlung zu verstehen, betrachten wir zunächst ein einfacheres α-Spektrum. Es wird vom Radium $_{88}Ra^{222}$ bei seiner Umwandlung in Radon $_{86}Rn^{218}$ ausgesandt. Die magnetische Analyse zeigt hier zwei Gruppen von α-Teilchen mit den Energien 4,793 und 4,612 MeV. Um in beiden Fällen die Zerfallsenergien zu finden, muß man zu den Energien der α-Teilchen

die Rückstoßenergien des entstehenden Kerns Rn^{218} hinzufügen. Man erhält so 4,879 und 4,695 MeV. Die Ursache für das Erscheinen dieser Gruppen liegt darin, daß sich der entstehende Radonkern beim Zerfall mit der Energie 4,879 MeV im Grundzustand und beim Zerfall mit 4,695 MeV in einem angeregten Zustand befindet. Die Energiedifferenz beträgt zwischen beiden Fällen 4,879 — 4,695 = 0,184 MeV. Man wird deshalb erwarten, daß das Radon γ-Quanten mit einer Photonenenergie von 0,184 MeV aussenden wird. Das Experiment zeigt, daß Radon tatsächlich γ-Strahlen der Energie 0,189 MeV aussendet. Dieser Energiebetrag fällt innerhalb der Fehlergrenze mit der erwähnten Energiedifferenz zwischen den beiden Fällen des α-Zerfalls zusammen. Auf Grund dieser Überlegungen kann man ein Schema für die Energieniveaus des Kerns $_{86}Rn^{218}$ aufstellen. Es ist in Abb. 379 dargestellt und ohne weitere Erklärungen verständlich.

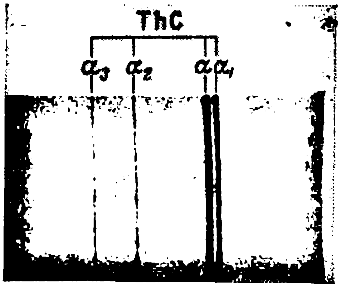


Abb. 378. Das Energiespektrum der α-Teilchen des ThC; es wurde mit einem magnetischen Spektrographen erhalten

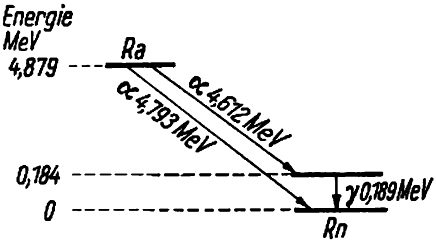


Abb. 379. Energieniveaus des Radons, die auf Grund einer Energieanalyse der α-Teilchen des Radiums gefunden wurden

Als zweites, schwieriges Beispiel betrachten wir die Umwandlung ThC → ThC''. Die magnetische Analyse der α-Strahlen des ThC lieferte fünf Gruppen von α-Teilchen mit folgenden Energien (es sind die Zerfallsenergien, d. h. die Energien der α-Teilchen zuzüglich der Energien der Rückstoßkerne aufgeführt).

Tabelle LIV

Gruppe	Energie in 10^6 eV	%
E_0	6,200	27,20
E_1	6,160	69,80
E_2	5,872	1,80
E_3	5,728	0,10
E_4	5,708	1,10

In der folgenden Tabelle sind die bekannten Energien der vom ThC'' ausgesandten γ-Quanten den Energiedifferenzen der α-Teilchen gegenübergestellt.

Tabelle LV

Energie des γ-Quants	Energiedifferenz der α-Teilchen MeV	Übergang
0,040	0,040	$E_1 - E_0$
0,327	0,328	$E_2 - E_0$
0,471	0,472	$E_3 - E_0$
0,287	0,288	$E_2 - E_1$
0,432	0,432	$E_3 - E_1$
0,451	0,452	$E_4 - E_1$

Die Energien der γ-Quanten und die Energiedifferenzen der α-Teilchen stimmen wieder sehr gut überein. Das auf Grund dieser Ergebnisse konstruierte Niveauschema des ThC″ mit Angabe der Übergänge ist in Abb. 380 dargestellt.

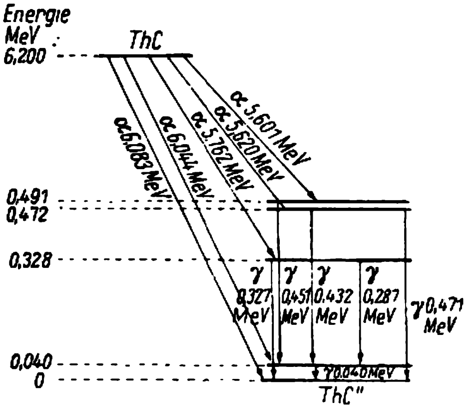


Abb. 380. Energieniveaus des ThC″, die man auf Grund der Feinstruktur des energetischen α-Spektrums vom ThC konstruiert hat

Wir betrachten jetzt die Entstehung der α-Teilchen großer Reichweite und ihren Zusammenhang mit der γ-Strahlung am Beispiel der α-Umwandlung ThC′ → ThD. In diesem Fall besitzt die Hauptgruppe der α-Teilchen (fast 100%) die Energie 8,778 MeV; es gibt jedoch noch zwei außerordentlich schwache Gruppen mit höheren Energien, und zwar 9,491 MeV (0,0034%) und 10,571 MeV (0,019%). Der Kern ThC′ entsteht aber seinerseits aus dem Kern ThC durch β-Umwandlung. Dabei gibt es vier Gruppen von β-Teilchen (ihre maximalen Energien sind in Abb. 381 zu finden). Daraus folgt, daß der Kern ThC′ beim Übergang ThC → ThC′ entweder im Grundzustand oder in einem angeregten Zustand entsteht. Bei der α-Umwandlung ThC′ → ThD entsteht aus dem Grundzustand des ThC′ die Hauptgruppe der α-Teilchen mit der Energie 8,778 MeV. Wenn der Kern ThC′ jedoch durch eine vorangegangene β-Umwandlung ThC → ThC′ im angeregten Zustand entsteht, kann die weitere Umwandlung ThC′ → ThD auf zwei Wegen erfolgen. Der Kern ThC′ kann entweder erst durch

γ-Strahlung in den Grundzustand übergehen und dann die Umwandlung ThC′ → ThD mit Ausstrahlung der Hauptgruppe der α-Teilchen mit 8,778 MeV erfahren, oder er kann vom angeregten Niveau des ThC′ aus direkt der α-Umwandlung unterliegen. Das α-Teilchen wird dann mit einer entsprechend größeren Energie ausgesandt. Man sieht, daß die Energiedifferenz des Zerfalls mit einem α-Teilchen langer Reichweite und des Zerfalls mit einem α-Teilchen der Hauptgruppe gleich der Energie des γ-Quants sein muß, das bei der Umwandlung des ThC′ ausgesandt wird, wenn diese Umwandlung in zwei Etappen vor sich geht. Das wird auch wirklich beobachtet, wenn man für die Rechnungen nicht nur einfach die Energien der α-Teilchen, sondern die Zerfallsenergien benutzt, d. h., wenn man auch die Energie des Rückstoßkerns berücksichtigt. Beispiele für solche Übereinstimmungen kann der Leser leicht der Abb. 381 entnehmen (zur Berechnung der γ-Quantenenergien durch

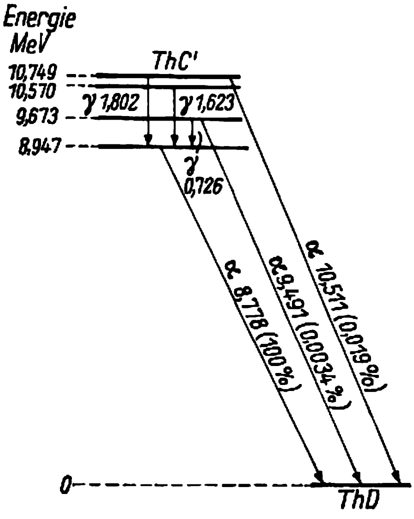


Abb. 381. Energieniveaus des ThC′, die man durch Analyse der α-Teilchen langer Reichweite konstruiert hat

Subtraktion ist die linke Skala zu benutzen, wo die Zerfallsenergien aufgetragen sind). Wir bemerken, daß der Energievergleich zwischen den α-Teilchen mit großer Reichweite und den α-Teilchen der Hauptgruppe gestattet, die Niveaus des Ausgangskerns (z. B. ThC′, aber nicht ThD) festzustellen, während die α-Teilchengruppen mit kleinerer Energie als die der Hauptgruppe Auskunft über die Niveaus des entstandenen Kerns liefern (im betrachteten Beispiel ThC″, aber nicht ThC).

§ 286. Der β-Zerfall

Wie schon gesagt wurde, besteht der β-Zerfall in der Umwandlung von Atomkernen unter Emission von negativen oder positiven Elektronen. Da es jedoch im Kern weder Elektronen noch Positronen gibt, ist die Umwandlung von Nukleonen das Charakteristische beim β-Prozeß. Beim β^--Zerfall verwandelt sich ein Neutron des Kerns in ein Proton, und beim

β^+-Zerfall geht ein Proton in ein Neutron über (siehe § 244). Zu den β-Prozessen gehört auch die Umwandlung eines Protons in ein Neutron, wobei der Kern kein Positron aussendet, sondern ein negatives Elektron aus seiner eigenen Elektronenhülle einfängt (sogenannter K-Einfang).

Das einfachste Beispiel für einen β^--Prozeß ist der β-Zerfall des freien Neutrons (siehe unten, § 297). β^--radioaktiv ist auch der Kern des überschweren Wasserstoffs Tritium H^3 oder T^3. Dieser Kern besteht aus einem Proton und zwei Neutronen. Bei der β^--Umwandlung des Tritiums, die mit der Halbwertszeit 12,1 Jahre vor sich geht, verwandelt sich einer der Neutronen in ein Proton, und es entsteht das stabile leichte Isotop des Heliums He^3; ein Elektron wird herausgeschleudert.

Das leichteste Isotop, das sich unter Ausstrahlung von Positronen umwandelt, ist das Kohlenstoffisotop $_6C^{10}$. Sein Kern besteht aus 6 Protonen und 4 Neutronen. Eine derartige Nukleonenkombination ist äußerst unbeständig, und $_6C^{10}$ unterliegt einem β^+-Zerfall mit der Halbwertszeit 19,1 sec. Es verwandelt sich dabei in das stabile Borisotop $_5B^{10}$, bei dem die Zahl der Protonen gleich der Zahl der Neutronen ist. Unbeständig in bezug auf den β^+-Zerfall ist auch das nächste Isotop des Kohlenstoffs $_6C^{11}$; es geht mit der Halbwertszeit 20,4 min in ein anderes Borisotop, $_5B^{11}$, über.

Das leichteste Isotop, das eine Umwandlung durch K-Einfang erfährt, ist schließlich $_4Be^7$. Durch Einfang eines K-Elektrons wird ein Proton des $_4Be^7$ in ein Neutron umgewandelt (Halbwertszeit 53 Tage), und es entsteht das stabile Lithiumisotop $_3Li^7$, das durch größte Häufigkeit gekennzeichnet ist (92,70%).

Aus dieser kurzen Übersicht der β-Umwandlungen leichter Kerne sehen wir, daß der β-Prozeß jedesmal auftritt, wenn es zwei isobare Kerne gibt, d. h., zwei Kerne, die aus der gleichen Nukleonenzahl bestehen und sich durch ihre Ladung um 1 unterscheiden. Der Prozeß führt dann natürlich immer zur Entstehung eines stabilen Isobars. Die sehr seltenen Ausnahmen, bei denen zwei ladungsmäßig benachbarte Isobare beide stabil sind, werden später betrachtet (§ 292). Wie wir sehen werden, ist in diesen Fällen die Stabilität der beiden Isobare nur eine scheinbare. In Wirklichkeit unterliegt ein Isobar einer β-Umwandlung, deren Halbwertszeit aber so groß ist, daß sie nicht immer festgestellt werden kann.

β-radioaktive Isotope sind im ganzen Periodischen System sowohl unter den leichten als auch unter den schweren Isotopen anzutreffen. Diese Art der Radioaktivität ist überhaupt die häufigste (siehe Tabelle der Isotope am Ende des Buches).

§ 287. Die β-Spektren

Bei der Untersuchung des Energiespektrums der β-Teilchen mit dem magnetischen Spektrographen, dessen magnetisches Querfeld homogen ist, wird eine charakteristische Besonderheit beobachtet, die die β-Spektren scharf von den α-Spektren trennt. Während die α-Spektren aus einer oder wenigen Teilchengruppen mit diskret verteilten Energien bestehen, sind die β-Spektren immer kontinuierlich. Dies zeigt, *daß die β-Teilchen mit allen möglichen Energien von einer bestimmten oberen Grenze ab emittiert werden.*

In den Abb. 382 und 383 sind Beispiele für typische β-Spektren angegeben, und zwar das Spektrum des radioaktiven Kaliumisotops K^{40} (nach B. S. Dschelepow, Kopjowa und Worobjow) und die Spektren des P^{30} und Al^{28} (nach A. I. Alichanow, A. I. Alichanjan und B. S. Dschelepow). Diese Spektren haben alle folgende charakteristische Besonderheiten: a) Es existiert eine Maximalenergie; die das Spektrum beschreibende Kurve nähert

sich nicht asymptotisch der Abszissenachse, sondern schneidet sie in einem Punkt, der der Maximalenergie der ausgesandten β-Teilchen entspricht; b) bei der Energie, die etwa einem Drittel der Maximalenergie entspricht, ist ein Maximum zu beobachten.

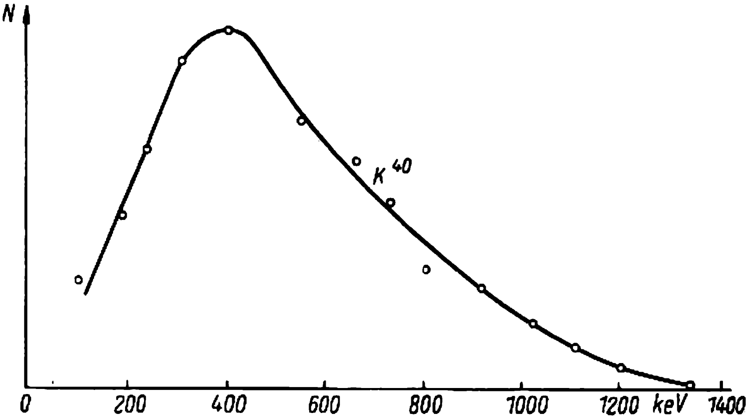


Abb. 382. β^--Spektrum des natürlich-radioaktiven Isotops K^{40}

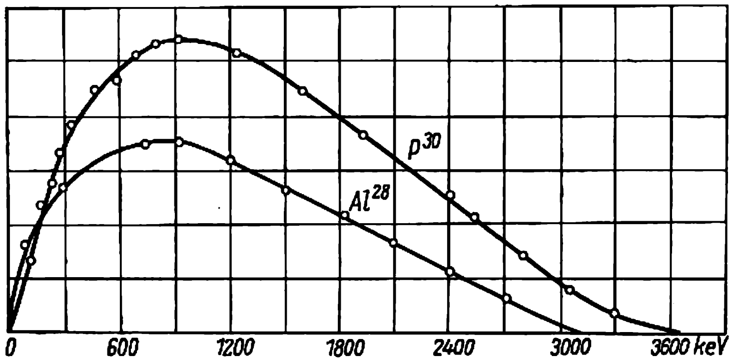


Abb. 383. Die β-Spektren des P^{30} und Al^{28}

Die Tatsache, daß das β-Spektrum kontinuierlich ist, schien sehr rätselhaft zu sein Es tauchte die natürliche Frage auf, warum die von den Kernen ausgesandten Elektronen alle möglichen Energien von Null ab besitzen, während die erstaunliche Bestimmtheit der energetischen Kernzustände, die z. B. beim α-Zerfall zu beobachten ist, ein wesentliches Charakteristikum der Kernphysik darstellt.

Zur Erklärung dieses seltsamen Paradoxons kann man verschiedene Hypothesen aufstellen:

1. Bei jeder β-Umwandlung werden zwei β-Elektronen ausgesandt, die zusammen die entsprechende Energie besitzen, diese aber unter sich willkürlich verteilen. Diese Hypothese

ist unhaltbar, da sich die Kernladung bei der β-Umwandlung um eine und nicht um zwei Einheiten ändert.

2. Die Elektronen werden mit einer bestimmten Energie emittiert. Diese Energie ist gleich der Differenz zwischen der Energie des Kerns vor und nach der Umwandlung, die Elektronen geben jedoch einen Teil ihrer Energie innerhalb des radioaktiven Präparats ab. Auch diese Hypothese wird durch genaue kalorimetrische Versuche widerlegt. Bei diesen Experimenten wurde das mit einem Bleimantel umschlossene Präparat (Radium *E*) in ein Kalorimeter mit dicken Kupferwänden gestellt und die Energieabgabe während eines bestimmten Zeitabschnitts gemessen. Da das Präparat mit einem Mantel, der für β-Strahlen undurchlässig war, umkleidet wurde, mußte man erwarten, daß die gesamte beim Zerfall freigewordene Energie im Innern des Mantels bleibt. Wenn die Hypothese richtig wäre, müßte die einem Zerfallsakt entsprechende mittlere Energie der Maximalenergie im β-Spektrum gleich sein. In Wirklichkeit zeigte es sich aber, daß diese Energie mit erstaunlicher Genauigkeit nicht mit der maximalen, sondern mit der mittleren Energie im kontinuierlichen β-Spektrum übereinstimmt.

Die beschriebenen kalorimetrischen Versuche, die von verschiedenen Forschern mit großer Genauigkeit vielfach wiederholt wurden, doch immer zum gleichen Ergebnis führten, schufen eine äußerst schwierige Lage. Es schien so, als ob damit ganz klar bewiesen sei, daß ein Teil der Energie irgendwohin verschwindet. Einige idealistische Physiker sprachen deshalb die Hypothese aus, daß der Energiesatz beim β-Zerfall nicht gilt. Diese Hypothese wird aber durch die Tatsache entscheidend widerlegt, daß bei keinem einzigen Prozeß, alle übrigen Kernreaktionen und die Wechselwirkungen zwischen Substanzen und Strahlung eingeschlossen, jemals eine Abweichung vom Energiesatz beobachtet wurde, sondern daß man ihn im Gegenteil immer mit allerhöchster Genauigkeit bestätigen konnte. Diese Hypothese wird ferner durch Tatsachen widerlegt, die unmittelbar mit den β-Spektren zusammenhängen. Hierher gehört vor allem die Existenz einer oberen Grenze des β-Spektrums. Wenn man die Energiedifferenz der Kerne vor und nach der β-Umwandlung bestimmt, so wird man vom Standpunkt des Energiesatzes aus unbedingt erwarten müssen, daß die Energie der β-Teilchen dieser Energie gerade gleich ist. Die Untersuchung der β-Spektren beweist, daß die der oberen Grenze entsprechende Energie diese Forderung genau erfüllt. Daneben gibt es jedoch auch Elektronen, die *kleinere* Energien besitzen, und solche Elektronen sind in einer ziemlich hohen Zahl anzutreffen. Wenn die Elektronen mit beliebigen Energien unabhängig vom Erhaltungsgesetz ausgesandt werden könnten, dann ist es unverständlich, warum sie nicht mit Energien emittiert werden, die größer sind als die der oberen Grenze entsprechende Energie. Mit anderen Worten, warum können sie nur Energie an eine unbekannte Stelle abgeben, diese aber nicht gewinnen?

Zu den Tatsachen, die den Energiesatz beim β-Zerfall bestätigen, gehören die energetischen Beziehungen in der sogenannten „Thoriumverzweigung“:

$$\mathrm{ThB} \xrightarrow{\beta} \mathrm{ThC} \begin{matrix} \overset{\beta}{\nearrow}\, \mathrm{ThC'}\, \overset{\alpha}{\searrow} \\ \underset{\alpha}{\searrow}\, \mathrm{ThC''}\, \underset{\beta}{\nearrow} \end{matrix} \mathrm{ThD}.$$

Die Summe der Energien, die beim Zerfall auf dem oberen Wege frei werden, muß offenbar gleich der Summe der Energien sein, die beim Zerfall auf dem unteren Wege frei werden, und diese beiden Summen müssen gleich der Differenz der Energien von ThC und ThD sein. Das Experiment zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn man annimmt, daß die

Energie der β-Umwandlung der *Maximalenergie* des β-Spektrums entspricht. Man erhält dann

$$\mathrm{ThC} \xrightarrow{\beta} \mathrm{ThC'} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{ThD}, \qquad E'_{\beta\,\max} + E'_{\alpha} \;= 11{,}20\,\mathrm{MeV},$$

$$\mathrm{ThC} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{ThC''} \xrightarrow{\beta} \mathrm{ThD}, \qquad E''_{\alpha} \quad + E''_{\beta\,\max} = 11{,}19\,\mathrm{MeV},$$

während die Bilanz gestört wird, wenn man für die Energie des β-Zerfalls die mittlere Energie einsetzt.

§ 288. Das Neutrino

Ein Ausweg aus der im vorigen Paragraphen beschriebenen schwierigen Situation wurde durch eine von PAULI vorgeschlagene Hypothese gezeigt. Danach wird bei jeder β-Umwandlung gleichzeitig mit dem β-Elektron noch ein anderes Teilchen, das keine Ladung trägt und eine bedeutend kleinere Masse als das Elektron besitzt, ausgesandt. Diese hypothetischen Teilchen wurden als *Neutrinos* bezeichnet. Dieser Name bedeutet „kleines Neutron" (siehe § 246). Da es eine verschwindende Masse und keine Ladung besitzt, wird das Neutrino fast garnicht von Substanzen absorbiert. Deshalb können es weder der Bleimantel des Präparats noch die dicken Kalorimeterwände zurückhalten. Aus diesen Gründen ist auch die unmittelbare Beobachtung des Neutrinos unmöglich. Es wurden Versuche angestellt, um die Ionisation, die von einem radioaktiven Präparat hervorgerufen wird, nachdem mit Sicherheit seine β-Strahlen alle absorbiert sind, zu beobachten. Zu diesem Zweck nahm man ein sehr starkes Präparat, das 5 g Radium enthielt und filtrierte die Strahlung mit einer Bleischicht bis zu 1 m Dicke. Die Versuche wurden tief unter der Erde durchgeführt, um ein Minimum der Ionisation durch Höhenstrahlen zu erreichen (siehe Kapitel XXIV). Diese Versuche und die damit zusammenhängenden Berechnungen bewiesen, daß die Ionisationsfähigkeit des Neutrinos, wenn es eine solche überhaupt besitzt, ganz geringfügig ist: nicht mehr als ein Ionenpaar auf 500 km Luftweg.

Abgesehen von der Nichterfüllung des Energiesatzes im *System Kern — β-Teilchen* sprechen noch indirekte Überlegungen sehr überzeugend für die Existenz eines dritten Teilchens, das beim β-Zerfall herausgeschleudert wird. In § 329 sahen wir, daß der Kernspin nur von der Massenzahl abhängt. Für gerade Massenzahlen ist der Spin immer ganzzahlig und für ungerade halbzahlig. Bei der β-Umwandlung bleibt die Massenzahl unverändert, folglich muß auch der Charakter des Spins erhalten bleiben. Da das β-Elektron aber den Spin $\frac{1}{2}$ mit sich fortführt, muß gleichzeitig mit ihm auch ein anderes Teilchen, das auch den Spin $\frac{1}{2}$ besitzt, ausgesandt werden. Hieraus folgt, daß die Schwierigkeit bezüglich des Spins auch völlig beseitigt wird, wenn man die Existenz des Neutrinos annimmt und diesem den Spin $\frac{1}{2}$ zuschreibt.

Obwohl die unmittelbare experimentelle Beobachtung des Neutrinos, z. B. durch eine Aufnahme seiner Spuren in der WILSON-Kammer, unmöglich ist, gibt es einen Weg zur experimentellen Bestätigung der Hypothese von der Existenz des Neutrinos: Die Untersuchung des Impulses der am β-Zerfall teilhabenden Teilchen. Das Wesen dieser Überlegungen besteht darin, daß sowohl beim Herausfliegen eines β-Teilchens als auch eines α-Teilchens der Kern einen Rückstoß erfährt. Wenn beim β-Zerfall nur ein Teilchen, das Elektron (oder Positron), herausgeschleudert wird, so muß der Impuls des Rückstoßkerns

nach dem Impulssatz dem Impuls des ausgesandten Teilchens gleich und entgegengerichtet sein, damit die Vektorsumme beider Impulse Null wird. Wenn aber beim β-Zerfall gleichzeitig zwei Teilchen, ein Elektron und ein Neutrino, ausgesandt werden, dann muß die Vektorsumme der Impulse des Elektrons, des Neutrinos und des Rückstoßkerns gleich Null sein (Abb. 384). Wir stellen uns jetzt vor, daß es uns gelungen sei, nicht nur die Energie des

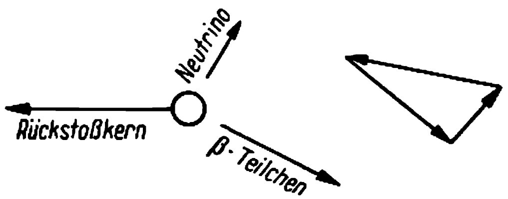


Abb. 384. Zum Impulssatz beim β-Zerfall mit Beteiligung des Neutrinos

β-Teilchens, sondern auch die Impulse des β-Teilchens und des Rückstoßkerns sowohl der Richtung als auch dem Betrage nach direkt zu messen. Wenn es sich dabei herausstellt, daß die Vektorsumme beider Impulse nicht gleich Null ist, d. h., daß der Kern, der das β-Teilchen ausschleudert, nach der Seite und nicht in die genau entgegengesetzte Richtung zum β-Teilchen gestoßen wird, dann ist das ein überzeugender Beweis für die Existenz des Neutrinos.

Versuche in dieser klaren Form sind jedoch äußerst schwierig, und erst in letzter Zeit (1948) wurden erfolgreiche Experimente ähnlicher Art zur Beobachtung des Neutrinos auf direktem Wege durchgeführt.

Bei anderen Versuchen wurde deshalb ein weniger direkter und entsprechend weniger überzeugender Weg zur Beobachtung des Neutrinos eingeschlagen. Man untersuchte nur die Energieverteilung der Rückstoßkerne. Aus den Kurven für die Energieverteilung der Elektronen (siehe die Kurven der Abb. 382 und 383) kann man nämlich die Kurve ihrer Impulsverteilung konstruieren, wenn man die Beziehung zwischen Impuls und Energie benutzt. Wenn nur zwei Teilchen am β-Zerfall beteiligt sind (Elektron und Rückstoßkern), muß die Kurve für die Impulsverteilung der letzteren parallel zur Kurve für die Impulsverteilung der Elektronen verlaufen, weil der Impuls des Rückstoßkerns in diesem Falle dem Impuls des Elektrons zahlenmäßig gleich sein muß. Wenn jedoch beim β-Zerfall außer dem Elektron noch ein drittes Teilchen, d. h. ein Neutrino, herausfliegt, dann muß sich die Kurve für die Impulsverteilung der Rückstoßkerne von der entsprechenden Kurve für die Elektronen unterscheiden, und deshalb die Kurve für die Energieverteilung eine andere sein. Wenn z. B. aus dem Kern nur ein Elektron herausfliegt, ist bei kleiner Energie des letzteren auch die Energie des Rückstoßkerns entsprechend klein. Wenn jedoch zusammen mit dem Elektron ein Neutrino herausfliegt, dann muß bei kleiner Energie des Elektrons die Energie des Neutrinos entsprechend groß sein, da die Energiesumme von Elektron und Neutrino konstant und gleich der oberen Grenze des β-Spektrums sein muß. Der Kern erhält dann einen größeren Rückstoß, der in diesem Falle hauptsächlich durch den Impuls des Neutrinos bedingt wird.

Das experimentelle Problem, die Energieverteilung langsamer Rückstoßkerne des β-Zerfalls zu untersuchen, ist nicht einfach. Ein erfolgreicher Weg zu seiner Lösung wurde zuerst von dem sowjetischen Physiker A. I. Leipunski gewiesen. Sein Versuch diente als Muster

für die folgenden experimentellen Arbeiten. Beim LEIPUNSKIschen Versuch wurde als β-Strahler die leichte künstlich-radioaktive Kohlenstoffisotop C^{11}, das Positronen aussendet, benutzt. Es ist offensichtlich, warum hier gerade leichte radioaktive Substanzen verwendet werden müssen. Die Masse des Elektrons ist im Vergleich zu der des Kerns klein, und deshalb erhält der Kern durch den Rückstoß eine um so größere Geschwindigkeit, je leicher er ist. Das Kohlendioxydgas beim Versuch von LEIPUNSKI enthält neben den $C^{12}O_2$-Molekülen als Beimischung auch eine geringe Anzahl von $C^{11}O_2$-Molekülen. Das Gas wurde an einer durch flüssige Luft gekühlten metallischen Oberfläche A (Abb.385) adsorbiert. Durch Emission

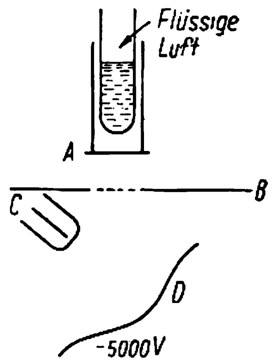


Abb. 385. Schema des Versuchs von LEIPUNSKI

von β-Teilchen erfuhren einige C^{11}-Kerne einen Rückstoß, der so gerichtet war, daß sie von der Oberfläche losgerissen wurden und in das umgebende Vakuum übergingen. Zwischen der metallischen Oberfläche und dem Gitter B wurde eine Potentialdifferenz angelegt, die die positiv geladenen Kerne (genauer: Ionen) bremste. Durch eine Veränderung dieses Bremspotentials konnte man die positiven Rückstoßionen, die das Bremsfeld zu überwinden vermochten, durch das Gitter hindurchfliegen lassen (siehe die analoge Methode für Elektronen, Teil I, §§ 87 bis 89). Zur Zählung dieser Ionen wurde folgendes Verfahren angewendet: An die Kathode D, die als Metallspiegel ausgeführt war, wurde ein negatives Potential von 5000 V zur Beschleunigung der positiven Ionen gelegt. Beim Aufprall an der Kathode lösten diese Ionen Sekundärelektronen aus, die durch das Potential von — 5000 V zwischen Kathode und GEIGER-Zähler C beschleunigt wurden. Der Zähler zählte diese Elektronen. Die Versuche von LEIPUNSKI, die einen halb qualitativen Charakter hatten, zeigten trotzdem, daß die Kurve für die Energieverteilung der Rückstoßkerne über der Elektronenverteilungskurve liegt, wie es auch zu erwarten war.

Für β-Strahler, die gleichzeitig Elektron oder Positron und Neutrino aussenden, war es jedoch sehr schwierig, klare Ergebnisse zu erzielen. Deshalb erwies sich der Vorschlag von A. I. ALICHANOW und A. I. ALICHANJAN, den K-Einfang zur Beobachtung des Neutrinos zu benutzen, als außerordentlich fruchtbar. Es zeigt sich, daß auch bei einem Prozeß, bei dem das Elektron nicht aus dem Kern herausgeschleudert, sondern von ihm absorbiert wird, das Herausfliegen eines Neutrinos aus dem Kern angenommen werden muß. Nach dem Impulssatz muß das eingefangene Elektron den Gesamtspin des Kerns ändern. Da aber die Massenzahl konstant bleibt, steht das dem uns schon bekannten Zusammenhang

zwischen der Massenzahl und dem Spin entgegen (siehe S. 463). Eine für das Experiment vorteilhafte Besonderheit der beim K-Einfang ausgeschleuderten Neutrinos besteht darin, daß sie alle die gleiche Energie besitzen. Beim gewöhnlichen β-Zerfall fliegen zwei Teilchen heraus, das Elektron und das Neutrino, zwischen denen auch die gesamte Zerfallsenergie verteilt wird. Beim K-Einfang ist es aber so, daß nur ein Teilchen, und zwar das Neutrino, mit der gesamten Zerfallsenergie *herausfliegt*. Deshalb müssen auch die Rückstoßkerne alle die gleiche Energie und den gleichen Betrag des Impulses haben. ALICHANOW und ALICHANJAN schlugen nun vor, diese für die Durchführung des Experiments außerordentlich günstige Eigenschaft der Rückstoßkerne des K-Einfangs auszunutzen. Nach ihrem Plan war der Versuch mit dem K-aktiven Berylliumisotop $_4Be^7$, d. h. mit einem der leichtesten Kerne des Periodischen Systems, durchzuführen.

Es ist nicht schwer, die Energie zu berechnen, die der Kern durch Emission des Neutrinos erlangen muß. Beim Einfang eines K-Elektrons durch den Kern $_4Be^7$ ändert sich seine Atomnummer um 1 Einheit, und es entsteht der Kern $_3Li^7$:

$$_4Be^7 + {_{-1}e_K} \rightarrow {_3Li^7} + \nu \qquad (T = 43 \text{ Tage}).$$

Es ist bekannt, daß die Masse des Be^7 größer als die Masse des Li^7 ist ($Be^7 = 7{,}01916$, $Li^7 = 7{,}01822$). Wenn man beachtet, daß der Kern Be^7 im gegebenen Fall ein Elektron seines eigenen Atoms absorbiert, ergibt sich die bei der Reaktion freiwerdende und vom Neutrino weggeführte Energie durch Multiplikation der Atommassendifferenz von Be^7 und Li^7 mit 931 [siehe § 244, Formel (244,3)]. Es ist also

$$E_\nu = (7{,}01916 - 7{,}01822) \cdot 931 = 0{,}00094 \cdot 931 = 0{,}87 \text{ MeV}.$$

Unter der Voraussetzung, daß seine Ruhemasse gleich Null ist, wird der Impuls des Neutrinos deshalb $p_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{0{,}87}{c}$ sein. Denselben Impuls besitzt der Rückstoßkern, während seine Energie

$$E_r = \frac{p_r^2}{2M} = \frac{p_\nu^2}{2M} = \frac{E_\nu^2}{2Mc^2}$$

beträgt, wobei M die Masse des Kerns Li^7, der durch den Elektroneneinfang entsteht, bedeutet. Danach erhält man für die Energie der Rückstoßkerne

$$E_r = 45 \text{ eV}.$$

Durch Einfang eines eigenen Elektrons müssen also Rückstoßkerne mit der Energie 45 eV entstehen. Diese Energie würden die Atome eines auf 450000° erwärmten Lithiumdampfes besitzen (1 eV = 10000°1).

Zum Nachweis dieser Rückstoßkerne benutzt ALLEN folgende Methode. Ein radioaktives Präparat des Be^7 wurde auf ein kleines Platinband A aufgetragen (Abb. 386). Da die Austrittsarbeit der Elektronen aus Platin bedeutend größer als das Ionisationspotential der Lithiumatome ist, wurde das Li^7 durch Rückstoß in Form von Ionen von dem Platinband losgerissen. Diese Ionen wurden durch ein Feld von 100 — 200 V zwischen A und Gitter B beschleunigt und fielen in den Raum zwischen den beiden Gittern B und C. An das Gitter C wurde ein veränderliches Bremspotential gelegt. Es ermöglichte, die Energieverteilung der Ionen zu bestimmen. Zu diesem Zweck mußte man die Anzahl der Ionen, die einen durch

das Gitter C gegebenen Energiebetrag überschritten, kennen. Wegen der geringen Stromstärke war es nicht möglich, den Ionenstrom zu messen. Man zählte deshalb die Ionen unmittelbar nach einer analogen Methode, wie sie LEIPUNSKI angewandt hatte. Man vervollkommnete sie aber in einigen Punkten. Beim LEIPUNSKIschen Versuch schlagen die Ionen aus dem Metallspiegel Sekundärelektronen heraus, die mit einem GEIGER-Zähler gezählt wurden. Beim Versuch von ALLEN wurde das Prinzip des Elektronenvervielfachers benutzt. Die aus der ersten Metallkathode durch Ionen herausgeschlagenen Elektronen flogen zur zweiten Kathode. Dort lösten sie wieder Elektronen aus, diese flogen zur dritten Kathode usw. Im ganzen wurden 11 Elektroden mit einer 18000fachen Gesamtverstärkung verwandt. Die nach der Vervielfachung erhaltenen Elektronen wurden mit einem GEIGER-Zähler gezählt.

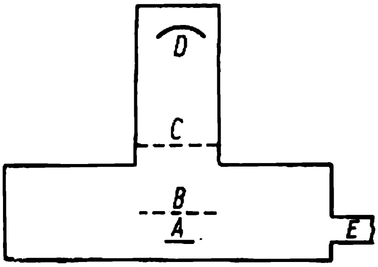


Abb. 386. Schema des Versuchs von ALLEN

Bei diesen Versuchen stellte es sich heraus, daß die Maximalenergie der Rückstoßionen den erwarteten Wert von 45 eV hat. Es existieren jedoch auch Ionen mit geringeren Energien. Den Energieverlust kann man durch den Arbeitsaufwand zum Ablösen der Ionen des Li^7 vom Platinband erklären. Deshalb kann man die quantitative Übereinstimmung zwischen den Rechnungen und den Versuchsergebnissen als befriedigend bezeichnen.

In weiteren Experimenten wurden erfolgreiche Untersuchungen zur direkten Bestimmung der Beziehung zwischen den Impulsen des β-Teilchens und des Rückstoßkerns nicht nur in bezug auf den Betrag, sondern auch der Richtung nach, unternommen. Der Erfolg dieser Versuche war durch die Möglichkeit, künstlich-radioaktive Substanzen in reiner Form herzustellen, bedingt. Bei den Versuchen von SHERVIN wurden die radioaktiven Stoffe $_{15}P^{32}$ und $_{39}Y^{90}$ auf eine entsprechende Unterlage in Form einer sehr dünnen Schicht, die in den günstigsten Fällen monoatomar war, aufgebracht. Dadurch wurde die Fehlerquelle, die mit der Bremsung der Rückstoßkerne im Präparat selbst zusammenhing, beseitigt. Die Versuchsanordnung ist in Abb. 387 dargestellt. Die aus der Quelle S herausgeflogenen β-Teilchen wurden mit einem GEIGER-Zähler G registriert. Die Zählrohrimpulse setzten dabei den Generator C, der auf dem Schirm des Kathodenstrahloszillographen K eine Hilfsablenkung in Form einer horizontalen Gerade erzeugte, in Gang. Die Rückstoßatome, die als Ionen von der Quelle abgerissen wurden, registrierte man wie bei den ALLENschen Versuchen mit einem Elektronenvervielfacher B, dessen Impulse man nach einer Verstärkung auf das andere Plattenpaar des Kathodenstrahloszillographen gab. Jeder Impuls, der die Ankunft eines Rückstoßelektrons im Vervielfacher anzeigte, gab also auf dem Schirm des Oszillographen eine Zacke auf der horizontalen Geraden der Hilfsablenkung. Da die Geschwindigkeit der Rückstoßionen im Vergleich zur Geschwindigkeit der β-Teilchen klein ist, kam das Signal des Vervielfachers später als das Signal des GEIGER-Zählers, und in Ab-

hängigkeit vom Betrag dieser Verspätung erschien die Zacke an dieser oder jener Stelle der Hilfsablenkung. Aus der Lage der Zacke konnte man also die Geschwindigkeit der Rückstoßionen unmittelbar bestimmen. Der GEIGER-Zähler konnte in vier Stellungen gebracht werden. Diese entsprachen vier verschiedenen Winkeln zwischen den Emissionsrichtungen des β-Teilchens und des Rückstoßions: 180°, 135°, 90° und 45°.

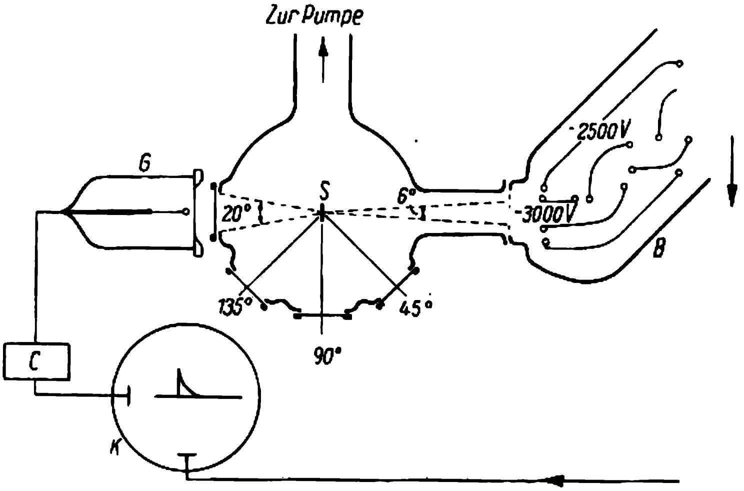


Abb. 387. Versuchsanordnung zum Studium des Rückstoßes beim β-Zerfall

Mit dieser Anordnung konnte man die Existenz des Neutrinos auf zwei Arten nachprüfen:

1. Wenn beim β-Zerfall nur ein Teilchen, d. h. ein Elektron oder ein Positron, herausfliegt, dann müssen die Ausflugsrichtungen des β-Teilchens und des Rückstoßions gerade entgegengesetzt liegen. Der Vervielfacher darf deshalb nur in der Zählrohrlage von 180° Impulse geben. Der Versuch zeigte jedoch, daß der Zähler eine weit über die Schranken zufälliger Fehler hinausgehende Anzahl Signale bei beliebigen Stellungen des Zählers bis zu 45° liefert. Das beweist direkt, daß beim β-Zerfallsakt nicht ein, sondern (mindestens) zwei Teilchen herausfliegen, wie es oben erklärt wurde.

2. Da die Anordnung erlaubte, unmittelbar die Geschwindigkeit der Rückstoßionen zu bestimmen, konnte man die theoretisch berechnete und die experimentell gefundene Impulsverteilung der Rückstoßionen für verschiedene Winkel quantitativ miteinander vergleichen. Dabei kann man für den Winkel 180° sowohl eine Verteilung mit Berücksichtigung des Neutrinos als auch unter der Annahme, das es nicht existiert, berechnen. Aus Abb. 388 ist ersichtlich, daß die Kurve, die man unter Annahme der Nichtexistenz des Neutrinos erhält, scharf von der experimentellen abweicht. Dagegen ist die Übereinstimmung mit der Kurve, die man unter Berücksichtigung des Neutrinos berechnet hat, sehr gut. Wie man aus dieser Zeichnung sieht, wird die Übereinstimmung nach kleineren Winkeln hin schlechter. Das größte Gewicht ist jedoch der Übereinstimmung gerade bei 180° zuzuschreiben, da die Rückstoßionen dann die größte Energie besitzen und die Energieverluste beim Losreißen der Rückstoßionen von der Oberfläche am kleinsten sind.

Man kann also behaupten, daß es heute überaus überzeugende Ergebnisse gibt (siehe auch § 287), die für die Existenz des Neutrinos sprechen, d. h. für eine genaue Erhaltung der Energie beim β-Zerfall.

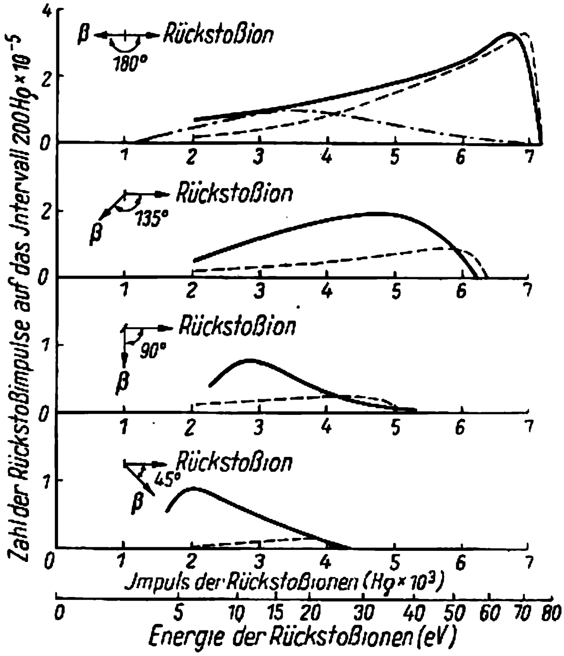


Abb. 388. Impulsverteilung der Rückstoßionen für die vier verschiedenen Stellungen des GEIGER-Zählers (die ausgezogene Kurve wurde nach den experimentellen Ergebnissen gezeichnet; die gestrichelte Kurve wurde unter der Voraussetzung berechnet, daß ein Neutrino existiert, und die strichpunktierte unter der Voraussetzung, daß das Neutrino nicht existiert)

Abschließend bemerken wir, daß die Masse des Neutrinos mit Hilfe einiger Kernreaktionen unmittelbar bestimmt werden kann. Die auf diesem Wege erhaltene Zahl ist jedoch mit einem Fehler behaftet, der 10- bis 20mal größer als die zu bestimmende Masse des Neutrinos ist. Deshalb ist bisher nur sicher, daß die Masse des Neutrinos jedenfalls bedeutend kleiner als die Elektronenmasse ist.

§ 289. Erlaubte und verbotene β-Prozesse

Die moderne Theorie des β-Zerfalls geht von der Tatsache aus, daß im Kern keine Elektronen und Positronen vorhanden sind. Nach dieser Theorie sind Neutron und Proton zwei verschiedene Quantenzustände desselben Elementarteilchens, des Nukleons. Der Aussendung eines β-Teilchens liegt also der Quantenübergang $p \to n$ oder $n \to p$ zugrunde. Dieser Übergang ähnelt der Aussendung eines Photons der Elektronenhülle beim Übergang zwischen zweien ihrer Quantenzustände. Der Unterschied zwischen beiden Prozessen besteht nicht nur darin, daß im ersten Fall ein Teilchen ausgesandt wird, das eine elektrische Ladung und

eine von Null verschiedene Ruhemasse besitzt, sondern auch darin, daß beim β-Prozeß zwei Teilchen ausgesandt werden, ein Elektron (oder Positron) und ein Neutrino. Die allgemeinen Züge beider Prozesse gestatteten jedoch FERMI, eine Theorie des β-Zerfalls aufzubauen, die in ihrer Art der Quantentheorie der Strahlung nahe steht. Obwohl die moderne Theorie des β-Zerfalls noch weit von der Vollendung entfernt ist, erweisen sich ihre qualitativen Grundlagen sehr nützlich, um die Erscheinungen des β-Zerfalls zu deuten.

Wir können uns hier nicht mit der Darstellung der Theorie des β-Zerfalls aufhalten, da das eine ausführliche Einführung in die Quantentheorie der Strahlung erfordert. Wir beschränken uns deshalb auf einige allgemeine Bemerkungen. In den §§ 191 und 192 haben wir gesehen, daß die Strahlungswahrscheinlichkeit hauptsächlich durch das Quadrat (genauer durch das Quadrat des absoluten Betrages) eines gewissen Integrals, des Matrixelements, bestimmt wird. Für Dipolstrahlung hat es die Form

$$D_{nm} = e x_{nm} = \int \psi_n^* (e x)\, \psi_m \, d\tau ,$$

wo ψ_n und ψ_m die Eigenfunktionen des Anfangs- und Endzustands und ex das Dipolmoment sind. In der Theorie des β-Zerfalls wird die Wahrscheinlichkeit eines „Quantenübergangs" mit Emission eines β-Teilchens und eines Neutrinos in Analogie dazu auch durch ein bestimmtes Matrixelement beschrieben. Die Auswahl dieses Matrixelements stellt hier ein viel schwierigeres Problem als bei der Emission von Photonen dar. Gewöhnlich entwickelt man den Integranden im Matrixelement in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{2\pi R}{\lambda}$, wo R den Kernradius und λ die DE-BROGLIE-Wellenlänge des ausgesandten Teilchens bedeuten. Wenn das erste Glied dieser Reihe von Null verschieden ist, dann bezeichnet man den Übergang als „erlaubt". Ist aber das erste Glied gleich Null, dann wird die Übergangswahrscheinlichkeit durch das zweite, dritte oder allgemein durch das erste von Null verschiedene Glied der Reihe bestimmt. Im letzten Falle heißt der Übergang „verboten". Dabei spricht man, je nachdem, mit welchem von Null verschiedenen Glied die Reihe beginnt, von einem Verbot erster, zweiter, dritter usw. Ordnung. Da sich aufeinander folgende Glieder der Reihe wie die Quadrate der Größen $\frac{2\pi R}{\lambda}$ verhalten und für den Kern $\frac{2\pi R}{\lambda} \sim 0{,}01$ gilt, unterscheiden sich entsprechend auch die Übergangswahrscheinlichkeiten und folglich auch die Lebensdauern der verbotenen Übergänge verschiedener Ordnung. Dadurch ist eine Möglichkeit gegeben, die verschiedenen Halbwertszeiten des β-Zerfalls zu erklären.

Eine eingehendere Betrachtung der Matrixelemente erlaubt, „Auswahlregeln" (siehe §§ 193 und 235) aufzustellen, d. h. diejenigen Änderungen der Quantenzahlen anzugeben, für die eine β-Umwandlung entweder erlaubt ist oder einem Verbot bestimmter Ordnung unterliegt. Diese Auswahlregeln sind ein wenig verschieden, je nachdem, wie im Matrixelement die Form der Wechselwirkung zwischen dem Nukleon und den beiden emittierten Teilchen gewählt wird (es sind insgesamt fünf verschiedene Formen der Wechselwirkungsfunktion möglich). In allen Fällen wird jedoch die Übergangswahrscheinlichkeit durch die Änderung der Quantenzahl des Kernspins ΔI und die Symmetrieeigenschaft der Wellenfunktionen, die man als ihre „Geradheit" (bzw. „Ungeradheit") bezeichnet, bestimmt. Eine Wellenfunktion $\psi\,(x, y, z)$ ist gerade, wenn die Funktion bei Änderung der Vorzeichen aller Koordinaten ihr Vorzeichen behält, im entgegengesetzten Falle ist die Funktion ungerade. In der Gleichung

$$\psi\,(x, y, z) = \pm\, \psi\,(-x, -y, -z)$$

gilt also das obere Zeichen für eine gerade und das untere für eine ungerade Funktion. Der allgemeine Ausdruck des Matrixelements ist

$$\int \psi_i^* m \psi_f d\tau,$$

wo ψ_i und ψ_f die Wellenfunktionen des Anfangs- bzw. des Endzustands und m die erwähnte Wechselwirkungsfunktion sind. Es ist offensichtlich, daß das Integral nur dann von Null verschieden ist, wenn es sich um eine gerade Integrandenfunktion handelt. Für die einfachste Form der Wechselwirkung ist m gleich 1, und die Wellenfunktionen kann man als Produkte der Koordinaten- mit den Spinfunktionen darstellen. Unter diesen Bedingungen ist das Integral von Null verschieden, wenn sich der Spin beim Quantenübergang nicht ändert und die Koordinateneigenfunktionen entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Hieraus ergibt sich eine Auswahlregel für einen erlaubten Übergang:

$$\Delta I = 0, \text{ die Symmetrie bleibt unverändert.}$$

Es zeigt sich jedoch, daß beim β-Zerfall Beispiele existieren, die auf Grund der Lebensdauer zu den erlaubten zu rechnen sind, bei denen sich jedoch der Spin um ± 1 ändert. Entsprechende Auswahlregeln erhält man bei anderer Wahl der Wechselwirkungsfunktion. Sie sehen folgendermaßen aus: Für einen erlaubten Übergang gilt

$$\Delta I = \begin{cases} +1 \\ 0, & \text{die Symmetrie bleibt unverändert (der Übergang } 0 \to 0 \text{ ist verboten).} \\ -1 \end{cases}$$

Diese Auswahlregeln erklären viele Tatsachen; es gibt jedoch einige experimentelle Ergebnisse, denen sie widersprechen. Die Frage nach der Form der Wechselwirkung und nach der allgemeinsten Form der Auswahlregeln beim β-Zerfall kann man deshalb nicht als endgültig gelöst betrachten.

Wenn die Auswahlregeln nicht erfüllt sind, ist der β-Zerfall „verboten“. Das bedeutet nur, daß die Zerfallswahrscheinlichkeit wesentlich geringer als beim „erlaubten“ Zerfall ist. Dabei verringert sich die Wahrscheinlichkeit in jeder Verbotsordnung um etwa das 100fache, so daß der Zerfall beim Verbot 1. Ordnung 100mal weniger wahrscheinlich als der „erlaubte“, beim Verbot 2. Ordnung 10^4mal usw. ist.

§ 290. Die Radioaktivität unter Emission eines Positrons und der K-Einfang

Wir betrachten jetzt einige Besonderheiten der β-Radioaktivität unter Emission eines Positrons, d. h. des β^+-Zerfalls. Wir beginnen mit energetischen Betrachtungen. Den Prozeß, der beim gewöhnlichen β^--Zerfall abläuft, kann man schematisch in der Form

$$Z^A \to (Z+1)^A + \beta^- + \nu \tag{290,1}$$

darstellen; hier bedeuten Z die Kernladung und A die Massenzahl. Wir erhalten offensichtlich die Maximalenergie im β-Spektrum, wenn wir von der Masse des Kerns Z^A die Summe der Massen des Kerns $(Z+1)^A$ und des Elektrons m_e abziehen (die Masse des Neutrinos

kann man vernachlässigen). Wie bei den Kernreaktionen ist es jedoch auch hier bequemer, die Atommassen, in denen neben den Kernmassen auch die Massen der Elektronen enthalten sind, zu benutzen. Man sieht leicht, daß es bei dem Prozeß (290,1) zur Berechnung der Energie des β-Elektrons ausreicht, die Masse des Atoms $(Z+1)^A$ von der Masse des Atoms Z^A abzuziehen. Obwohl das Atom $(Z+1)^A$ in seiner Hülle ein Elektron mehr als das Atom Z^A enthält, steht auf der rechten Seite des Schemas (290,1) die Masse des β-Elektrons, die wir also in die Masse des Atoms $(Z+1)$ einbeziehen. Diese Überlegung wird durch eine einfache Rechnung bestätigt. Die Masse des Kerns auf der linken Seite von (290,1) ist $M_Z - Zm_e$. Die Masse des Kerns auf der rechten Seite beträgt $M_{Z+1} - (Z+1)m_e$. Die Energie ist deshalb gleich

$$\Delta E = M_Z - Zm_e - M_{Z+1} + (Z+1)\,m_e - m_e = M_Z - M_{Z+1}, \qquad (290,2)$$

wie zu beweisen war.

Bei der Radioaktivität mit Emission eines Positrons liefert das Schema des Prozesses

$$Z^A \rightarrow (Z-1)^A + \beta^+ + \nu \qquad (290,3)$$

ein etwas anderes Resultat. Das Atom $(Z-1)^A$ enthält nämlich 1 Elektron weniger als das Atom Z^A, und außerdem steht auf der rechten Seite des Schemas noch die überschüssige Masse des Positrons. Man muß also bei der Energiebestimmung von der Differenz der Atommassen noch die doppelte Elektronenmasse abziehen. Die Rechnung, die keiner Erklärung bedarf, liefert dasselbe:

$$\Delta E = (M_Z - Zm_e) - [M_{Z-1} - (Z-1)\,m_e] - m_e = M_Z - M_{Z-1} - 2m_e. \qquad (290,4)$$

Wir betrachten ein Beispiel: Das Siliziumisotop $_{14}Si^{27}$ ist β^+-radioaktiv:

$$_{14}S^{27} \rightarrow {}_{13}Al^{27} + \beta^+ .$$

Es gilt hier

$$\begin{array}{rl} & Si^{27} = 26{,}9949 \\ - & Al^{27} = 26{,}9899 \\ - & 2m_e = \;\;0{,}00109 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta E = 4 \cdot 10^{-3}\,ME \cdot 931\,\frac{\text{MeV}}{ME} = 3{,}6\ \text{MeV}.$$

Die direkte Bestimmung der Maximalenergie der Positronen liefert in diesem Falle 3,57 bis 3,74 MeV.

Aus dem Gesagten folgt, daß der β^+-Prozeß nur dann möglich ist, wenn die Masse des Atoms Z^A die Masse des Atoms $(Z-1)^A$ mindestens um den Betrag übertrifft, der der Energie 1 MeV ($= 2m_e c^2$) entspricht. Der physikalische Grund dafür wird völlig klar, wenn wir uns der „Löchertheorie" des Positrons zuwenden. Die β^+-Radioaktivität kommt nämlich durch die Umwandlung eines Protons in ein Neutron zustande

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu. \qquad (290,5)$$

Es ist jedoch offensichtlich, daß dieselbe Umwandlung durch einen anderen Prozeß

$$p + e^- \rightarrow n + \nu \qquad (290,6)$$

ermöglicht wird. Das Elektron kann aus dem überall vorhandenen „Untergrund", der aus Elektronen mit negativer Energie besteht, eingefangen werden. In diesem Falle muß zuerst ein Elektron des „Untergrundes" in das Gebiet positiver Energien überführt werden. Dazu sind gerade 1 MeV ($= 2m_e c^2$) erforderlich. Das im Untergrund zurückbleibende „Loch" ist das Positron des Zerfalls.

Es kann aber ein Elektron, das sich im Gebiet positiver Energien befindet, eingefangen werden. Da sich die K-Elektronen dauernd in der Nähe des Kerns aufhalten, ist der Einfang eines K-Elektrons durch den Kern mit der Umwandlung eines Kernprotons in ein Neutron möglich. In diesem Fall nimmt das Schema (290,6) die Gestalt

$$p + e_K^- \rightarrow n + \nu \qquad (290,7)$$

an, wo e_K^- das K-Elektron der Hülle bedeutet. Wenn ein solcher Prozeß abläuft, verringert sich die Kernladung offensichtlich um 1. Die Massenzahl bleibt die alte, und die Umwandlung läuft nach dem Schema

$$Z^A \rightarrow (Z-1)^A + \nu \qquad (290,8)$$

ab.

Man sieht leicht, daß das einzige Teilchen, das bei der Umwandlung nach dem Schema (290,8) ausgesandt wird, das Neutrino ist. Es ist den gewöhnlichen einfachen Beobachtungsmethoden unzugänglich. Nun taucht die Frage auf: Wie kann man sich von der Existenz eines derartigen Prozesses überzeugen? Die Antwort beruht auf folgender Überlegung: Wenn der Kern ein K-Elektron einfängt, dann wird in der K-Schale ein Platz frei, der von einem Elektron, das aus der L-Schale stammt, aufgefüllt wird. Dabei muß die charakteristische K-Strahlung ausgesandt werden, und da der Umbau in der Elektronenhülle mit großer Schnelligkeit erfolgt, muß die Röntgen-K-Strahlung nicht zum Ausgangsatom Z^A, sondern zum Endatom der Umwandlung $(Z-1)^A$ gehören, d. h. zu dem Atom, das dem Ausgangsatom im Periodischen System der Elemente vorangeht. Die Energie des ausgesandten Photons ist dabei gleich $K - L$, wo K und L die Ionisationsenergien des Atoms bezüglich der K- und L-Schale sind.

In § 233 haben wir jedoch gesehen, daß an Stelle der charakteristischen K-Strahlung aus der L-Schale ein Auger-Elektron mit der kinetischen Energie

$$eV = K - 2L$$

ausgesandt werden kann. Anzeichen, mit deren Hilfe die Existenz des K-Einfangs festgestellt werden kann, sind also die Entstehung der weichen Röntgen-K-Strahlung des Elements, das dem sich umwandelnden vorangeht, und die Auger-Elektronen. Diese beiden Merkmale erlaubten, den K-Einfang in vielen Fällen festzustellen.

Als Beispiel für das Auftreten von Auger-Elektronen beim K-Einfang betrachten wir die β-Umwandlung des Kupferisotops $_{29}Cu^{64}$. Die Kerne des Cu^{64} erleiden alle möglichen Arten der β-Umwandlung: 54% der Kerne werden durch K-Einfang umgewandelt, 31% erfahren β^-- und 15% β^+-Umwandlung. Wir haben es hier mit einem Fall zu tun, bei dem

β^+-Umwandlung und folglich auch K-Einfang möglich ist; der K-Einfang erweist sich aber als bedeutend wahrscheinlicher. In Abb. 389 ist das Energiespektrum der negativen Elektronen des Cu^{64} dargestellt. Wir sehen hier das breite Gebiet des kontinuierlichen Spektrums, dem sich im Bereich der kleinsten Energien (bei 7 keV) eine scharfe Linie monoenergetischer Elektronen überlagert. Diese Linie ist gerade das Spektrum der AUGER-Elektronen des $_{28}Ni^{64}$, die beim K-Einfang im $_{29}Cu^{64}$ entstehen.

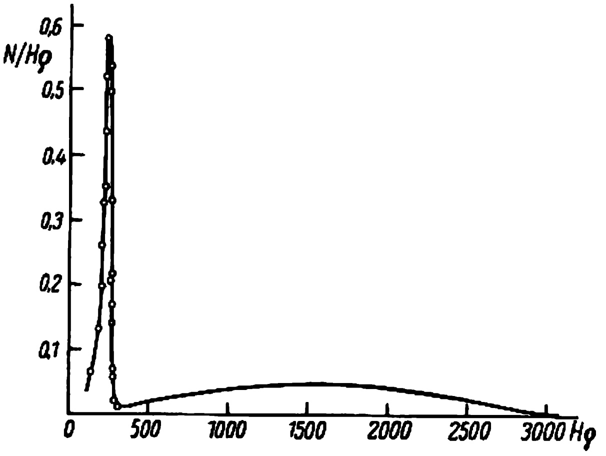


Abb. 389. Das Spektrum der negativen Elektronen des radioaktiven Kupfers Cu^{64}

Ein anderes interessantes Beispiel für den K-Einfang ist die β-Umwandlung des Vanadiumisotops $_{23}V^{49}$. Diese Substanz wandelt sich mit einer Halbwertszeit von 600 Tagen um; sie geht dabei in das stabile Titanisotop $_{22}Ti^{49}$ über. Hier werden weder Elektronen, noch Positronen, noch γ-Strahlen ausgesandt. Die einzige Strahlung, die die Umwandlung des V^{49} begleitet, ist eine weiche, monochromatische Röntgenstrahlung, deren Wellenlänge (2,7 Å) mit der Wellenlänge der charakteristischen K-Strahlung des Titans (und nicht des Vanadiums) zusammenfällt. Damit ist bewiesen, daß sich das V^{49} durch K-Einfang umwandelt. Dieses Beispiel ist auch vom historischen Gesichtspunkt aus interessant, da durch ALVAREZ 1938 gerade für die Umwandlung des V^{49} die Existenz des K-Einfangs bewiesen wurde.

Der leichteste Kern, der K-Einfang erfährt, ist $_4Be^7$. Bei der Umwandlung des Be^7, die durch K-Einfang mit einer Halbwertszeit von 53 Tagen erfolgt, entsteht das stabile Lithiumisotop $_3Li^7$, das eine Häufigkeit von 92,7% besitzt. Der Kern des Li^7 entsteht jedoch dabei nicht im Grund-, sondern in einem angeregten Zustand. Beim Übergang in den Grundzustand sendet er γ-Strahlen mit der Energie 0,453 MeV aus. Die Umwandlung des Be^7 wird also von einem K-Einfang und γ-Strahlen-Emission begleitet.

Bis jetzt haben wir ausschließlich den Einfang von K-Elektronen, d. h. von Elektronen mit verschwindendem Impulsmoment, die zur Schale mit der Hauptquantenzahl 1 gehören, betrachtet. Es gibt aber auch in der L-Schale (2s-Elektronen), M-Schale (3s-Elektronen) usw. Elektronen mit verschwindendem Impulsmoment. Theoretisch ist der Einfang eines Elektrons mit verschwindendem Moment aus einer beliebigen Schale möglich; die

Einfangswahrscheinlichkeit sinkt jedoch schnell mit größerer Hauptquantenzahl, da die Elektronen der K-Schale sich am längsten in unmittelbarer Kernnähe aufhalten. Beim Be^7 wurde tatsächlich neben dem K-Einfang experimentell der Einfang von L-Elektronen, aber mit bedeutend geringerer Wahrscheinlichkeit und mit entsprechend größerer Halbwertszeit, beobachtet. Obwohl der Einfang von Elektronen aus einer beliebigen Schale der Atomhülle prinzipiell möglich ist, bleibt die Bezeichnung „K-Einfang" dem Wesen der Sache nach also gerechtfertigt.

Zum Schluß untersuchen wir noch die Frage, warum beim Wasserstoffatom kein K-Einfang beobachtet wird. Ein solcher Prozeß würde zur spontanen Umwandlung der Wasserstoffatome in Neutronen führen, was in Wirklichkeit nicht beobachtet wird. Die Antwort auf die Frage besteht darin, daß der K-Einfang in diesem Falle energetisch unmöglich ist. Da die Masse des Neutrons größer als die Summe der Massen des Protons und Elektrons ist, erweist sich nämlich in diesem Falle ΔE nach Formel (290,9) als negativ. Der Einfang eines Elektrons, das eine genügend große kinetische Energie besitzt, durch ein freies Proton ist energetisch möglich, aber wenig wahrscheinlich, da sich das beschleunigte Elektron nur kurze Zeit in der Nähe des Protons aufhält.

§ 291. Einfache und komplexe β-Spektren

Wenn die β-Umwandlung vom Grundzustand des Ausgangskerns ausgeht und auch zum Grundniveau des Folgekerns führt, nennt man das entstehende Spektrum einfach. Die Differenz der Energieniveaus, zwischen denen der Zerfall vor sich geht, ist gleich der kinetischen Energie des β-Teilchens plus der Ruheenergie des Elektrons (0,51 MeV).

In vielen Fällen führt jedoch die β-Umwandlung zu einem angeregten Niveau des Folgekerns. Der Übergang zum Grundzustand vollzieht sich dabei unter Emission eines γ-Quants, dessen Energie die Entfernung des Grund- vom angeregten Zustand des Folgekerns zu ermitteln gestattet (Beispiel: der Zerfall des $_{11}Na^{22}$ in Abb. 390). Mitunter wird ein ganzes Spektrum der γ-Strahlen ausgesandt. Es weist auf die Existenz einer Reihe angeregter Zwischenniveaus hin (Beispiel: der β^--Zerfall des $_{11}Na^{24}$). Bei den β^+-Umwandlungen kann ein Teil der Kerne, wie wir schon gesehen haben, mit der Aussendung von Positronen zerfallen, während sich die übrigen durch K-Einfang umwandeln. Diese beiden Übergänge führen zum gleichen Niveau des Folgekerns. Dieses Niveau kann seinerseits angeregt sein, und die weiteren Übergänge mit γ-Strahlung führen schließlich zum Grundzustand. Ein Beispiel für ein solches komplexes Zerfallsschema liefert uns die Umwandlung $_{25}Mn^{52} \to {}_{24}Cr^{52}$ (siehe Abb. 390).

In einigen Fällen existieren bei der β^--Umwandlung zwei Zerfallsmöglichkeiten, von denen jede zu einem bestimmten Energieniveau des Folgekerns führt. Als Beispiel kann der β^--Zerfall des $_{26}Fe^{59}$ dienen: 50% seiner Kerne zerfallen mit der Maximalenergie im β-Spektrum von 0,26 MeV, und die übrigen 50% schleudern beim Zerfall β-Teilchen mit der Maximalenergie 0,46 MeV aus. Bei der Umwandlung werden gleichzeitig γ-Strahlen, deren Spektrum aus zwei Linien mit den Energien 1,10 und 1,30 MeV besteht, ausgesandt. Die Differenz dieser Energien von 0,2 MeV stimmt mit der Differenz der kinetischen Energien der β-Teilchen $0{,}46 - 0{,}26 = 0{,}2$ MeV überein. Diese Tatsache führt zu dem in Abb. 390 dargestellten Schema. In dieser Zeichnung ist als weiteres Beispiel die analoge Umwandlung $_{53}I^{130} \to {}_{54}Xe^{130}$ angegeben und nach dem Gesagten ohne weitere Erklärung verständlich.

Wir sehen also, daß die β-Spektren ebenso wie die α-Spektren eine Feststellung der Energieniveaus des Kerns erlauben. Da bei den β-Spektren gleichzeitig zwei Teilchen

(Elektron oder Positron und Neutrino) herausgeschleudert werden, muß man zur Niveaubestimmung die *maximalen* Energien im β-Spektrum heranziehen.

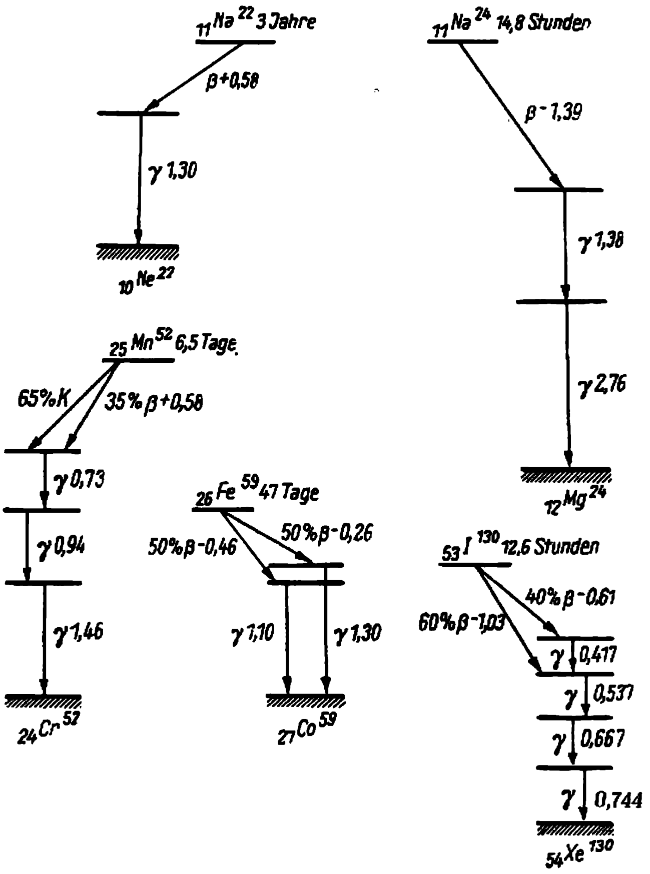


Abb. 390. Einfache und komplexe β-Spektren. Energieniveaus und Zerfallschemata. β^- bedeuten negative Elektronen und β^+ Positronen. K bezeichnet den Einfang eines K-Elektrons. Es sind die Halbwertszeiten des Zerfalls sowie die Energien der β-Teilchen und γ-Quanten in MeV angegeben

§ 292. Die Stabilität der Isobare

Es wurde schon mehrfach darauf hingewiesen, daß sich die stabilen Isobare in der Atomnummer gewöhnlich um 2 Einheiten unterscheiden. Wenn es zwei Isobare gibt, von denen eines stabil ist, und wenn ferner die Differenz der Kernladung dieser Isobare 1 beträgt, muß das zweite Isobar unbedingt β-radioaktiv sein, wobei die Umwandlung zu dem stabilen Isobar führt. Es ist klar, daß von zwei solchen Isobaren dasjenige radioaktiv ist, dessen genaue Atommasse entsprechend größer ist.

Früher wurde auch erwähnt, daß einige Paare und Tripel von stabilen Isobaren mit Atomzahlen, die sich um 1 unterscheiden, als seltene Ausnahmen existieren. Die Erklärung dieser Tatsache besteht darin, daß es sich hier um scheinbare Ausnahmen handelt. Eins dieser Isobare ist nämlich β-radioaktiv; sein β-Zerfall gehört jedoch zu den stark verbotenen und zeichnet sich deshalb durch eine sehr große Lebensdauer aus. Die Empfindlichkeit der gegenwärtigen experimentellen Methoden erweist sich für die Beobachtung der Radioaktivität als unzulänglich.

Daß der β-Zerfall der „stabilen" Isobare tatsächlich stark verboten sein muß, ist eine unmittelbare Folge der sehr verschiedenen Spingröße der isobaren Kerne. Betrachten wir z. B. das Isobarentripel ${}_{18}Ar^{40} \rightarrow {}_{19}K^{40} \rightarrow {}_{20}Ca^{40}$. Die Spinquantenzahlen sind

Isobar	Ar^{40}	K^{40}	Ca^{40}
Spin	0	4	0

Wir sehen, daß sich die Spins benachbarter Isobare um 4 Einheiten unterscheiden. Der Zerfall ist deshalb in der 4. Ordnung verboten, und man darf erwarten, daß seine Halbwertszeit von der Größenordnung $(10^2)^4 = 10^8$ Jahre ist. Die Radioaktivität des K^{40} wurde tatsächlich festgestellt. Es ist in diesem Zusammenhang bemerkenswert, daß das K^{40} einen komplexen Zerfall erleidet. Ein Teil der Kerne wird unter Emission eines β^--Elektrons in das stabile Ca^{40} verwandelt, während die anderen durch K-Einfang in das stabile Ar^{40} übergehen. Die Halbwertszeit der Umwandlung ist in beiden Fällen von der Größenordnung 10^9 Jahre. Diese große Halbwertszeit ist auch der Grund dafür, daß das K^{40}, dessen Vorrat nicht durch irgend einen vorangehenden Zerfall aufgefüllt wird, noch auf der Erde anzutreffen ist, wenn auch in sehr kleinen Mengen.

Als anderes Beispiel kann das Paar ${}_{37}Rb^{87} \rightarrow {}_{38}Sr^{87}$ dienen. Die Spindifferenz ist hier gleich 3 (Spin des Rb^{87} — $\frac{3}{2}$, Spin des Sr^{87} — $\frac{9}{2}$). Der β-Zerfall ist also verboten. Er wurde aber tatsächlich festgestellt; seine Halbwertszeit ist jedoch erwartungsgemäß sehr groß: $6 \cdot 10^{10}$ Jahre.

Auch in den übrigen Fällen benachbarter Isobare hat die Spindifferenz einen großen Wert, womit auch die scheinbare Stabilität erklärt wird. Mit der Vervollkommnung der Experimentiertechnik gelingt es nach und nach, die Radioaktivität dieser Isobare festzustellen.

§ 293. Die γ-Strahlung

In der vorangegangenen Darstellung sind wir mehrmals der Tatsache begegnet, daß die Kernprozesse oft von γ-Strahlung begleitet werden. So haben wir bei der Betrachtung der Kernreaktionen gesehen (Abschnitt XX), daß bei den Reaktionen, bei denen Neutronen oder Protonen eingefangen werden, der Energieüberschuß des neu entstehenden Kerns als γ-Strahlung abgegeben wird. Auch in verschiedenen anderen Fällen, in denen der Kern nicht im Grundzustand, sondern in einem angeregten entsteht, geht der Übergang in den Grundzustand mit γ-Strahlung vor sich. Bei den radioaktiven Prozessen, die wir in diesem Abschnitt betrachtet haben, begleitet die γ-Strahlung in bestimmten Fällen sowohl die α- als auch die β-Umwandlungen (siehe §§ 285 und 291).

Es ist gut bekannt, daß die γ-Strahlen eine kurzwellige elektromagnetische Strahlung darstellen. Der Emissionsprozeß verläuft der Emission von elektromagnetischer Strahlung der Elektronenhülle analog. Das trifft jedenfalls in der Hinsicht zu, daß sowohl die Aussendung von γ-Strahlen als auch die Emission von elektromagnetischer Strahlung, die zum

optischen oder Röntgengebiet des Spektrums gehört, durch den Übergang zwischen zwei Quantenzuständen zustande kommt. Der Unterschied besteht nur darin, daß man im ersten Falle von Quantenzuständen des Kerns und im letzteren von Quantenzuständen der Elektronenhülle spricht. Wie wir weiter sehen werden, zeigt sich dieser Unterschied in bestimmter Weise in den Eigenschaften der γ-Strahlen.

In diesem Buch sind wir schon mehrmals Problemen der Theorie der elektromagnetischen Strahlung begegnet. So haben wir im Teil I, §§ 63 bis 69 gesehen, daß die Intensität der Dipolstrahlung des linearen Oszillators, der nach dem harmonischen Gesetz $e^{i \quad t}$ schwingt, proportional dem Quadrat des Dipolmoments $(ex)^2$ ist [siehe Formel (64,6)]. Wir haben ferner gesehen, daß die Relaxationszeit, d. h. die Zeit, während der die Strahlungsintensität um den e-ten Teil abnimmt, durch die Formel

$$\tau = \frac{3mc^3}{8\pi^2\nu^2e^2} = \frac{3mc^3}{2\omega^2e^2} \qquad (293,1)$$

bestimmt ist [siehe (66,5)].

Nach der quantenmechanischen Interpretation stellt die Relaxationszeit die mittlere Lebensdauer des Atoms im angeregten Zustand oder, was dasselbe ist, den Kehrwert der Wahrscheinlichkeit für den Quantenübergang $E_m \to E_n$ dar (siehe Teil I, § 93). Im Abschnitt XIV dieses Bandes wurde schließlich gezeigt, daß das klassische Schema zur Berechnung der Intensität der Dipolstrahlung in der Quantenmechanik mit dem Unterschied beibehalten werden kann, daß an Stelle des Quadrats des Dipolmoments das Matrixelement

$$D_{mn} = ex_{mn} = \int \psi_m^* (ex)\, \psi_n\, dx\,,$$

in die Formel eingeht. Es ist ein Dipolmoment, das in besonderer Weise über zwei Zustände, und zwar den Anfangszustand ψ_m und den Endzustand ψ_n, gemittelt ist. Speziell beträgt die Wahrscheinlichkeit des spontanen Übergangs A_{mn} für einen Dipol, der längs der x-Achse nach der Formel (192,8) schwingt,

$$A_{mn} = \frac{64\pi^4\nu^3}{3hc^3}\,|\,D_{mn}\,|^2\,,$$

wobei D_{mn} das Matrixelement des Dipolmoments ist. Da die mittlere Lebensdauer τ das Reziproke von A_{mn} ist, gilt

$$\tau = \frac{1}{A_{mn}} = \frac{3hc^3}{64\pi^4\nu^3} \cdot \frac{1}{|\,D_{mn}\,|^2}\,.$$

Nach dieser Formel berechnen wir τ für eine γ-Strahlung mit der Photonenenergie 1 MeV, die der Frequenz $\nu = 2{,}3 \cdot 10^{20}\ \mathrm{sec}^{-1}$ und der Wellenlänge $\lambda = 1{,}25 \cdot 10^{-10}$ cm entspricht. Unter der Annahme, daß das Dipolmoment D_{mn} gleich der Elektronenladung pro 10^{13} cm ist, erhalten wir $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-15}$ sec. Dagegen folgt aus experimentellen Ergebnissen für γ-Strahlen natürlich-radioaktiver Substanzen, daß τ mindestens von der Größenordnung 10^{-12} sec ist, d. h. 1000mal größer.

Die Dipolstrahlung ist jedoch nur ein spezieller Fall der elektromagnetischen Strahlung eines Systems elektrischer Ladungen (wenn auch der wichtigste Fall). Im allgemeinen Falle kann das elektrische Strahlungsfeld eines Ladungssystems als Summe

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3 + \dots \qquad (293,2)$$

dargestellt werden[1]). Das erste Glied entspricht dem Strahlungsfeld eines elektrischen Dipols, das zweite Glied dem Strahlungsfeld eines elektrischen Quadrupols, d. h. eines 2^2-Pols, das dritte dem Feld eines Oktupols, d. h. eines 2^3-Pols, und allgemein entspricht das i-te Glied dem Strahlungsfeld eines Multipols der Ordnung 2^i. Wie die Rechnung zeigt, unterscheiden sich die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe (293,2) um die Größe $\frac{2\pi R}{\lambda}$, wobei R die Abmessungen des Gebietes, das von dem strahlenden System eingenommen wird, und λ die Wellenlänge der Strahlung bedeuten.

Die Analyse der Glieder von (293,2) zeigt, daß das zweite Glied außer dem Strahlungsfeld eines elektrischen Quadrupols auch das Strahlungsfeld eines magnetischen Dipols darstellt, der der Stromverteilung im System der bewegten Ladungen entspricht. Man kann sich auch ohne Rechnungen mit Hilfe der folgenden zwar nicht strengen, aber einfachen Überlegung davon überzeugen, daß die magnetische Dipolstrahlung der Größenordnung nach der elektrischen Quadrupolstrahlung entsprechen muß. Das magnetische Dipolmoment ist größenordnungsmäßig $\frac{v}{c}$-mal kleiner als das elektrische Dipolmoment[2]).

Wenn wir die Energie der bewegten Ladung mit E bezeichnen, sehen wir, daß größenordnungsmäßig

$$\frac{v}{c} \approx \frac{E}{mvc} \equiv \frac{Eh}{mvhc} = \frac{E}{hc}\lambda'$$

gilt, wo $\lambda' = \frac{h}{mv}$ die De-Broglie-Wellenlänge der bewegten Ladung ist. Da λ' im stationären Zustand von der Größenordnung $2\pi R$ ist, wobei R das vom strahlenden System eingenommene Gebiet (z. B. Atom oder Kern) bezeichnet, und $\frac{E}{hc} = \frac{h\nu}{hc} = \frac{\nu}{c}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\lambda}$ ist, ergibt sich $\frac{v}{c} \approx \frac{2\pi R}{\lambda}$, d. h. das Matrixelement des magnetischen Dipols ist von der gleichen Größenordnung wie das Matrixelement des elektrischen Quadrupols.

Man kann also das Strahlungsfeld eines beliebigen Ladungssystems als Summe der Strahlungsfelder eines elektrischen Dipols, eines elektrischen Quadrupols + magnetischen

---

[1]) Siehe Anhang XI, desgl. L. D. Landau und E. M. Lifschitz: „Feldtheorie", Kap. IX (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц: „Теория поля", Гостехиздат, 1948) und auch W. Weizel: „Lehrbuch der Theoretischen Physik", Bd. I, S. 486; Bd. II, S. 983, Verlag Springer, Berlin 1950.

[2]) Das ist aus folgendem Beispiel zu sehen. Das magnetische Dipolmoment eines Kreisstroms beträgt (siehe Teil I, § 72)

$$M = \frac{e}{2mc}\, mr^2\omega\,.$$

Wenn man beachtet, daß $r\omega = v$ die Lineargeschwindigkeit der bewegten Ladung ist, kann man diese Formel auf die Gestalt

$$M = \frac{e}{2c}\, rv \approx \frac{v}{c}\,(er)$$

bringen, wobei (er) das elektrische Dipolmoment des Systems ist. Wir sehen, daß das magnetische Dipolmoment der Größenordnung nach wirklich $\frac{v}{c}$ mal kleiner als das elektrische ist.

Dipols usw. darstellen. Die *Strahlungsintensitäten*, die den aufeinander folgenden Gliedern dieser Reihe entsprechen, unterscheiden sich nach dem Gesagten größenordnungsgemäß um den Wert $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$.

Wir versuchen, die gewonnenen Resultate auf die γ-Strahlung des Kerns anzuwenden Wenn wir eine Photonenenergie von 1 MeV voraussetzen, finden wir leicht, daß ihr $\lambda/2\pi =$ $= 2\cdot 10^{-11}$ cm entspricht. Unter der Annahme $R = 10^{-12}$ cm (R bezeichnet die Ausmaße des Kerns; der gewählte Zahlenwert gilt für die schwersten Kerne) erhalten wir $\frac{2\pi R}{\lambda} = 0{,}05$ und $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{400}$. Daraus folgt, daß die Intensität der Quadrupolstrahlung 400mal kleiner als die der Dipolstrahlung sein muß. Entsprechend weniger günstige Bedingungen erhält man für γ-Strahlen großer Wellenlänge. Für $h\nu = 100$ kV ergibt sich z. B. $\frac{2\pi R}{\lambda} = \frac{1}{300}$ und $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right) = 10^{-5}$.

Dieses Resultat steht jedoch in scharfem Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen. Es existiert ein Mittel, um die Intensitäten der γ-Strahlung für Dipol- und Quadrupolstrahlung zu bestimmen (diese Möglichkeit beruht auf der Untersuchung der sogenannten inneren Umwandlung der γ-Strahlung; siehe nächsten Paragraphen). Diese Untersuchungen zeigten, daß die γ-Strahlung in beiden Fällen etwa die gleiche Intensität besitzt.

Wenn wir das bisher über die Eigenschaften der γ-Strahlung Gesagte vergleichen, sehen wir, daß weder die Lebensdauer noch die Intensität den Erwartungen für Dipolstrahlung entsprechen. Wir bemerken ferner, daß in der elektromagnetischen Strahlung des Kerns der Quadrupolstrahlung ein überragender Anteil zukommt, während bei der Elektronenhülle die Dipolstrahlung bis auf einige Ausnahmen die Hauptrolle spielt.

Der Hauptgrund dafür liegt anscheinend in der hohen Homogenität, mit der die Kernsubstanz verteilt ist. Man kann z. B. folgendes zeigen: Wenn ein System aus Teilchen mit gleichem Verhältnis der Ladung zur Masse besteht, ist die Dipolstrahlung dieses Systems gleich Null[1]). Man könnte zunächst glauben, daß dieses Theorem keine Beziehung zum Verhalten des Atomkerns habe, da letzterer aus geladenen Protonen und neutralen Neutronen besteht. Wenn der Kern aber aus der gleichen Anzahl Protonen und Neutronen besteht, und wenn sich seine Nukleonen zu α-Teilchen gruppieren, die die Rolle sekundärer Einheiten in der Struktur des Kerns spielen, dann wird sich der Kern genau wie ein System von Teilchen gleicher Ladung und gleichen Verhältnisses $\frac{e}{m}$ benehmen. Andererseits wird die Quadrupolstrahlung eines solchen Systems dieselbe Intensität und dasselbe τ besitzen, wie es aus der Größe des Matrixelements folgt, das der Quadrupolstrahlung entspricht[2]).

Eine andere Erklärung für das Fehlen oder für die geringe Intensität der Dipolstrahlung des Kerns bietet die Betrachtung des Kerns als gleichmäßig geladenen Tropfen. Dabei betrachtet man die Dichte der Protonen und Neutronen im Kern nicht einzeln, sondern schreibt dem ganzen Tropfen eine gleichmäßig verteilte Ladung zu. Es ist offensichtlich, daß ein derartiger Tropfen keine Dipolstrahlung liefern kann. Die Dipolstrahlung würde näm-

[1]) Siehe L. D. Landau und E. M. Lifschitz: „Feldtheorie", Kap. IX (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц: Теория поля, Гостехиздат, 1948).

[2]) Siehe die Behandlung dieser Frage im Buche von H. Bethe: „Kernphysik", Teil II, New York 1947.

lich in diesem Falle entstehen, wenn der Tropfen als Ganzes Schwingungen mit der Frequenz der ausgesandten Strahlung ausführte, was natürlich völlig unwahrscheinlich ist. Andererseits kann der Tropfen Schwingungen ausführen, indem er von der Kugelgestalt in eine Ellipsoidform und zurück deformiert wird. Diese Deformationsschwingungen müssen eine Strahlung von Quadrupolcharakter hervorrufen, was auch tatsächlich beobachtet wird.

Was die Strahlungen anbetrifft, die höheren Multipolen als Quadrupolen, z. B. Oktupolen oder 2^4-Polen, entsprechen, so kommt dieser Strahlung nur sehr geringe Wahrscheinlichkeit zu, da die Intensität der Oktupolstrahlung nach dem Gesagten um $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$ kleiner als die Quadrupolstrahlung sein muß. Für γ-Strahlen der Energie 1 MeV ist nämlich die Größe $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$ von der Größenordnung 10^{-5}, d. h., die Oktupolstrahlung muß 100000mal schwächer als die Quadrupolstrahlung sein. Diese Strahlungen höherer Multipole sind jedoch für die Erklärung der metastabilen Kernzustände, über die in § 295 gesprochen wird, wesentlich.

§ 294. Die innere Umwandlung der γ-Strahlen

In diesem Paragraphen wollen wir eine wichtige Erscheinung qualitativ betrachten, die darin besteht, daß bei schweren Kernen an Stelle der *Kern-γ*-Strahlung mit großer Wahrscheinlichkeit Gruppen von monoenergetischen *Elektronen* aus den inneren Schalen der Elektronenhülle des Atoms ausgesandt werden. Diese Erscheinung wird innere Umwand-

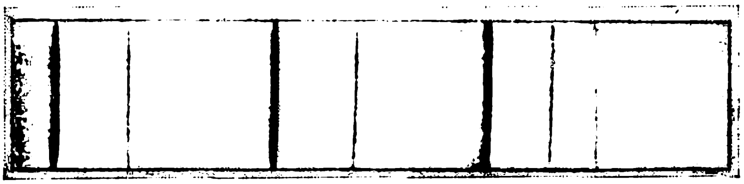


Abb. 391. Spektrum von Elektronen der inneren Umwandlung des RaB

lung der γ-Strahlen genannt. Ihre Untersuchung ist besonders wichtig, weil damit ein Weg zur Erforschung der γ-Strahlen eröffnet wird, der zwar indirekt, aber bedeutend einfacher als die unmittelbare Untersuchung der γ-Strahlen selbst ist.

Die Emission von Gruppen monoenergetischer Elektronen durch radioaktive Atome neben der Aussendung von β-Elektronen des Kerns wurde gleich zu Beginn der Forschungen über die β-Spektren festgestellt. Diese Elektronengruppen bilden im β-Spektrum scharfe Linien, die sich dem kontinuierlichen Spektrum der β-Elektronen des Kerns überlagern (Abb. 391). Daß diese Linien zu Elektronen gehören, die nicht im Kern, sondern in der Elektronenhülle entstehen, folgt schon aus einer einfachen Gegenüberstellung der Energien, die diesen Linien entsprechen, und den Ionisationsenergien der Elektronen aus den inneren Schalen der Atomhülle.

Nach der Einsteinschen Gleichung für den Photoeffekt müssen die Energien homogener Elektronengruppen, die aus einer bestimmten Schale der Hülle durch γ-Quanten der Größe $h\nu$ ausgelöst werden, gleich

$$E' = h\nu - K, \quad E'' = h\nu - L_{\mathrm{I}},$$

sein. Wenn die Energien der homogenen Elektronengruppen E', E'', ... und die Ionisationsenergien K, L_{I} usw. bekannt sind, kann man die Größe von $h\nu$, die für alle Gruppen gleich sein muß, ausrechnen: $h\nu = E' + K = E'' + L_{\mathrm{I}} = \ldots$ Das wird in der Tat bestätigt, wie Tabelle LVI zeigt. Sie enthält Angaben über homogene Elektronengruppen, die vom RaB ($Z = 82$) ausgesandt werden. Die letzte Tabellenspalte, deren Zahlen die Summe aus kinetischer Energie des Elektrons der inneren Umwandlung und der Ionisationsenergie der entsprechenden Schale darstellen, zeigt, daß der Wert von $h\nu$ tatsächlich konstant ist. Der Energie des γ-Quants ist der Mittelwert $h\nu = 52{,}91$ zuzuschreiben.

Tabelle LVI. Umwandlung der γ-Strahlen in verschiedenen Elektronenschalen des RaB

Elektronenenergie in keV	Ionisationsenergie für $Z = 82$	Niveau, auf dem die Umwandlung erfolgt	Energie des γ-Quants in keV
36,74	16,34	L_{I}	53,08
37,37	15,67	L_{II}	53,04
39,63	13,38	L_{III}	53,01
48,85	3,99	M_{I}	52,84
49,10	3,68	M_{II}	52,78
49,66	3,17	M_{III}	52,83
51,90	0,93	N_{I}	52,83
52,64	0,20	O	52,84
			Mittel 52,91

Man könnte vermuten, daß diese homogene Elektronengruppen durch Einwirkung der γ-Strahlen, die den Kern verlassen und einen Photoeffekt in der Hülle des eigenen Atoms erzeugen, entstehen. Diese Annahme wird jedoch durch eine Intensitätsmessung der homogenen Elektronengruppen widerlegt. Man hat diese Ergebnisse mit den Intensitäten jener Gruppen verglichen, die beim gewöhnlichen Photoeffekt durch γ-Strahlen außerhalb der Kerne, aus denen sie hervorgehen, entstehen. Diese Untersuchungen zeigten, daß die Intensität homogener Elektronengruppen, die von den radioaktiven Atomen selbst ausgesandt werden, mindestens 100mal größer als die Intensität jener Elektronen ist, die bei sonst gleichen Bedingungen durch Photoeffekt entstehen. Daraus folgt, daß die homogenen Elektronengruppen im β-Spektrum durch *direkte Energieübergabe* des angeregten Kerns an die Elektronenhülle entstehen. Der Kern selbst kehrt dabei *ohne Strahlung* in den Grundzustand zurück. Wir haben es hier mit einem eigenartigen inneren Stoß zweiter Art zu tun, weshalb die Erscheinung selbst auch die Bezeichnung *innere Umwandlung* oder *innere Konversion* erhielt.

Eine andere Art innerer Umwandlung besteht darin, daß der angeregte Kern, wenn seine Anregungsenergie 1 MeV überschreitet, ein Paar (Elektron und Positron) bildet und wieder ohne Strahlung in den Grundzustand zurückkehren kann. Diese Erscheinung wurde von A. I. Alichanow, A. I. Alichanjan und M. S. Kosodajew und gleichzeitig von

Chadwick, Blacket und Occhialini entdeckt. Es zeigte sich, daß ein dünnwandiges mit Radon gefülltes Röhrchen Positronen emittiert. Positronen sendet auch ein dünnes Aluminiumband aus, daß durch Th (C + C″) aktiviert ist. Die Entstehung dieser Positronen wurde auch der inneren Umwandlung von γ-Strahlen zugeschrieben. Wenn aber die Anregungsenergie $h\nu$ eine innere Umwandlung auf *negativen* Energieniveaus erfährt, muß die kinetische Energie der entstehenden Positronen um den für den Übergang des Elektrons vom negativen zum positiven Niveau notwendigen Energiebetrag kleiner als $h\nu$ sein. Die Maximalenergie des Positrons muß deshalb gleich

$$h\nu - 2m_0c^2$$

sein. Das wird durch die Untersuchung des Energiespektrums der Positronen des RaC und Th (C + C″) bestätigt. Diese Spektren wurden mit großer Genauigkeit von A. I. Alichanow und seinen Mitarbeitern mit dem von Alichanow konstruierten magnetischen Spektrographen ausgemessen. In diesem Spektrographen (Abb. 392) wird die fokussierende Wirkung

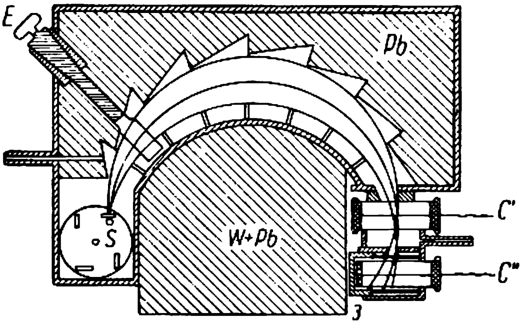


Abb. 392. Schema des magnetischen Spektrographen von Alichanow.
S — radioaktives Präparat, C' und C'' — Zähler, E — Schliff mit Schirmen und Diaphragmen

eines homogenen magnetischen Querfeldes benutzt; die Elektronen werden aber nicht mit Photoplatten, sondern durch zwei Zähler C′ und C″ in Koinzidenzschaltung registriert. Durch die Anwendung von Zählern wird die Empfindlichkeit der Anordnung weitgehend erhöht, und die Koinzidenzschaltung erlaubt, zufällige Entladungen der Zähler, die z. B. vom „Untergrund“ der γ-Strahlen herrühren, auszuschließen.

In Abb. 393 ist das Energiespektrum für die Positronen eines aktiven Niederschlags von Th (C + C″), das von A. I. Alichanow und G. D. Latyschew aufgenommen wurde, wiedergegeben. Es ist eine Reihe von Zähnen zu sehen, von denen jeder einer bestimmten Linie des γ-Spektrums entspricht (die Werte von $h\nu$ sind in der Zeichnung in keV angegeben). Bei 1600 keV fällt die Kurve steil ab. Dieser Abfall läßt sich folgendermaßen erklären: Das größte Photon im γ-Spektrum des Th (C + C″) besitzt die Energie 2620 keV; die Differenz zwischen diesem Betrag und der zur Paarerzeugung erforderlichen Energie (d. h. 1 MeV = 1000 keV) beträgt 2620 – 1000 = 1620 keV und entspricht gerade der Stelle des Abfalls.

Die innere Umwandlung kann zum Studium der γ-Spektren herangezogen werden. Wie schon in § 280 gezeigt wurde, sind nur weiche γ-Strahlen der unmittelbaren Untersuchung

mit den Methoden der Röntgenspektroskopie zugänglich. Man ist deshalb gezwungen, die γ-Spektren indirekt zu untersuchen, indem man die Wirkungen der γ-Strahlen heranzieht. Wie aus dem Vorangegangenen zu entnehmen ist, kann speziell die innere Umwandlung unter Emission von Elektronen und Positronen ausgewertet werden.

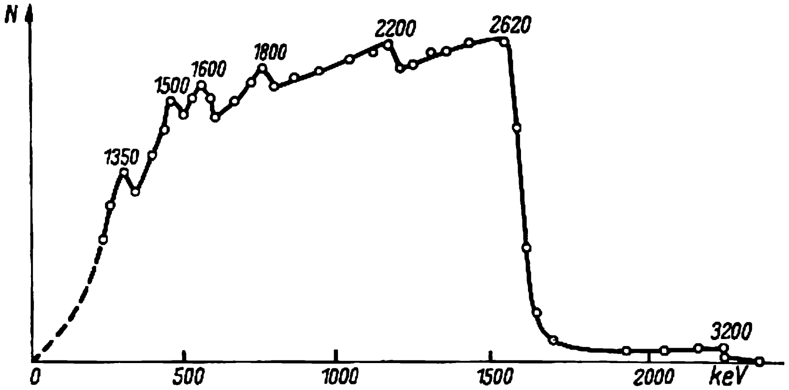


Abb. 393. Spektrum der vom Th $(C + C'')$ ausgesandten Positronen

Diese Methode erlaubt, die Frequenz der Linien des γ-Spektrums genau zu bestimmen, dagegen kann man ihre relative Intensität auf diesem Wege nicht feststellen. Wie wir gesehen haben, läuft nämlich die Emission der Umwandlungselektronen neben zwei anderen konkurrierenden Prozessen einher, und zwar neben der Emission von γ-Strahlen und der Bildung von Elektron-Positron-Paaren. Die relativen Wahrscheinlichkeiten aller drei Prozesse sind im allgemeinen für die verschiedenen Linien des γ-Spektrums unbekannt. Deshalb liefert das mittels des Spektrums der Umwandlungselektronen gemessene γ-Spektrum die richtige Lage der γ-Linien, nicht jedoch ihre relative Intensität.

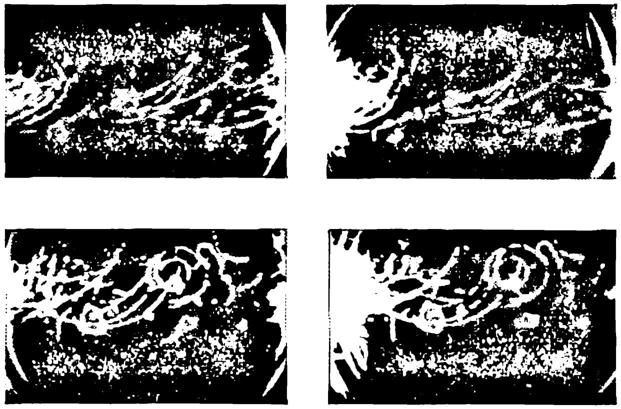


Abb. 394. Spuren von Rückstoßelektronen im Magnetfeld

Daraus folgt, daß man zur gleichzeitigen Messung der Frequenzen und der Intensitäten im γ-Spektrum unbedingt die Wirkung der γ-Strahlen *außerhalb* der Atome, aus denen sie hervorgehen, d. h. die Entstehung von Photoelektronen oder Rückstoßelektronen durch den Compton-Effekt, auswerten muß. Die Methode der γ-Strahlenspektroskopie, die auf der Energiemessung der Compton-Elektronen beruht, wurde zuerst von D. W. Skobelzyn ausgearbeitet und verwirklicht. Zu diesem Zweck wurden die Spuren von Rückstoßelektronen in der Wilson-Kammer, die sich in einem magnetischen Querfeld befand, untersucht. Wenn das Feld intensiv genug ist, beschreiben die Rückstoßelektronen Kreisbahnen (Abb. 394). In § 279 haben wir gesehen, daß man aus dem Krümmungsradius der Bahnkurve ϱ und der Feldstärke H den Impuls und die Energie der Elektronen berechnen kann. Wenn man nun diese Energie und den Rückstoßwinkel φ kennt, kann man nach der Compton-Formel auch die Größe des γ-Quants berechnen:

$$E_k = h\nu \frac{2a}{1 + 2a + (1 + a)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}, \quad a = \frac{h\nu}{m_0 c^2}.$$

Diese Bestimmungsmethode für $h\nu$ ist besonders für harte γ-Strahlen, bei denen die Anwendung der photoelektrischen Methode schwierig wird, vorteilhaft. D. W. Skobelzyn untersuchte auf diesem Wege die γ-Strahlenspektren des RaC und Th (C + C″).

Die Methodik der γ-Spektren-Untersuchung wurde von A. I. Alichanow und M. I. Kosodajew durch erfolgreiche Kombination der Skobelzynschen Methode (Bestimmung der Photonengröße $h\nu$ aus der Energie des Rückstoßelektrons) mit dem magnetischen Spektrographen von I. A. Alichanow wesentlich vervollkommnet. Eine solche Methode wurde von G. D. Latyschew zur Untersuchung des Spektrums der Rückstoßelektronen auf folgende Weise benutzt. Der γ-Strahler befand sich in A (Abb. 395), während bei M eine Platte aus

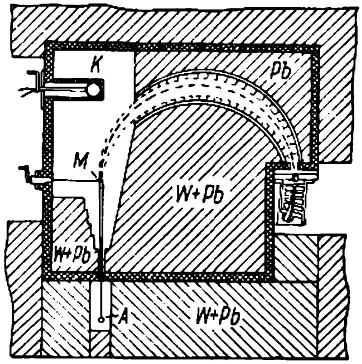


Abb. 395. Anordnung zur Untersuchung von γ-Spektren

einer leichten Substanz (Styrol) angeordnet war, in der sich die Streuung der γ-Strahlung vollzog. Das Spektrum der Rückstoßelektronen wurde dann mit dem magnetischen Spektrographen von Alichanow untersucht. In Abb. 396 ist das so erhaltene Spektrum der γ-Strahlen des RaC wiedergegeben. Wie man sieht, besteht die Kurve aus einer Reihe von Maxima. Jedes dieser Maxima entspricht Rückstoßelektronen, die unter der Wirkung von γ-Quanten bestimmter Energie entstanden sind. Die Energien dieser Photonen sind bei jedem Maximum vermerkt.

Die absolute Intensitätsbestimmung der Linien des γ-Spektrums ermöglicht es, den Koeffizienten der inneren Umwandlung der γ-Strahlen zu finden. Die Theorie der inneren Umwandlung ist ziemlich kompliziert und führt zu sehr umfangreichen Formeln[1]). Wir bemerken hier nur, daß der Ausdruck für den Koeffizienten der inneren Umwandlung der γ-Strahlen auf einer gegebenen Elektronenschale ($K, L, \ldots$), d. h. für das Verhältnis der Zahl der Umwandlungselektronen zur Zahl der ausgesandten γ-Quanten, α_K, α_L usw., von der Theorie geliefert wird. Es ist wesentlich, daß in diesen Ausdruck eine Zahl eingeht, die die Ordnung des Multipols der Strahlung angibt, und daß diese für elektrische und magnetische Multipole verschieden ist. Als Beispiel betrachten wir den Koeffizienten der inneren Umwandlung auf der K-Schale bei der Ordnung l eines elektrischen 2^l-Multipols. Im einfachsten Falle (nicht-relativistische Näherung, Geschwindigkeit des K-Elektrons im Vergleich zur Geschwindigkeit des Umwandlungselektrons klein) sieht er folgendermaßen aus:

$$\alpha_K^{(l)} = Z^3 \alpha^4 \frac{l}{l+1} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{l+\frac{5}{2}},$$

wobei α auf der rechten Seite die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137}$ bedeutet.

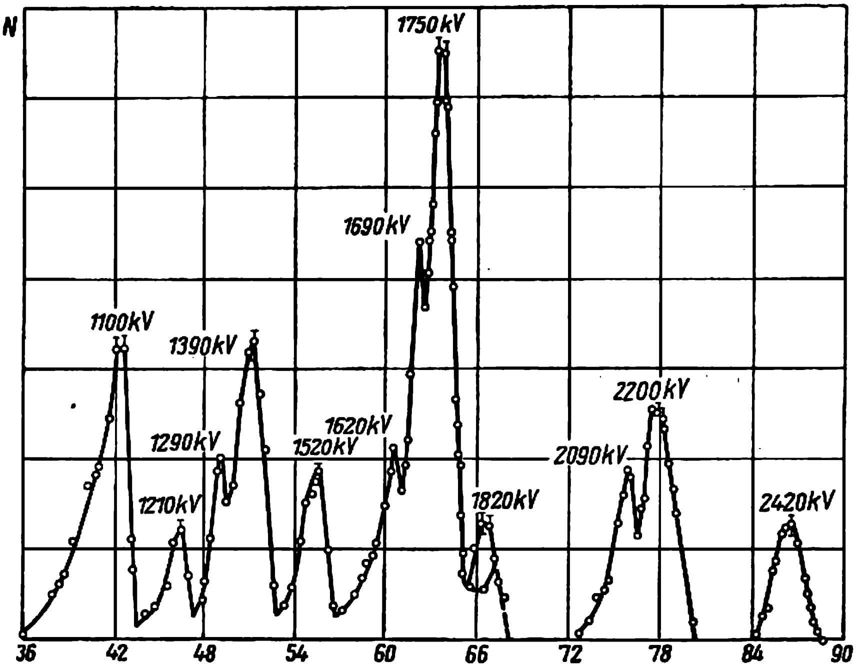


Abb. 396. γ-Spektrum des RaC

[1]) Eine Darstellung des gegenwärtigen Standes der Theorie und experimentelle Ergebnisse der Untersuchung der inneren Umwandlung der γ-Strahlen findet man in der Arbeit von I. S. Schapiro (И. С. Шапиро, *Успехи физических наук*, т. XL, вып. 2, стр. 189, 1950).

Man erhält also für die Strahlung eines elektrischen Dipols ($l = 1$)

$$a_K^{(1)} = Z^3\alpha^4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{5}{2}}$$

und für Quadrupolstrahlung ($l = 2$)

$$a_K^{(2)} = Z^3\alpha^4 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{9}{2}}.$$

Wesentlich andere Formeln ergeben sich für den Koeffizienten der inneren Umwandlung einer 2^l-poligen magnetischen Strahlung.

Hieraus sieht man, daß die Untersuchung der inneren Umwandlung auch deshalb sehr wichtig ist, weil man durch Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Formeln die Ordnung der Multipolstrahlung feststellen kann. Gerade auf diesem Wege wurde auch die annähernde Gleichheit der Intensitäten der Dipol- und Quadrupol-γ-Strahlung, über die im vorigen Paragraphen gesprochen wurde, festgestellt.

§ 295. Isomere Übergänge

Es gibt noch einen Typ von Kernumwandlungen, der durch einige spezifische Züge charakterisiert ist, obwohl er mit keiner neuen Strahlungsart verknüpft ist. Es handelt sich um die isomeren Übergänge. Es wurde schon darauf hingewiesen (siehe § 237), daß es Kerne gibt, die aus der gleichen Anzahl von Protonen und Neutronen bestehen, d. h., die Isotope und Isobare sind, sich aber trotzdem in ihren radioaktiven Eigenschaften unterscheiden. Das erste Beispiel solcher Kerne wurde von Hahn gefunden. Er entdeckte die radioaktive Substanz Uran Z ($_{91}Pa^{234}$), die sich als Isotop und Isobar eines schon vorher bekannten Stoffes, des Uran X_2, erwies. Beide Substanzen senden bei ihren Umwandlungen β-Teilchen und γ-Quanten aus. Während die Halbwertszeit des UZ gleich 1,22 min ist, beträgt jedoch die Halbwertszeit des UX_2 6,7 Stunden. Die β-Teilchen des UX_2 besitzen die Energien 1,52 und 2,32 MeV, und die des UZ 0,56 MeV. Wir sehen also, daß diese beiden Stoffe, deren Kerne sich durch nichts in ihrer Zusammensetzung unterscheiden, trotzdem wesentlich verschiedene radioaktive Eigenschaften besitzen.

UX_2 und UZ waren das erste und 14 Jahre lang das einzige Beispiel für Kernisomere. 1935 wurde ein zweiter wichtiger Fall von I. W. Kurtschatow, L. I. Russinow, B. W. Kurtschatow und L. W. Mysowski entdeckt. Sie fanden ein Isomerenpaar unter den künstlich-radioaktiven Isotopen des Broms. Von I. W. Kurtschatow und seinen Mitarbeitern wurde beobachtet, daß beim Neutroneneinfang durch Brom nicht zwei, wie früher bekannt war, sondern drei Halbwertszeiten auftreten: 18 Minuten, 4,4 Stunden und 34 Stunden. Andererseits ist genau bekannt, daß das Brom nur die beiden stabilen Isotope $_{35}Br^{79}$ und $_{35}Br^{81}$ besitzt. Deshalb durften bei der Reaktion (n, γ) zwei und nicht drei β^--radioaktive Isotope

$$Br^{79}(n, \gamma)\,Br^{80} \quad \text{und} \quad Br^{81}(n, \gamma)\,Br^{82}$$

auftreten. Zur Erklärung der drei Halbwertszeiten wurde eine Hypothese aufgestellt, nach der das eine radioaktive Isotop in zwei isomeren Zuständen, die durch verschiedene Stabilität charakterisiert sind, auftritt. Diese Hypothese wurde zuerst durch eine Arbeit von Bothe bestätigt. Er zeigte, daß bei dem Kernphotoeffekt im Brom, die zu zwei radioaktiven Bromisotopen, und zwar $Br^{79}(\gamma, n)\,Br^{78}$ und $Br^{81}(\gamma, n)\,Br^{80}$, führt, ebenfalls drei

Halbwertszeiten beobachtet werden: 6,4 Minuten, 4,4 Stunden und 18 Minuten. Wie man sieht, stimmen zwei dieser Halbwertszeiten, nämlich 4,4 Stunden und 18 Minuten, mit zwei von den drei Halbwertszeiten überein, die KURTSCHATOW bei der Reaktion (n, γ) beobachtet hat. Da nun in beiden Fällen, d. h. bei den Reaktionen (n, γ) und (γ, n), nur ein gleiches Produkt, und zwar Br^{80}, entsteht, so sind diesem auch die beiden Halbwertszeiten 4,4 Stunden und 18 Minuten zuzuschreiben. Damit wird die Hypothese von der Existenz zweier isomerer Zustände des Kerns Br^{80} in bezug auf die Halbwertszeiten bestätigt. Alle weiteren Folgerungen aus dieser Hypothese wurden durch Arbeiten von L. I. RUSSINOW, A. P. GRINBERG und A. A. JUSEFOWITSCH bestätigt.

Nachdem die Isomerie beim Br^{80} endgültig festgestellt war, wurde eine große Anzahl anderer Isomerenpaare gefunden. Ihre Anzahl wächst ständig an. Hier einige Beispiele:

Tabelle LVII

Z	Kern	Strahlungstyp[1])	Halbwertszeit
20	Ca^{49}	β^-, γ	2,5 Stunden
	Ca^{49}	β^-	30 Minuten
22	Ti^{51}	β^-, γ	6 Minuten
	Ti^{51}	β^-, γ	72 Tage
25	Mn^{52}	β^+, γ	21 Minuten
	Mn^{52}	β^+, γ	6,5 Tage
38	Sr^{85}	e^-, γ	70 Minuten
	Sr^{85}	K, γ	65 Tage
	Sr^{87}	e^-, γ	2,7 Stunden
	Sr^{87}	—	stabil
49	In^{115}	e^-, γ	4,5 Stunden
	In^{115}	—	stabil

Die Erklärung der Isomerie besteht darin, daß das eine Isomer, und zwar dasjenige mit der längeren Halbwertszeit, durch den vorangegangenen Prozeß (z. B. eine Kernreaktion) in einem metastabilen Zustand auftritt. Der Übergang aus einem solchen Zustand ist für γ-Strahlung durch Auswahlregeln „verboten".

Man kann heute als experimentell gesichert ansehen, daß die Metastabilität von der großen Differenz der Drehimpulse des isomeren Kerns und des Kerns im Grundzustand herrührt. Die „Entladung" dieses metastabilen Zustandes muß durch γ-Strahlung erfolgen. Wenn die Differenz der Drehimpulse des angeregten und des Grundzustands 4 bis 5 Einheiten beträgt, entspricht der Quantenübergang einer Multipolstrahlung hoher Ordnung. Deshalb kann die Lebensdauer des angeregten Kerns besonders bei geringer Anregungsenergie sehr groß sein. Der isomere Übergang stellt also eine neue Art der Radioaktivität dar, die bis zur Entdeckung der Isomerie unbekannt war: die selbständige γ-Radioaktivität. Man kann auch sagen, daß der isomere Übergang dem langen Nachleuchten der Atome bei verbotenen Übergängen in der Elektronenhülle analog ist (siehe §§ 235 bis 236).

[1]) In der Tabelle bedeuten β^- und β^+ einen β-Zerfall, e^- ein Elektron der inneren Umwandlung und K den Einfang eines K-Elektrons.

Wir wollen diese Frage ein wenig ausführlicher behandeln. In § 293 haben wir gesehen, daß die mittlere Lebensdauer für Dipol-γ-Strahlung bei einer Anregungsenergie von 1 MeV von der Größenordnung 10^{-12} sec ist. Dagegen mißt man für die Halbwertszeiten isomerer Übergänge mitunter Stunden, Tage und sogar Dutzenden von Tagen, d. h., die normale Dauer wird 10^{18}- bis 10^{19}fach übertroffen. Man sieht sofort, daß Auswahlregeln existieren müssen, die die Multipolübergänge kleiner Ordnung in diesen Fällen streng verbieten. Wir werden später sehen, daß die Übergangswahrscheinlichkeit mit steigendem Grad des Multipols schnell genug abnimmt, um eine beliebige Dauer eines angeregten Zustands erklären zu können, wenn der erste erlaubte Übergang der Strahlung eines Multipols genügend hoher Ordnung entspricht.

Man kann zeigen, daß der Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes einer 2^l-Polstrahlung (elektrischer oder magnetischer Multipol) in bezug auf den Kern gleich $l\,\frac{h}{2\pi}$ ist. Die Strahlung eines elektrischen Dipols trägt also einen Drehimpuls von $h/2\pi$ mit sich fort, die Strahlung eines elektrischen Quadrupols — den Drehimpuls $2h/2\pi$, die Strahlung eines magnetischen Dipols — ebenfalls den Drehimpuls $2h/2\pi$ usw. Wenn man mit I und I' die Quantenzahlen des Kerndrehimpulses vor bzw. nach der Strahlung bezeichnet, dann gilt nach dem Drehimpulssatz

$$|I - I'| = l.$$

Wie bewiesen werden kann, trifft genauer die Ungleichung

$$|I + I'| \geqslant l \geqslant |I - I'|$$

zu. Daraus folgt, daß die minimale Änderung des Drehimpulses bei einer 2^l-Polstrahlung gleich l ist. Wenn also die Differenz $I - I'$ groß ist, was bei einem isomeren Übergang zutrifft, entspricht das erste von Null verschiedene Glied der im § 293 erwähnten Reihe einem Multipol hoher Ordnung. Da durch die Reihe die Übergangswahrscheinlichkeit dargestellt wird, ist diese nach dem oben Gesagten entsprechend klein und die Lebensdauer groß.

Außer den Auswahlregeln, die mit der Änderung des Drehimpulses zusammenhängen, hat noch eine andere Auswahlregel auf die Übergangswahrscheinlichkeit Einfluß. Diese Regel wird durch die Änderung der Symmetrie der Eigenfunktionen für die Zustände, zwischen denen der Übergang erfolgt, bedingt (Definition des Begriffes Symmetrie siehe § 289). Für einen Dipolübergang ist nämlich das Matrixelement gleich

$$D_{mn} = \int \psi_m^* \,(ex)\, \psi_n dx.$$

Da (ex) eine ungerade Funktion darstellt, ist das Integral nur dann von Null verschieden, wenn die Symmetrie der Funktionen ψ_m und ψ_n verschieden ist. Für diesen Fall ist die Integrandenfunktion insgesamt gerade und das Integral von Null verschieden. Dagegen steht bei einem Quadrupolübergang im Matrixelement zwischen den Funktionen ψ_m und ψ_n eine quadratische Funktion (das elektrische Quadrupolmoment ist dem Trägheitsmoment in der Mechanik analog und hängt folglich von den Quadraten der Koordinaten ab). Das Integral ist also nur dann von Null verschieden, wenn die Symmetrie der Funktionen ψ_m und ψ_n gleich ist (beide gerade oder beide ungerade). Wenn wir alles zusammenstellen, was wir über die Auswahlregeln für Multipolstrahlung gesagt haben, erhalten wir folgende Tabelle (in dieser Tabelle bedeutet „ja“ in der Rubrik der Symmetrieänderung, daß sich die Symmetrie ändert, und „nein“, daß sie sich nicht ändert).

Auswahlregeln für Multipolstrahlung[1])

Potenzexponent von $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^l$ in dem Intensitätsausdruck	2	4	6	8	10
Elektrische Strahlung	Dipol	Quadrupol	Oktupol	16-Pol	32-Pol
$\|I+I'\| \geqslant$ $\|I-I'\| \leqslant$	1	2	3	4	5
Änderung der Symmetrie	ja	nein	ja	nein	ja
Magnetische Strahlung	—	Dipol	Quadrupol	Oktupol	16-Pol
$\|I+I'\| \geqslant$ $\|I-I'\| \leqslant$		1	2	3	4
Änderung der Symmetrie		nein	ja	nein	ja

Wir betrachten die erste Zeile näher. Sie zeigt, mit welcher Potenz die Größe $\frac{2\pi R}{\lambda}$ in den Ausdruck für die Strahlungsintensität eines Multipols von der Ordnung 2^l eingeht. Man kann leicht nachrechnen, daß $\frac{2\pi R}{\lambda} = \frac{1}{300}$ gilt, wenn die Niveaudifferenz 100 keV ausmacht. Die Wahrscheinlichkeit des Quadrupolübergangs ist also $(300)^2 = 10^5$mal kleiner als beim Dipolübergang, beim Oktupolübergang $(300)^3 = 2{,}7 \cdot 10^7$mal kleiner usw. Die lange mittlere Lebensdauer bei isomeren Übergängen kann also damit erklärt werden, daß diese Übergänge einer Multipolstrahlung hoher Ordnung, d. h. einem großen Betrag der Differenz $|I - I'|$, entsprechen.

Ein einfaches Beispiel für isomere Übergänge ist der Übergang aus dem metastabilen Zustand des In^{115*} in den Grundzustand, der in unserem Falle einfach das stabile Indiumisotop In^{115} ist. Der Übergang geht unter Emission von γ-Strahlen mit einer Photonenenergie von 336 keV und von Elektronen der inneren Umwandlung vor sich und besitzt eine Halbwertszeit von 4,5 Stunden. Das In^{115} kann auf sehr verschiedene Arten in den angeregten Zustand versetzt werden: durch unelastische Streuung von Neutronen, Protonen, α-Teilchen, durch Absorption von γ-Strahlen. In allen Fällen „entlädt" sich der entstehende metastabile Zustand durch Aussendung von γ-Strahlen und Umwandlungselektronen mit der gleichen Halbwertszeit von 4,5 Stunden.

Es ist zu bemerken, daß es lange Zeit nicht gelang, die γ-Strahlung bei isomeren Übergängen zu beobachten. Im Jahre 1938 wurde aber von L. I. Russinow und A. A. Jusefowitsch an den Bromisomeren die Emission von Umwandlungselektronen entdeckt. Damit wurde gezeigt, daß bei isomeren Übergängen hauptsächlich eine innere Umwandlung der γ-Strahlen erfolgt, womit sich auch ihre schwierige Beobachtung erklärt.

Als kompliziertes Beispiel für isomere Übergänge betrachten wir die β^--Umwandlung des ${}_{27}Co^{60}$ in ${}_{28}Ni^{60}$. Der Übergang vollzieht sich nur zu 10% unmittelbar unter Emission von

[1]) Der Übergang $0 \rightarrow 0$ ist für beide Strahlungsarten verboten.

β^--Teilchen der Energie 1,56 MeV und der Halbwertszeit 10,7 Minuten. 90% der Kerne des Co^{60} unterliegen vorher einem isomeren Übergang, wobei γ-Strahlen oder Umwandlungselektronen mit der Energie 0,056 MeV ausgesandt werden, und von einem tieferen Niveau aus erfolgt der β^--Zerfall mit der Halbwertszeit 5,3 Jahre (Abb. 397). Die beiden isomeren Kerne des Co^{60} verhalten sich also wie verschiedene β^--radioaktive Kerne, die sich mit äußerst unterschiedlichen Halbwertszeiten umwandeln.

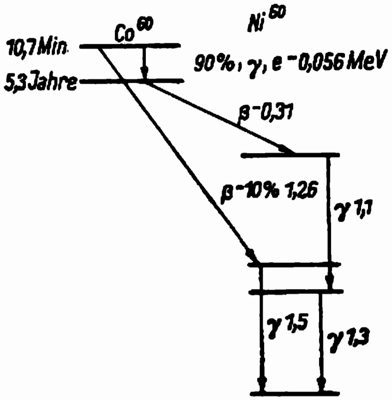


Abb. 397. Schema des isomeren Übergangs beim β-Zerfall des Co^{60}

Obwohl die isomeren Kerne in jeder Hinsicht mit Ausnahme der Halbwertszeiten und Strahlungsenergien identisch sind, hat man Methoden zu ihrer Trennung ausgearbeitet. Eine solche ist z. B. die physikalische Methode, die von L. I. Russinow und A. S. Karamjan entwickelt wurde [1]).

[1]) Siehe die Arbeit von A. S. Karamjan und L. I. Russinow: „Eine physikalische Methode zur Trennung von Kernisomeren“, (А. С. Карамян и Л. И. Русинов: Физический метод разделения ядерных изомеров, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, т. 19, вып. 7, 1949). Siehe auch das Referat von W. A. Leschkowzew, (В. А. Лешковцев, *Успехи физических наук*, т. XXXVIII, стр. 114, 1949). Über Kernisomerie siehe außerdem: Korsunski: „Isomerie der Atomkerne“. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

XXII. NEUTRONEN

§ 296. Die Entdeckung der Neutronen

Die Neutronen spielen eine so wichtige Rolle in der Kernphysik, daß wir ausführlicher auf ihre Eigenschaften eingehen müssen. Zunächst sei die Entdeckungsgeschichte der Neutronen beschrieben.

Im Jahre 1920 sprach RUTHERFORD die Vermutung aus, daß zwei damals unbekannte Kerne existieren: Kerne mit der Masse 2 und einer Ladung (d. h. Deuteronen) und Kerne mit der Masse 1 und der Ladung Null, d. h. Neutronen. „Ein solches Atom", schrieb RUTHERFORD über das Neutron, „würde ganz ungewöhnliche Eigenschaften besitzen. Sein äußeres Feld muß bis auf die Gebiete in der allernächsten Nachbarschaft des Kerns Null sein. Es müßte ihm deshalb möglich sein, die Materie frei zu durchdringen. Die Existenz eines derartigen Atoms wäre wahrscheinlich schwierig, mit dem Spektroskop zu beobachten, und man könnte es nicht in einem geschlossenen Gefäß aufbewahren"[1]).

Die Versuche, die danach im Laboratorium RUTHERFORDS angestellt wurden, um solche Kerne beim Durchgang einer elektrischen Entladung in Wasserstoff zu beobachten, verliefen jedoch erfolglos.

Nach 10 Jahren, 1930, wiesen BOTHE und BECKER darauf hin, daß bei der Beschießung einiger leichter Elemente (Be, B, Li u. a.) mit α-Teilchen eine sehr harte Strahlung entsteht, die eine dicke Bleischicht durchdringen kann. Über den Härtegrad dieser Strahlung gibt die Tatsache Aufschluß, daß die sehr durchdringungsfähigen γ-Strahlen des Th $(C + C'')$ in einer 1,5 cm dicken Bleischicht zur Hälfte absorbiert werden, während für die Strahlung des Berylliums dazu etwa 5 cm Blei notwendig sind. Wenn diese Strahlung Quantennatur besäße, d. h., wenn es sich um harte γ-Strahlen handelte, dann müßte man auf Grund ihrer Absorption annehmen, daß die Energie des Photons 5 MeV beträgt.

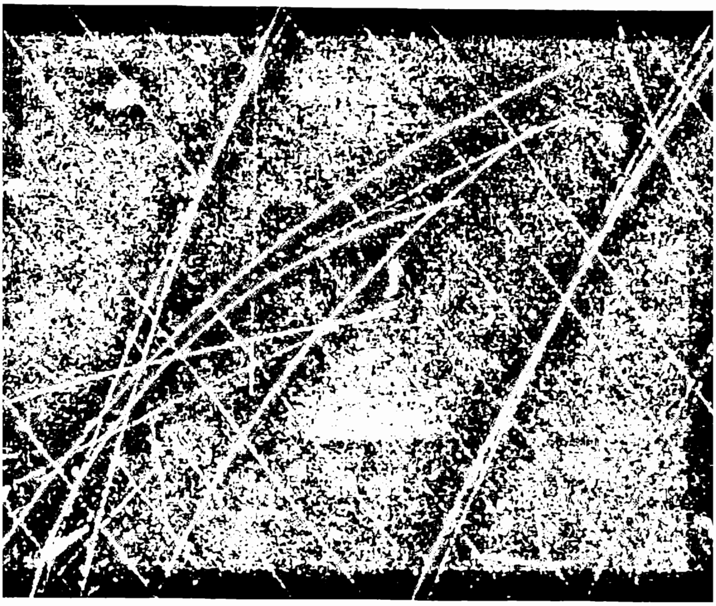
Bei Experimenten mit dieser Strahlung beobachteten IRENE und FREDERIC JOLIOT-CURIE im Jahre 1931 folgende Tatsache: Wenn man vor der Ionisationskammer, mit der die Intensität der durchdringenden Berylliumstrahlung gemessen wurde, eine Stoffschicht anbringt, die viel Wasserstoff enthält, z. B. eine Paraffinschicht, dann steigt der Strom in der Kammer stark an. Versuche mit der WILSON-Kammer zeigten klar, daß das Anwachsen des Stromes hier auf die Entstehung von Rückstoßkernen zurückzuführen ist. Beim Durchgang durch Wasserstoff oder wasserstoffhaltige Substanzen bildete die durchdringende Strahlung Rückstoßprotonen, die eine Reichweite bis zu 26 cm besitzen (Abb. 398). Rückstoßkerne entstehen auch in anderen Gasen, z. B. in Stickstoff und sogar in dem schweren Kryptongas.

Es zeigte sich also, daß die durchdringende Strahlung des Berylliums und anderer leichter Elemente die Fähigkeit besitzt, schweren Teilchen einen großen Impuls zu erteilen. Eine derartige Eigenschaft der Strahlung läßt sich sehr schwer mit ihrer Quantennatur in

---

[1]) E. RUTHERFORD: „Nuclear Constitution of Atoms". Proceedings of the Royal Society. A. 97, p. 374 (1920).

ringen. Wenn man z. B. annimmt, daß die Rückstoßkerne in Wasser
lurch den Zusammenstoß eines Photons mit einem Wasserstoffkern ä
ßelektronen beim COMPTON-Effekt entstehen, dann muß das Photon
Protons der Reichweite 26 cm eine Energie von 50 MeV und nicht 5 Me



. Rückstoßprotonen, die durch Einwirkung von Neutronen im Methan e

heinbare Paradoxon wurde von CHADWICK gelöst. Er zeigte, daß die
n allen Gasen bis zum Krypton beobachtet wurden, eine Geschwin
sie erhalten müßten, wenn sie nicht mit einem Photon, sondern
eilchen, deren Masse annähernd der Protonenmasse gleich ist, zusamn
nen die Masse dieses Teilchens mit m, seine Geschwindigkeit vor und
, bzw. v_1, die Masse des Rückstoßkerns mit M, seine Geschwindigke
wir gleich Null und nach dem Stoß — gleich v. Im Falle des elastische
n Energie- und Impulssatz den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v^2,$$

$$m v_0 = m v_1 + M v.$$

nieren v_1 und erhalten

$$v = \frac{2m}{M + m} v_0.$$

Beim Durchgang durch Wasserstoff gilt $M = 1$, durch Stickstoff $M = 14$. Das Verhältnis der Geschwindigkeit beträgt daher

$$\frac{v_H}{v_N} = \frac{m + 14}{m + 1}.$$

Die Geschwindigkeiten v_H und v_N wurden experimentell ermittelt: $v_H = 3{,}3 \cdot 10^9$ cm/sec, $v_N = 4{,}7 \cdot 10^8$ cm/sec. Wenn wir diese Werte in die vorangegangene Beziehung einsetzen, ergibt sich $m = 1{,}15$ mit einer Genauigkeit von ungefähr 10%. Teilchen mit einer Masse von etwa 1 müssen also beim zentralen Stoß in Wasserstoff und Stickstoff Rückstoßkerne erzeugen, deren Geschwindigkeitsverhältnis gerade gleich der experimentell beobachteten Größe ist.

Wenn diese Teilchen außerdem keine elektrische Ladung besitzen, fehlen die elektrostatischen Wechselwirkungen zwischen ihnen und den Kernen. Derartige Teilchen müssen deshalb sogar durch so schwere Substanzen wie Blei frei hindurchgehen. Die Wechselwirkung, die zur Bildung der Rückstoßkerne führt, kann jedoch durch das magnetische Moment dieser Teilchen oder durch Kernkräfte bedingt werden. Damit war die von RUTHERFORD vorausgesagte Existenz von ladungsfreien Teilchen der Masse 1 bestätigt.

§ 297. Masse, Spin und magnetisches Moment des Neutrons

Die im vorigen Paragraphen angeführte Berechnung der Neutronenmasse, die auf Geschwindigkeitsmessungen der Rückstoßkerne beruht, kann, wie schon gesagt wurde, keinen Anspruch auf Genauigkeit erheben. Zur genauen Bestimmung müssen Kernreaktionen herangezogen werden. Aus Kernreaktionen findet man gewöhnlich die Massendifferenz $n - H^1$, d. h. die Differenz der Massen des Neutrons und des Wasserstoffatoms (einschließlich der Elektronenmasse). Man kann hierzu z. B. den Kernphotoeffekt an Deuteronen benutzen. Er liefert

$$_1D^2 + Q_\gamma = {}_0n^1 + {}_1H^1, \tag{297,1}$$

wobei Q_γ gleich der Photonenenergie $h\nu$ minus der Summe der kinetischen Energien der entstehenden Teilchen (Neutron + Proton) ist. Mit dem Massenspektrographen kann man ferner die Massendifferenz des Wasserstoffmoleküls H^1H^1 und des Deuteriumatoms

$$H^1H^1 - D^2 = M \tag{297,2}$$

feststellen. Wenn man (297,1) und (297,2) zusammenfaßt und $H^1H^1 = 2H^1$ beachtet, da die Bildungsenergie des Wasserstoffmoleküls vernachlässigt werden kann, erhält man

$$n - H^1 = Q_\gamma - M. \tag{297,3}$$

Die glaubwürdigsten Bestimmungen des Q_γ liefern

$$Q_\gamma = 2{,}187 \text{ MeV}$$

und die genauesten massenspektroskopischen Bestimmungen

$$M = 1{,}432 \text{ MeV},$$

so daß man

$$n - H^1 = 0{,}755 \text{ MeV} \tag{297,4}$$

erhält.

Einen anderen Weg zur Bestimmung von $n - H^1$ eröffnet das Studium der Kernreaktionen unter Bildung radioaktiver Kerne.

Hierher gehört z. B. der Zyklus

$$\left.\begin{aligned} {}_7N^{14} + {}_0n^1 &= {}_6C^{14} + {}_1H^1 + Q_{np}, \\ {}_6C^{14} &= {}_7N^{14} + E^- + \mu. \end{aligned}\right\} \tag{297,5}$$

In der ersten Gleichung bedeutet Q_{np} die Differenz der kinetischen Energien des befreiten Protons und des einfallenden Neutrons. In der zweiten Gleichung tritt die Masse des vom Kern C^{14} ausgesandten Elektrons nicht explizit auf, da in der Elektronenhülle des neutralen Atoms ${}_7N^{14}$ im Vergleich zum ${}_6C^{14}$ ein überflüssiges Elektron vorhanden ist. E^- ist die maximale kinetische Energie des Elektrons, die aus der oberen Grenze des β-Spektrums bestimmt wird. μ bezeichnet die Masse des Neutrinos; man kann sie gleich Null setzen. Wenn man dies alles beachtet, erhält man aus (297,5)

$$n - H^1 = Q_{np} + E^-.$$

Die auf diesem Wege ermittelten Werte von $n - H^1$ schwanken zwischen 0,845 und 0,685 MeV. Als zuverlässigster Wert gilt

$$n - H^1 = 0{,}755 \text{ MeV}$$

oder

$$n = H^1 + 0{,}755\,.$$

Um von den Energiewerten zu den Masseeinheiten überzugehen, muß man berücksichtigen, daß 1 MeV $= 1{,}07390 \cdot 10^{-3}$ ME gilt (siehe Tabelle XLII, S. 306). Man erhält also 0,755 MeV $= 0{,}000811$ ME. Wenn man für H^1 den genauesten Wert nimmt,

$$H^1 = 1{,}008130,$$

der mit einem Massenspektrographen bestimmt wurde, ergibt sich als genaue Neutronenmasse

$${}_0n^1 = 1{,}008941 \pm 0{,}00002\,. \tag{297,6}$$

Aus (297,6) folgt, daß die Masse des Neutrons nicht nur größer als die des Protons ist, sondern sich auch größer als die Summe der Massen des Protons und eines freien Elektrons erweist (die Bindungsenergie des Elektrons im Atom H^1 von 13,5 eV kann man vernachlässigen). Von den beiden Isobaren Neutron und Proton muß also das Neutron radioaktiv, und zwar β^--radioaktiv, sein. Die maximale kinetische Energie der β^--Elektronen ergibt sich aus (297,4) zu

$${}_0n^1 = H^1 + 0{,}775 = p + e^- + \mu + E^-,$$

wo μ die Masse des Neutrinos und E^- wie früher die maximale kinetische Energie des β^--Elektrons bezeichnen. Wenn wir $\mu = 0$ und innerhalb der erwähnten Genauigkeitsschranken $H^1 = p + e^-$ setzen, erhalten wir

$$E^- = 0{,}75 \text{ MeV}.$$

Aus diesem Wert für die Maximalenergie kann man nach der Theorie des β-Zerfalls die Halbwertszeit des freien Neutrons ausrechnen. Sie ergibt sich zu etwa 20 bis 30 min.

Wegen großer experimenteller Schwierigkeiten gelang es lange Zeit nicht, die Radioaktivität des Neutrons im Versuch zu beobachten. 1950 wurden gleichzeitig die Forschungsergebnisse zweier Laboratorien veröffentlicht. In den Arbeiten wurde unabhängig voneinander die Radioaktivität des Neutrons festgestellt und bewiesen, daß das Proton als Zerfallsprodukt auftritt[1]). Die Halbwertszeit konnte laut diesen Versuchen, in roher Abschätzung, zwischen 9 und 24 min liegen.

Die nach der Masse nächstwichtigen Eigenschaften des Neutrons sind sein Spin und sein magnetisches Moment. I. E. Tamm und S. Altschuler stellten zuerst fest, daß das Neutron, obwohl es keine Ladung besitzt, trotzdem ein magnetisches Moment besitzen muß. Sie sagten theoretisch das richtige Vorzeichen dieses Moments voraus und schätzten seinen ungefähren Betrag ab. Eine direkte Methode zur Bestimmung des magnetischen Moments des Neutrons, die von Alvarez und Bloch vorgeschlagen wurde, stellt eine modifizierte Methode der Hochfrequenzspektroskopie von Rabi dar. Das Prinzip der Methode von Alvarez und Bloch besteht in der Ausnutzung der durch das magnetische Moment des Neutrons verursachten Polarisation eines Neutronenbündels beim Durchgang durch magnetisiertes Eisen.

Beim Durchgang durch eine beliebige Substanz werden die Neutronen wegen der Wechselwirkungen mit den Atomen der Substanz gestreut. Stellen wir uns vor, daß das Neutronenbündel durch magnetisiertes Eisen hindurchgeht. Die Eisenatome sind bei Magnetisierung bis zur Sättigung mit ihren magnetischen Momenten nach einer bestimmten Richtung orientiert. Wenn das Neutron auch ein magnetisches Moment besitzt, dann wird dieses mit dem magnetischen Moment des Atoms in Wechselwirkung treten, und zwar so, wie es bei zwei magnetischen Dipolen der Fall ist. Wenn speziell die Dipole parallel stehen, stoßen sie sich ab. Wenn sie aber antiparallel gerichtet sind, ziehen sie sich an. Es ist deshalb leicht zu verstehen, daß beim Durchgang eines Neutronenbündels mit zufällig verteilten Richtungen der magnetischen Momente durch bis zur Sättigung magnetisiertes Eisen hauptsächlich diejenigen Neutronen gestreut und aus dem Bündel abgelenkt werden, deren magnetische Momente der Magnetisierung des Eisens parallel gerichtet sind. Das Bündel reichert sich deshalb mit Neutronen, die antiparallelen Spin besitzen, an und wird folglich teilweise polarisiert. Wenn dieses polarisierte Bündel durch ein zweites Eisenstück, das entgegengesetzt zum ersten magnetisiert ist, hindurchgesandt wird, dann ist ein solches System zweier antiparallel magnetisierter Eisenstücke zwei gekreuzten Nicolschen Prismen völlig analog. Die erste Eisenscheibe wird dabei die Rolle des Polarisators und die zweite die des Analysators spielen. Zwei parallel magnetisierte Eisenstücke stellen einen Polarisator und einen Analysator dar, die parallel gestellt sind. Im ersten Fall „löscht" der Analysator das Bündel und im zweiten läßt er es mit maximaler Intensität durch.

Stellen wir uns nun vor, daß im Raum zwischen den antiparallel magnetisierten Eisenstücken (d. h. zwischen gekreuztem Polarisator und Analysator) ein Neutronenbündel wie bei der Methode von Rabi durch ein konstantes Feld, dem ein hochfrequentes Wechselfeld überlagert ist, tritt. Dann werden die Neutronenmagnete teilweise umorientiert, und diese umorientierten Neutronen gehen leichter durch den Analysator. Diese Erscheinung ist der Aufhellung des Feldes völlig analog, wenn sich zwischen den gekreuzten Nicols eine Substanz befindet, die die Polarisationsebene dreht. Offensichtlich ist die „Aufhellung" des Neutronenbündels dann am größten, wenn die Frequenz des Wechselfeldes in Resonanz

---

[1]) Eine Beschreibung der bei diesen Arbeiten angewandten Experimentiertechnik findet man in *Успехи физических наук*, т. XLII, вып. 2 стр. 311, 1950.

mit der Frequenz der LARMOR-Präzession steht, die die magnetischen Momente der Neutronen in bezug auf die Richtung des konstanten Feldes erfahren. Man kann auf diese Weise die Frequenz der LARMOR-Präzession feststellen und mit ihrer Hilfe das gyromagnetische Verhältnis g. Schließlich läßt sich damit das magnetische Moment des Neutrons ausrechnen, wenn man seinen Spin kennt.

Das Experiment bestätigte die dargestellten Überlegungen und ermöglichte die Bestimmung des magnetischen Moments des Neutrons. Diese Versuche wurden später mit bedeutend stärkeren Neutronenbündeln und modernisierten Geräten wiederholt. Von der Voraussetzung ausgehend, daß der Spin des Neutrons gleich $\frac{1}{2}$ sei, fand man folgenden genauen Wert des magnetischen Moments für das Neutron (in Kernmagnetonen):

$$\mu_n = -\ 1{,}9103 \pm 0{,}0012\,.$$

Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß das magnetische Moment des Neutrons antiparallel zu seinem mechanischen Moment steht. Diese Tatsache (d. h. das negative Vorzeichen des Moments) wurde durch spezielle Versuche, auf die wir nicht eingehen können, festgestellt. Über das Entstehen des magnetischen Moments beim Neutron siehe § 250.

§ 298. Neutronenquellen

Neutronen existieren nur sehr kurze Zeit im freien Zustand, da sie einerseits leicht von Kernen eingefangen werden und zum anderen radioaktiv sind und mit einer kurzen Halbwertszeit in der Größenordnung von 20 min zerfallen. Deshalb existiert kein Vorrat von Neutronen im freien Zustand in der Natur. Man muß sie durch Kernreaktionen gewinnen.

Betrachten wir kurz die wichtigsten Prozesse, die zur Gewinnung von Neutronen verwendet werden[1]).

a) *Quelle Ra + Be.* Diese Quelle stellt eine Glas- oder Metallampulle dar, in die ein Pulver aus metallischem Beryllium mit einem Radiumniederschlag gestreut wird. Das Präparat erhält man, indem man Beryllium mit der Lösung eines Radiumsalzes ($RaBr_2$) übergießt, nach deren Verdampfung sich das Radium in Form kleiner Körnchen auf der Oberfläche der Berylliumteilchen absetzt. Die Neutronen entstehen dabei durch die Reaktion

$$_4\mathrm{Be}^9 + {}_2\mathrm{He}^4 \rightarrow {}_6\mathrm{C}^{12} + {}_0n^1 + 5{,}5\ \mathrm{MeV}.$$

Wegen ihres großen Durchdringungsvermögens treten die Neutronen frei durch die Wände der Ampulle.

Da sich das Radium in der Quelle zusammen mit seinen Zerfallsprodukten befindet, unter denen es auch solche gibt, die α-Strahlen mit einer Energie bis zu 7,68 MeV aussenden, liefert die Quelle Ra + Be Neutronen mit verschiedenen Energien bis zu 13 MeV.

Die einfachste und billigste Neutronenquelle ergibt sich aus der Kombination Radon-Beryllium (Rn + Be). Man füllt hier einfach eine Glasampulle mit gasförmigem Radon.

---

[1]) Eine ausführliche Übersicht über dieses Gebiet wird in der Arbeit von N. A. WLASSOW: „Neutronenquellen“, *Успехи физических наук*, т. XLIII, вып. 2, стр. 169, 1950, gegeben. (Deutsche Übersetzung in: Abh. a. d. sowj. Physik, Folge II, 1951, 215—300.) Die unten angegebenen Zahlen wurden dem Buch von E. FERMI: „Nuclear Physics“, 1950, entnommen; siehe auch E. KOHLRAUSCH: „Praktische Physik“, Bd. II, Leipzig 1950, S. 453 und dortige Zitate. Siehe auch N. A. WLASSOW: „Neutronen“ (Н. А. Власов, Нейтроны, Москва, 1955); Deutsche Ausgabe: Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, in Vorbereitung.

Wegen der kleinen Halbwertszeit des Radons (3,8 Tage) ist diese Quelle natürlich bedeutend weniger beständig als die Quelle Ra + Be.

Wir führen einige Zahlen an, die die Neutronenausbeute in den Quellen charakterisieren, die auf der Reaktion (α, n) beruhen.

Quelle	Ausbeute
Ra + Be (1 g Ra)	$10 - 15 \cdot 10^6$ Neutronen/sec
Rn + Be (1 Curie Rn)	etwa dasselbe
Po + Be (1 Curie Po)	$2{,}8 \cdot 10^6$ Neutronen/sec
Ra + B (1 Curie Ra)	$2 \cdot 10^6$ Neutronen/sec

b) *Quellen, die auf der (γ, n)-Reaktion beruhen.* Die oben betrachteten Neutronenquellen sind durch eine große Inhomogenität der Neutronen in bezug auf ihre Energie gekennzeichnet. Um monochromatische Neutronen zu bekommen, benutzt man mitunter den Kernphotoeffekt [(γ, n)-Reaktionen]. Man beschießt am häufigsten Deuterium (schweres Wasser) und Beryllium. Als Quellen benutzt man radioaktive Präparate, die γ-Strahlen liefern. Das Präparat wird im Mittelpunkt des Raumes, der mit schwerem Wasser oder Beryllium ausgefüllt ist, angebracht. Zur Charakterisierung der Ausbeute dient folgende Zahl: 1 g Ra in der Entfernung 1 cm von 1 g Be liefert 30000 Neutronen/sec. Wir führen einige Angaben über die Energien der dabei erhaltenen Neutronen an:

Quelle der γ-Strahlen	Halbwertszeit	Beschossene Kerne	Energie der Neutronen, MeV
$_{88}Ra^{226}$	1622 Jahre	Be	0,12; 0,50
$MsTh_1$	6,7 Jahre	Be	0,16; 0,88
$MsTh_1$	6,7 Jahre	D_2O	0,22
$_{51}Sb^{124}$	60 Tage	Be	0,03
$_{11}Na^{24}$	15 Stunden	D_2O	0,24
$_{11}Na^{24}$	15 Stunden	Be	0,3

c) *Die Gewinnung von Neutronen mit Beschleunigern.* Zur Gewinnung von Neutronen in Beschleunigern werden oft (d, n)-Reaktionen, insbesondere die Reaktion $_1D^2\ (d, n)\ _2He^3$, verwandt. Das Deuterium wird in Form von schwerem Eis auf eine metallische Unterlage aufgebracht. Die Unterlage wird während der Beschießung des Deuteriums mit flüssiger Luft gekühlt. In Abb. 399 sind Kurven für die Neutronenausbeuten der verschiedenen beschossenen Substanzen in Abhängigkeit von der Deuteronenenergie dargestellt.

Um Neutronen hoher Energie zu bekommen, kann man die Reaktion zwischen Deuteronen und überschwerem Wasserstoff, Tritium, heranziehen:

$$_1H^3 + {}_1D^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1 + 17{,}6\ \text{MeV}.$$

Tritium erzeugt man in sehr kleinen Mengen durch Kernreaktionen.

Bei großen Energien der im Zyklotron beschleunigten Deuteronen erhält man Neutronen durch verschiedene Reaktionen der Deuteronen. Hier einige Angaben über die Neutronenausbeute im Zyklotron bei einer Deuteronenenergie von 10 MeV.

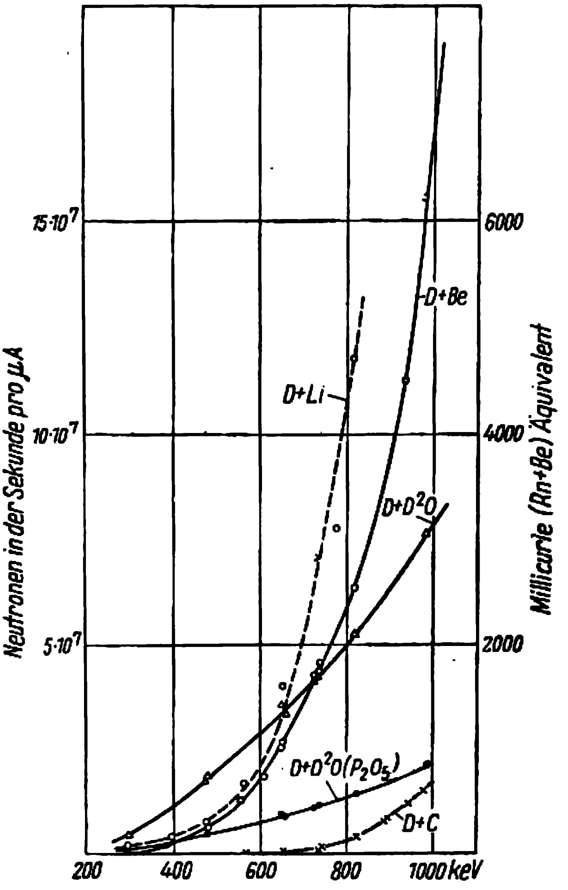


Abb. 399. Abhängigkeit der Neutronenausbeute von der Deuteronenenergie

Beschossene Kerne	Neutronenausbeute pro Mikrocoulomb $_1D^2$
D	$3{,}1 \cdot 10^{10}$
Be	$3{,}7 \cdot 10^{10}$
C	$1{,}3 \cdot 10^{10}$
Al	$0{,}9 \cdot 10^{10}$
Cu	$0{,}62 \cdot 10^{10}$

d) Der *Kernreaktor* (*Atommeiler*) *als Neutronenquelle.* Die stärkste Neutronenquelle ist zur Zeit ein Kernreaktor, in dem die Kettenreaktion der Spaltung schwerer Kerne abläuft. Über das Wesen dieser Anlage siehe nächstes Kapitel[1]).

[1]) Siehe auch die in der Fußnote auf S. 497 zitierte Arbeit von N. A. Wlassow, S. 246 ff.

Nach Angaben von FERMI liefert ein Reaktor, in dem auf jeden Kernspaltungsakt zwei Neutronen kommen, $6 \cdot 10^{13}$ Neutronen in der Sekunde pro Kilowatt Leistung des Reaktors.

§ 299. Beugung schneller Neutronen

Beim Durchgang von Neutronen durch Materie sind verschiedene Prozesse möglich, und zwar:

1. elastische Streuung,
2. unelastische Streuung,
3. Einfang.

In § 264 sahen wir, daß man bei der Betrachtung der Wechselwirkungen, zwischen Neutronen und Kernen, unbedingt das Verhältnis zwischen den Ausmaßen des Kerns und der DE-BROGLIE-Wellenlänge, die den Neutronen der gegebenen Geschwindigkeit entspricht, berücksichtigen muß. Wenn die Wellenlänge $\left(\text{genauer } \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ größer als der Kernradius oder mindestens von der gleichen Größenordnung ist, spielen Resonanz- und Interferenzeffekte die wichtigste Rolle. Der Wirkungsquerschnitt des Kerns zeigt dabei keinen gesetzmäßigen Verlauf und erweist sich manchmal um einige zehntausendmal größer als der „geometrische Querschnitt". Für Neutronen mit Energien in der Größenordnung von 10^{-2} eV, deren Wellenlänge mit den zwischenatomaren Abständen vergleichbar ist, werden schließlich, wie wir noch sehen werden, Interferenzeffekte der an den verschiedenen Atomen gestreuten DE-BROGLIE-Wellen beobachtet. Diese Effekte ermöglichten die Entwicklung neutronographischer Analysenmethoden (siehe § 301), die den Methoden der röntgenographischen und elektronographischen Analyse völlig analog sind und in bestimmten Fällen den letzteren gegenüber sogar gewisse Vorzüge besitzen.

Ein anderes Bild ergibt sich für große Neutronenenergien und dementsprechend kleine Wellenlängen. Für $\lambda/2\pi \ll R$ kann nämlich auf die Wechselwirkung der Neutronenwellen mit dem Kern die Näherung der geometrischen Optik angewandt werden. Der Kern muß in bezug auf den Neutronenstrom wie ein undurchsichtiger Schirm wirken, der einen geometrischen „Schatten" wirft. Sein Wirkungsquerschnitt muß für elastische Neutronenstreuung seinem „geometrischen" Querschnitt πR^2 entsprechen. Es wäre jedoch falsch, zu glauben, daß sich in diesem Falle keinerlei Welleneffekte zeigen. Es ist im Gegenteil aus der Wellenoptik bekannt, daß auch für $\lambda \ll R$ im Schattengebiet Beugungserscheinungen beobachtet werden. Diese Erscheinungen werden in der Optik gerade dann beobachtet, wenn der Schirm völlig undurchsichtig ist und seine Ausmaße im Vergleich zur Wellenlänge groß sind. Die Rechnung zeigt, daß sich das Beugungsbild in diesem Falle auf Winkel der Größenordnung $\lambda/2\pi R$ konzentriert; wenn $\lambda/2\pi \ll R$ gilt, sind diese Winkel sehr klein. Die Erscheinung ist dann schwierig wahrzunehmen. Sie wird aber trotzdem beobachtet, wie dies die außerordentlich eindrucksvollen Versuche von W. K. ARKADJEW, A. S. BERKMAN und N. N. JAKOWLEW (durchgeführt im Jahre 1912) beweisen. Es wurden dabei z. B. Beugungserscheinungen (Abb. 400) mit sichtbarem Licht von solchen Objekten wie einer Hand, die einen Teller hält, photographiert[1])!

[1]) In Wirklichkeit wurde bei diesen Versuchen ein verkleinertes, aber trotzdem völlig „makroskopisches" Modell des Objekts verwandt. Unter diesen Bedingungen konnte man ein scharfes Beugungsbild nur bei einem Abstand der Größenordnung von 10 Meter vom Objekt beobachten.

Der Atomkern verhält sich in bezug auf Neutronen bestimmter Energien wie eine u: durchsichtige Kugel. Wenn die Neutronen eine Energie besitzen, für die $\lambda/2\pi \ll R$ gilt, mı man auch hier im „Schattengebiet" ein Beugungsbild beobachten.

Wir wollen zuerst nachrechnen, bei welchen Neutronenenergien das zu erwarten ist. D Gleichheitsbedingung für $\frac{\lambda}{2\pi}$ und den Kernradius liefert

$$R = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h/2\pi}{\sqrt{2ME}},$$

woraus

$$E = \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^2}{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24} R^2}$$

folgt. Mit $R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ erhält man

$$E = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-54}}{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24} \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-26} A^{\frac{2}{3}}} \text{ erg} =$$

$$= \frac{1{,}4 \cdot 10^{-5}}{A^{\frac{2}{3}}} \text{ erg} \cdot \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{erg}}{\text{MeV}}} = \frac{8{,}9}{A^{\frac{2}{3}}} \text{ MeV}.$$

Für $A = 50$ ist also $E \approx 0{,}65$ MeV, für $A = 200$ gerade $E = 0{,}26$ MeV. Daraus folgt, daß die Bedingung $\lambda/2\pi \ll R$ für eine Energie von etwa 100 MeV völlig befriedigt wird. Die Erscheinung muß sich dabei im Auftreten eines Beugungsbildes bei elastischer Streuung von Neutronen an Kernen äußern. Eine solche Neutronenstreuung bezeichnet man deshalb als Beugung. In gewissem Sinne ist die Beugung im Falle von Neutronen sogar leichter als im optischen Falle zu beobachten. In der Optik ist nämlich $\lambda \sim 10^{-5}$ cm, so daß man bei einem Schirmradius von 10 cm $\frac{\lambda}{2\pi R} \sim 10^{-7}$ erhält, während dieses Verhältnis für Neutronen von 100 MeV und für schwere Kerne in der Größenordnung von 10^{-2} liegt. Deshalb muß die Erscheinung am Orte der Empfangsapparatur ganz deutlich beobachtbar sein.

Abb. 400. Versuch von ARKADJE\ BERKMAN und JAKOWLEW. Beugung an einem Teller

Nach dem oben Gesagten werden wir den Kern als völlig undurchsichtige Kugel oder Scheibe betrachten. Die Wellenoptik stellt für die Beugung ebener Wellen (Fraunhofersche Beugung) an einem solchen Objekt das sogenannte BABINETsche Prinzip auf[1]).

Danach fällt das Beugungsbild einer undurchsichtigen Scheibe in bezug auf die Intensität verteilung genau mit dem Beugungsbild einer Öffnung zusammen, die sich in einem unendli(großen undurchsichtigen Schirm befindet und die gleiche Größe wie die Scheibe besitz

1) Siehe z. B. M. BORN: „Optik", Berlin, 1933, § 47; siehe auch A. SOMMERFELD: „Vorlesungen üb theoretische Physik", Bd. IV, S. 207, Dieterich, Wiesbaden, 1950.

Mit anderen Worten ist die Beugung an einem undurchsichtigen Hindernis die gleiche wie an einer Öffnung gleicher Größe[1]). Für die Fraunhofersche Beugung an einer Öffnung ist jedoch die Existenz eines mehr oder weniger scharfen Maximums in der Bildmitte charakteristisch. Ein solches Maximum wird auch für die Beugung bei elastischer Streuung schneller Neutronen an Kernen beobachtet. In Abb. 401 ist die Kurve für die Winkelverteilung von Neutronen der Energie 84 MeV, die elastisch an Aluminiumkernen gestreut wurden, wiedergegeben. Diese Kurve verdeutlicht das Gesagte.

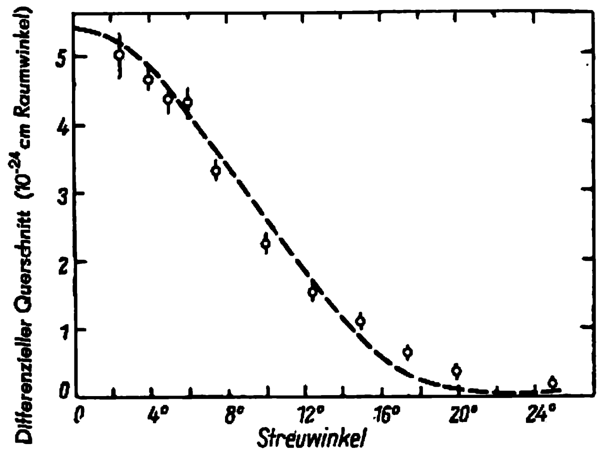


Abb. 401. Beugung bei elastischer Streuung schneller Neutronen durch Aluminiumkerne

Die in Abb. 401 dargestellte Winkelverteilung der Neutronen charakterisiert den differentiellen Wirkungsquerschnitt für eine rein elastische Neutronenstreuung in der gegebenen Richtung. Es wurden auch Messungen des totalen Wirkungsquerschnitts der Kerne für schnelle Neutronen durchgeführt. Man ging bei diesen Versuchen so vor, daß man die Entfernung von Neutronen aus dem Parallelbündel durch alle möglichen Prozesse, d. h. durch elastische und unelastische Streuung sowie auch Absorption, in Betracht zog. Wie wir von früher wissen, muß dieser totale Wirkungsquerschnitt σ_t unmittelbar mit dem geometrischen Querschnitt des Kerns zusammenhängen. Die Rechnung zeigt jedoch[2]), daß σ_t nicht einfach gleich πR^2 ist, sondern das Doppelte ausmacht:

$$\sigma_t = 2\pi R^2 . \qquad (299,1)$$

---

[1]) Die quantenmechanische Rechnung der Neutronenbeugung führt für $\lambda/2\pi \ll R$ zum gleichen Resultat; siehe A. Achieser und I. Pomerantschuk: „Einige Fragen der Kerntheorie" (А. Ахиезер и И. Померанчук: „Некоторые вопросы теории ядра", изд. 2-е, Гостехиздат 1950, §§ 20—22), wo eine vollständige Analyse der Beugungserscheinungen bei Streuung von Neutronen gegeben wird; siehe auch: Blatt and Weisskopf: „Theoretical Nuclear Physics", p. 168 ff., New York Wiley, 1952.

[2]) Siehe A. Achieser und I. Pomerantschuk, die zitierte Monographie, S. 197 ff. Analog beträgt auch in der Optik der totale Schwächungskoeffizient infolge Streuung für $\lambda \ll R$ nicht πr^2, wie auf der Grundlage der geometrischen Optik zu erwarten ist, sondern $2\pi R^2$; siehe auch K. S. Schifrin: „Streuung des Lichts im trüben Medium" (К. С. Шифрин: „Рассеяние света в мутной среде", Гостехиздат, 1951, стр. 144 и след).

Das folgt aus der Tatsache, daß für $\lambda/2\pi \ll R$ bei rein elastischer Streuung die geometrische Näherung, d. h. die klassische Mechanik, gelten muß. Diese liefert natürlich für die Streuung von Teilchen an einer undurchdringlichen Kugel πR^2. Außer der elastischen Streuung muß man jedoch beim totalen Querschnitt auch diejenigen Prozesse berücksichtigen, die mit der Absorption (unelastische Streuung und Einfang) zusammenhängen. Für diese ergibt die Rechnung ebenfalls πR^2. Diese Gleichheit der Querschnitte für elastische Streuung und Absorption kann man ohne Rechnung begründen, indem man auf eine optische Analogie, und zwar auf das schon erwähnte BABINETsche Prinzip, verweist. Da nämlich die Beugungsbilder eines undurchsichtigen Schirms und einer Öffnung völlig gleich sind, muß die Intensität der an der Öffnung gebeugten Wellen gleich der Intensität der vom Schirm absorbierten Wellen sein. Da der Querschnitt für den letzteren offensichtlich πR^2 beträgt, muß der totale Querschnitt $2\pi R^2$ betragen.

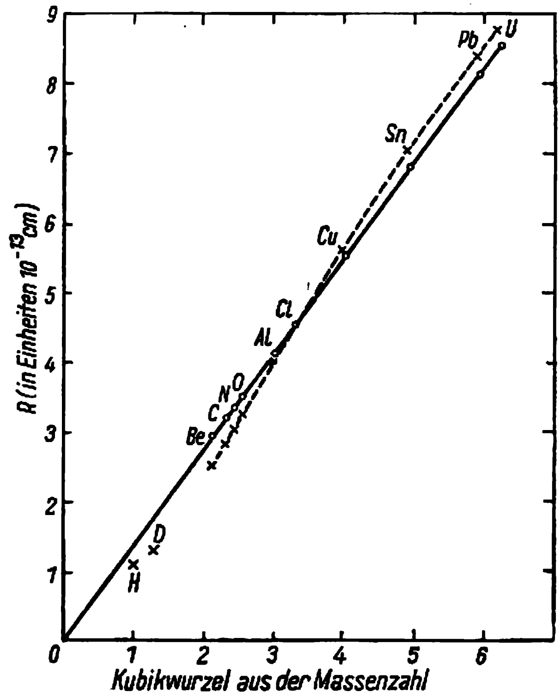


Abb. 402. Zusammenhang zwischen den aus dem totalen Querschnitt für die Streuung schneller Neutronen berechneten Kernradien und den Kubikwurzeln aus den Massenzahlen

Die Messung des totalen Querschnitts erlaubt also die Kernradien auszurechnen und die bekannte Beziehung $R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ nachzuprüfen. In Abb. 402 sind auf der Abszissenachse die Werte von $A^{\frac{1}{3}}$ und auf der Ordinatenachse die nach Formel (299,1) aus dem totalen Querschnitt berechneten Werte für R aufgetragen. Die experimentellen Ergebnisse sind als Kreuze in die Darstellung eingetragen. Man sieht, daß der lineare Zusammenhang zwischen R und $A^{\frac{1}{3}}$ nur annähernd erfüllt ist und die Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

Diese Abweichung kann auf folgende interessante Weise interpretiert werden[1]). Die in Abb. 402 wiedergegebenen Ergebnisse wurden mit Neutronen von 95 MeV erzielt. In § 269 sahen wir schon, daß $\lambda/2\pi$ bei einer solchen Energie kleiner als der Wirkungsradius der Kernkräfte ist und daß man den Kern nicht als absolut undurchsichtig ansehen darf. Deshalb kann das Modell, auf dessen Grundlage die Radien R berechnet wurden, nur näherungsweise benutzt werden. In einer genaueren Theorie muß man die Kernsubstanz als „halbdurchsichtig" für sehr schnelle Neutronen betrachten, d. h., man muß ihren Absorptionskoeffizienten für Neutronenwellen oder, was dasselbe ist, die mittlere freie Weglänge des Neutrons im Kern berücksichtigen. In diesem Falle muß auch noch der Brechungsindex der Kernsubstanz für Neutronen entsprechender Energie beachtet werden, da von ihm die Phasenänderung der durch den Kern laufenden Welle abhängt.

Den Absorptionskoeffizienten K kann man näherungsweise folgendermaßen abschätzen. Wenn $\bar{\sigma}$ den mittleren Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an einzelnen Nukleonen des Kerns bedeutet, wird K für einen Kern mit der Massenzahl A etwa dem für die Volumeneinheit berechneten Querschnitt gleich:

$$K = \frac{A\bar{\sigma}}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Für Neutronen von 84 MeV erhält man $K = 2{,}2\cdot 10^{12}\ \mathrm{cm}^{-1}$, was einer mittleren Reichweite von $4{,}5\cdot 10^{-13}$ cm entspricht. Für Neutronen von 95 MeV sind die entsprechenden Zahlen $3{,}0\cdot 10^{12}\ \mathrm{cm}^{-1}$ und $3{,}3\cdot 10^{-13}$ cm.

Der Brechungsindex für Neutronenwellen wird ebenso wie der Brechungsindex für Elektronenwellen berechnet [siehe Teil I, § 134, Formel (134,2)]. Wenn wir mit V_0 die mittlere potentielle Energie des Neutrons im Kern und mit E die kinetische Energie des einfallenden Neutrons bezeichnen, ist

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}}.$$

Für $V = 30$ MeV ergibt sich bei $E = 90$ MeV $\mu = 1{,}155$.

Mit diesen beiden Konstanten K und μ kann man den Querschnitt und daraus auch die Kernradien auf Grund des „halbdurchsichtigen" Kernmodells ausrechnen. Man erhält dabei die in Abb. 402 als Kreise aufgetragenen Zahlen. Wie wir sehen, liegen diese Kreise schon gut auf einer Geraden und bestätigen damit die Beziehung $R = 1{,}5\cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ cm.

§ 300. Absorption und Streuung langsamer Neutronen

An der Erforschung der Wechselwirkung langsamer Neutronen mit Substanzen besteht ebenfalls großes Interesse. Schon die ersten qualitativen Untersuchungen ergaben, daß der Wirkungsquerschnitt für verschiedene Isotope einen sehr eigentümlichen Verlauf und eine scharf ausgeprägte Selektivität zeigt: Bei einigen Isotopen und bei bestimmten Geschwindigkeiten der Neutronen wächst der Querschnitt auf das Tausendfache im Vergleich zu dem von den Kernkräften bedingten Kernquerschnitt an. Dies zeigt, daß geometrische Überlegungen für langsame Neutronen überhaupt nicht anwendbar sind. Die Streuung gehorcht Wellengesetzen, aus denen die Formel von Breit und Wigner, die in § 264 be-

[1]) Siehe A. Achieser und I. Pomerantschuk, zitierte Monographie, § 21.

handelt wurde, folgt. Wegen der scharf ausgeprägten Selektivität in der Neutronenabsorption, d. h. wegen der existierenden Resonanzeffekte, sind zur Untersuchung der Wechselwirkung der Neutronen mit den Kernen monoenergetische Neutronenströme erforderlich. Ihre Erzeugung wurde durch die großen Fortschritte der Experimentiertechnik möglich.

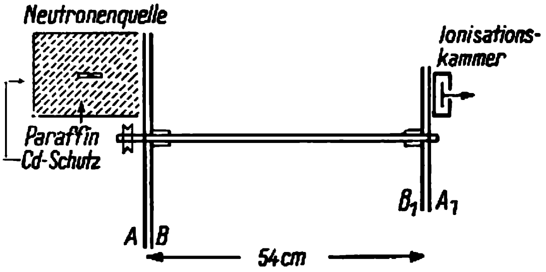


Abb. 403. Mechanischer Geschwindigkeitsselektor für langsame Neutronen

Es gibt einige Methoden zur „Monochromatisierung“ von Neutronen. Wir betrachten kurz die wichtigsten von ihnen.

1. *Der mechanische Geschwindigkeitsselektor.* Die einfachste Ausführung dieses Gerätes besteht in folgendem:

Zwischen der Neutronenquelle, die sich im Innern eines Paraffinzylinders befindet, und der Ionisationskammer sind vier Scheiben aus Duraluminium A, B, B_1, A_1 angeordnet (Abb. 403). Zwei von ihnen, A und A_1 bleiben unbeweglich, während sich die beiden anderen, B und B_1, schnell drehen. Auf jeder Scheibe sind 50 Cd-Sektoren befestigt, zwischen denen Zwischenräume aus Duraluminium liegen. Man sieht sofort, daß dieses System ebenso wie das Zahnrad beim Fizeauschen Versuch zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit wirkt. Das Wesentliche ist, daß Kadmium eine besonders hohe Wahrscheinlichkeit für die Absorption langsamer Neutronen besitzt (siehe oben § 266). Wenn die Kadmiumsektoren der in Drehung befindlichen Scheiben mit den Zwischenräumen aus Duraluminium der unbeweglichen Scheiben zusammenfallen, werden die Neutronen zurückgehalten. Wenn sich die Kadmiumsektoren bei der Drehung gegenüberstehen, treten die Neutronen frei durch die zusammenfallenden Aluminiumsektoren hindurch.

Wir werden den Durchgang der Neutronen von der Quelle durch das linke Scheibenpaar als „Aufblitzen“ und die Scheibenteile zwischen den Kadmiumsektoren als Spalt bezeichnen. Der Spalt ist in beiden Sektorenpaaren geöffnet, wenn sich die Kadmiumsektoren gegenüberstehen, und geschlossen, wenn die Kadmiumsektoren der sich drehenden Scheiben den Zwischenräumen der starren Scheiben aus Aluminium gegenüberstehen. Es möge zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Aufblitzen erfolgen und eine Gruppe von Neutronen verschiedener Energien in den Raum zwischen den sich drehenden Scheiben fallen. Wenn irgendein Neutron die Geschwindigkeit v besitzt und die Entfernung zwischen den Scheiben B und B_1 gleich d ist, dann beträgt die Zeit t, die das Neutron zum Durchfliegen dieser Strecke braucht, $\frac{d}{v}$. Während dieser Zeit drehen sich die beweglichen Scheiben um einen gewissen Winkel ωt, wenn ω die Kreisfrequenz der Drehung ist. Wenn dieser Winkel so groß ist, daß der Spalt im

rechten Scheibenpaar geöffnet ist, dann geht das Neutron durch den Spalt und wird von der Ionisationskammer registriert. Unter der Voraussetzung, daß man die Spaltbreite gegenüber der Breite des Kadmiumschirms vernachlässigen kann, sieht man leicht, daß sich der Spalt bei einer Drehung der Scheibe um den Winkel $\omega = \frac{2\pi}{50}$ öffnet. Die Bedingung für den Durchgang des Neutrons durch das zweite Scheibenpaar ist deshalb

$$\frac{2\pi}{50} = \omega t = \frac{2\pi}{\tau} t,$$

wobei τ die Zeit für eine Umdrehung der Scheibe ist. Hieraus finden wir $t = 0{,}02\,\tau$.

Andererseits ist $\frac{d}{v} = t = 0{,}02\,\tau$, woraus

$$v = \frac{d}{0{,}02\tau} = 50nd$$

folgt. n ist die Umdrehungszahl der Scheibe pro Sekunde. Durch Änderung dieser Zahl kann man aus jedem Aufblitzen Neutronen einer bestimmten Geschwindigkeit aussondern.

Die vorliegende Rechnung ist in Wirklichkeit stark schematisiert. Vor allem hat der Spalt und folglich auch die Zeit, während der er geöffnet ist, eine endliche Größe. Der Spalt darf nicht zu klein gemacht werden, da sonst das Aufblitzen, d. h. die Zahl der Neutronen, die während der Öffnungszeit des Spaltes durch das linke Scheibenpaar gehen, zu gering wäre. Bei der praktischen Ausführung des Selektors mußte man sogar die Kadmiumsektoren und die Zwischenräume aus Duraluminium nur wenig verschieden bemessen. Man sieht aber, daß während der endlichen Öffnungszeit durch den rechten (Ausgangs-)Spalt Neutronen mit Geschwindigkeiten treten, die in dem mehr oder weniger breiten Intervall zwischen v und $v + \Delta v$ liegen. Deshalb kann ein derartiger mechanischer Selektor nur annähernd monochromatische Neutronen liefern. Trotzdem hat man mit einem solchen unvollständigen Selektor anfangs eine Reihe interessanter Ergebnisse erzielt. Es wurde z. B. gezeigt, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen nach dem Durchgang durch Paraffin ungefähr der MAXWELLschen Kurve entspricht.

2. *Die Laufzeitmethode.* Diese Methode beruht auf der getrennten Registrierung der Neutronen, die zum Durchfliegen einer bestimmten Entfernung verschiedene Zeiten brauchen. In der folgenden nützlichen Tabelle sind Daten zusammengestellt, die sich auf die Geschwindigkeiten und andere Eigenschaften langsamer Neutronen beziehen (Tabelle LVIII auf S. 507).

Aus dieser Tabelle geht hervor, daß die von langsamen Neutronen zum Durchfliegen einer 5,4 m langen Strecke benötigte Zeit durchaus meßbar ist, wenn man die moderne Elektronik zu Hilfe nimmt. Neutronen der Energie 0,01 eV benötigen für diese Strecke z. B. 3900 μsec $= 3{,}9 \cdot 10^{-3}$ sec.

Wenn es sich um eine Neutronenquelle handelt, deren Intensität konstant bleibt, so kann nur die Methode des mechanischen Geschwindigkeitsselektors, deren Prinzip oben geschildert wurde, angewendet werden. Man findet indessen leicht heraus, daß das erste (linke) Scheibenpaar in diesem Selektor die Rolle eines Intensitätsmodulators des Neutronenstroms spielt. Die Modulation kann jedoch auch anders erreicht werden. Wenn man als Neutronenquelle ein Berylliumtarget benutzt, das mit Protonen oder Deuteronen eines Zyklotrons be-

229	723	2286
1235	3900	12350
0,905	2,86	9,05
18	21	23
0,4	0,2	0,2
4	9	20

schossen wird, dann kann man die erforderliche periodische Intensitätsänderung des Neutronenstroms erzielen, indem man die Stromstärke oder die Spannung am Bogen, der die im Zyklotron zu beschleunigenden Ionen liefert, moduliert. Man sieht, daß das Neutronenbündel im gleichen Maße wie der Strahl der geladenen Teilchen, unter deren Wirkung die Neutronen entstehen, moduliert wird. Diese Methode wurde von mehreren Forschern in verschiedenen Modifikationen angewandt. Durch Modulation der Beschleunigungsspannung des Bogens konnte man Neutronenblitze, die sich auf 50 bis 100 μsec erstreckten, 400mal in der Sekunde erzeugen („zwinkerndes" Bündel). Der modulierte Neutronenstrom, den man in Paraffin gebremst hatte, wurde von einem Detektor (Ionisationskammer mit Bortrifluorid oder Proportionalzähler mit der gleichen Füllung) in einem bestimmten Abstand von der Quelle (5,4 cm) empfangen und mit einem komplizierten hochfrequenztechnischen Gerät registriert. In diesem Gerät wurden die verstärkten und gleichgerichteten Signale des Zählers (oder der Kammer) auf Spezialkanäle des Geräts verteilt, von denen es im modernsten Selektor 32 gab. Jeder Kanal war so geschaltet, daß er nur Neutronen mit bestimmter Laufzeit registrierte. Dies wurde durch eine Koinzidenzschaltung erreicht: Auf jeden Kanal wurden außer den Zählrohrimpulsen zusätzliche (Steuer-)Impulse übertragen, die für jeden Kanal eine bestimmte Verzögerungszeit besaßen. Das Gerät reagierte nur auf zusammenfallende Impulse. Die am Ausgang jedes Kanals angeordneten mechanischen Zähler zeigten deshalb nur Neutronen an, deren Laufzeit mit der Verzögerungszeit des Steuerimpulses zusammenfiel. Ein Kanal zählte außerdem die gesamte Neutronenzahl, die allen Geschwindigkeiten entspricht. Durch diese vollständige Automatisierung verkürzte sich natürlich die zur Messung erforderliche Zeit auf ein Minimum, während die Genauigkeit erhöht wurde[1]).

Ihre erste Anwendung erfuhren die beschriebenen Selektoren beim Studium der Geschwindigkeitsverteilung langsamer Neutronen. Wenn beim Durchgang schneller Neutronen durch Paraffin *vollständiges Temperaturgleichgewicht* zwischen den Neutronen und den Atomen des Stoffes erreicht würde, wäre die Kurve für die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen die MAXWELLsche Kurve *für die entsprechende Temperatur der bremsenden Substanz*. Messungen mit Hilfe von Selektoren zeigten, daß die MAXWELLsche Kurve in Wirklichkeit wesentlich verzerrt ist. In Abb. 404 ist die Verteilungskurve für Neutronen, die durch eine dicke Paraffinschicht hindurchgegangen sind, wiedergegeben. Die MAXWELLsche Kurve für die Temperatur 390° K ist ausgezogen dargestellt, und die experimentell ermittelten Werte sind durch Kreise bezeichnet. Auf der Abszissenachse unten sind die Laufzeiten der Neutronen so aufgetragen, daß die Geschwindigkeiten von rechts nach links zunehmen. Man sieht, daß die experimentelle Kurve für kleine Laufzeiten, d. h. große Geschwindigkeiten, stark von der MAXWELLschen Kurve abweicht. Bei großen Laufzeiten (kleinen Geschwindigkeiten) liegen die experimentellen Punkte gut auf der MAXWELLschen Kurve, die jedoch der Temperatur 390°K, d. h. einer um 30% höheren Temperatur als der des Paraffinblocks, entspricht. Mit anderen Worten: Die Temperatur des Neutronengases erweist sich um 30% höher als die des Moderators (der bremsenden Substanz), so daß sich also für die gegebene Paraffinschicht kein vollständiges Gleichgewicht herstellt.

Die Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen zeigt jedoch, daß die Neutronentemperatur sowohl von den Erzeugungsbedingungen des primären (zu brem-

---

[1]) Leser, die an Einzelheiten dieser komplizierten Anlagen interessiert sind, verweisen wir auf die Arbeiten von N. A. WLASSOW: „Versuche mit monochromatischen langsamen Neutronen" (Н. А. Власов: Опыты с монохроматическими медленными нейтронами, *Успехи физических наук*, т. XXXV, стр. 352 и 469, вып. 3 и 4, 1948).

senden) Neutronenbündels, als auch von den Bremsungsbedingungen (Art und Dicke des Moderators) in starkem Maße abhängt. Im allgemeinen kann man bei ausreichender Dicke des Moderators ein vollständiges Temperaturgleichgewicht zwischen den Neutronen und dem umgebenden Medium erreichen. Es sind jedoch auch starke Abweichungen möglich. So bekommt man z. B. mit Paraffin, wie wir gesehen haben, ein Neutronengas mit erhöhter Temperatur, weil die langsamen Neutronen vom Paraffin nach dem Gesetz $\frac{1}{v}$ absorbiert werden, d. h., das Geschwindigkeitsspektrum der Neutronen verarmt stark im Gebiet kleiner Ener-

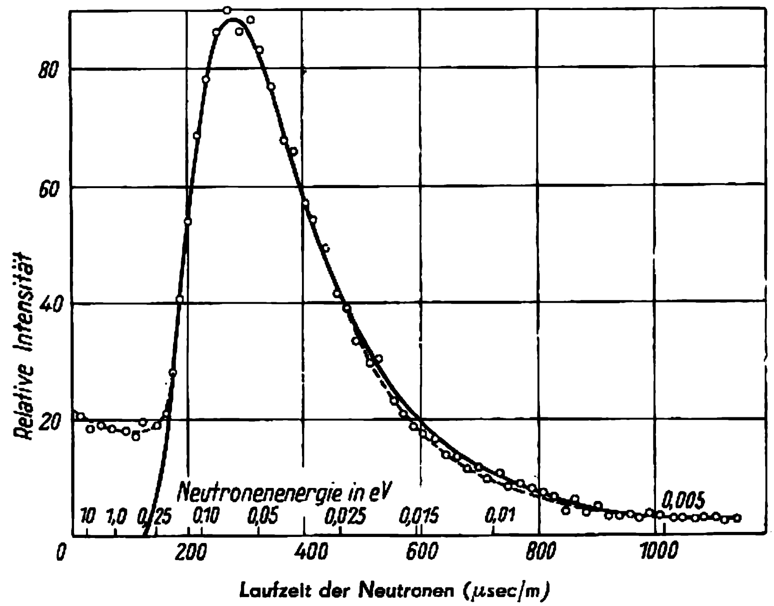


Abb. 404. Geschwindigkeitsverteilung von Neutronen, die aus einem Paraffinblock austreten. Die ausgezogene Kurve wurde durch Rechnung nach dem Maxwellschen Gesetz erhalten ($T = 390°$). Die Meßpunkte sind durch Kreise wiedergegeben

gien. Andererseits fällt die Temperatur des Neutronengases beim Durchgang von Neutronen durch eine dicke Graphitschicht fast bis auf den absoluten Nullpunkt. Diese Erscheinung wird durch einen besonderen Interferenzeffekt hervorgerufen, den wir weiter unten betrachten werden. Nach dem Durchgang einer 22 cm dicken Graphitschicht betrug die Neutronentemperatur z. B. 18° K.

Die Messungen mit monochromatischen Neutronen erlauben eine Untersuchung der Neutronenabsorption durch eine gegebene Substanz in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit. Die Kurve für die Abhängigkeit der Absorption von der Geschwindigkeit stellt nichts anderes als das Absorptionsspektrum der Neutronen dar. Wie wir sehen werden, erweist sich dieses Spektrum seiner äußeren Form nach dem optischen Absorptionsspektrum analog und zeigt bei bestimmten Energien scharfe Maxima und Minima.

Zur Untersuchung des Absorptionsspektrums wird eine Schicht der betreffenden Substanz zwischen der Quelle und dem Detektor in einem parallelen Neutronenbündel angeordnet. Dabei wird die Neutronenzahl für alle der Messung mit dem gegebenen Selektor zugänglichen Laufzeiten, d. h. Neutronengeschwindigkeiten, gezählt. Die Zählung wird zweimal durchgeführt: mit und ohne Absorptionsschicht. Die Neutronenzahlen sind in beiden Fällen den Intensitäten der Neutronenbündel, den durch die Schicht gegangenen (J) und den auffallenden (J_0), proportional. Unter der Bedingung, daß das Neutronenbündel parallel ist, wird die Abhängigkeit zwischen J und der auf 1 cm² des Absorbers entfallenden Anzahl von Atomen durch das Exponentialgesetz

$$J = J_0 e^{-n\sigma}$$

ausgedrückt.

In unserem Falle charakterisiert der Querschnitt σ die Schwächung des Bündels sowohl durch Streuung als auch durch Absorption und stellt deshalb den totalen Wirkungsquerschnitt dar. Er setzt sich additiv aus dem Querschnitt für die Absorption oder den Einfang des Neutrons und dem Streuquerschnitt zusammen:

$$\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s\,.$$

In vielen Fällen kann man durch ergänzende Messungen und Rechnungen den Streuquerschnitt und damit aus dem totalen Querschnitt auch den Absorptionsquerschnitt ermitteln.

In § 265 sahen wir, daß die Abhängigkeit des Einfangquerschnitts von der Neutronenenergie für langsame Neutronen, deren Welleneigenschaften nicht vernachlässigt werden können, durch die Formel von Breit und Wigner,

$$\sigma(E) = \sigma_0 \left(\frac{E_r}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_r)^2 + \Gamma^2}\,,$$

dargestellt wird.

E_r bedeutet hier das Energieniveau des Kerns und Γ dessen Breite. Aus dieser Formel folgt, daß für Energien E, die dicht bei E_r liegen, die Kurve für die Abhängigkeit des $\sigma(E)$ von E ein scharfes Resonanzmaximum zeigen muß. Für $E = E_r$ liefert die Formel von Breit-Wigner $\sigma = \sigma_0$, so daß σ_0 der Resonanzquerschnitt für den Einfang ist. Andererseits ist der Einfangquerschnitt für $E \ll E_r$ zu

$$\sigma(E) \sim \frac{1}{E^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{v}$$

proportional.

Die beiden genannten Folgerungen, d. h. das Auftreten des Resonanzeinfangs für bestimmte Energiewerte und das $\frac{1}{v}$-Gesetz für langsame Neutronen, die weit von der Resonanz entfernt sind, werden durch Versuche mit den Selektoren ausgezeichnet bestätigt. Beim Bor, das in dem Energieintervall bis 1000 eV keine Resonanzniveaus besitzt, ist das Produkt σv konstant. Folglich wird das $\frac{1}{v}$-Gesetz bei Änderung der Neutronenenergie von 0,01 eV bis 1000 eV, d. h. bei einer Änderung um den Faktor 10^5, erfüllt.

Sehr interessant sind die Messungen der Neutronenabsorption durch Kadmium. Schon in den ersten Stadien der Untersuchungen langsamer Neutronen wurde beobachtet,

daß Kadmium Neutronen thermischer Energien (d. h. Energien in der Größenordnung von $^1/_{100}$ Elektronenvolt) stark absorbiert und für Energien der Größenordnung 1 eV und höher durchsichtig ist. In Abb. 405 ist die Kurve für die Abhängigkeit des σ (E) von E für Cd dargestellt. Die ausgezogene Kurve wurde nach der Formel von BREIT-WIGNER berechnet. Die experimentellen Werte sind durch Kreise und Kreuze angegeben (entsprechend den Messungen an zwei Proben verschiedener Dicke). Wie man sieht, liegen die Meßpunkte

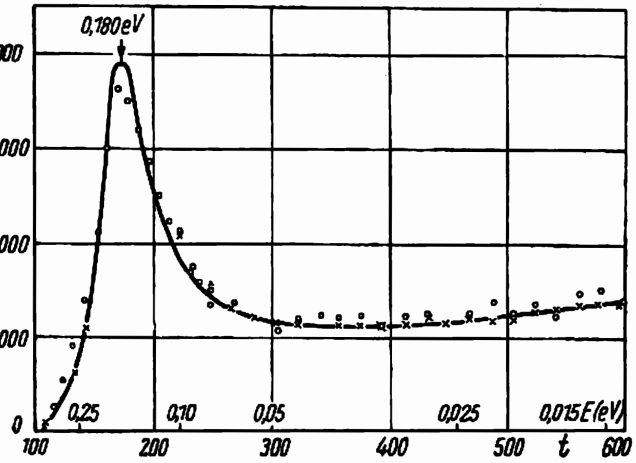


Abb. 405. Kurve für den Querschnitt in Resonanznähe für Kadmium

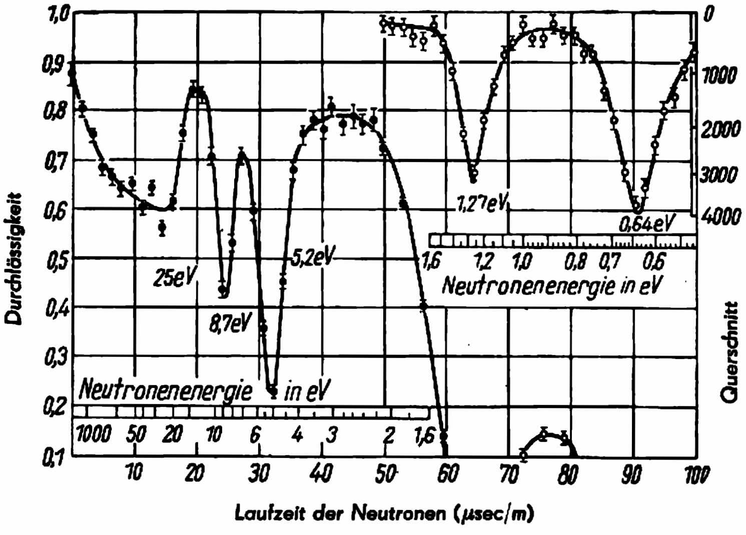


Abb. 406. Durchlässigkeit des Iridiums für langsame Neutronen

gut auf der theoretischen Kurve. Für Neutronenenergien von etwa 0,18 eV wird für Kadmium eine scharfe Resonanzspitze beobachtet. Die genauen Werte, die den Resonanzeinfang von Neutronen durch Kadmium charakterisieren, sind

Resonanzenergie	0,176 eV,
Halbwertsbreite der Absorptionslinien	0,115 eV,
Resonanzquerschnitt	$\sigma_0 = 7000 \cdot 10^{-24}$ cm².

Es ist interessant, zu bemerken, daß der Resonanzquerschnitt für Cd den durch die Kernkräfte bestimmten Kernquerschnitt (nach dem „Kernradius“ $r = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ cm für $A = 113$ berechnet) um etwa den Faktor 4500 übersteigt.

Analoge, stark erhöhte Werte des Resonanzquerschnitts werden auch bei anderen Elementen beobachtet. Die seltene Erde Gadolinium (entdeckt von dem russischen Gelehrten Gadolin) zeichnet sich durch einen besonders großen Querschnitt aus. Für dieses Element gilt $\sigma_0 = 45000 \cdot 10^{-24}$ cm².

Als Beispiel eines komplizierten Spektrum mit mehreren Maxima und Minima ist in Abb. 406 die Kurve für Iridium wiedergegeben. Die linke Ordinatenteilung gibt den Wert der Durchlässigkeit an, d. h. $\frac{J}{J_0} = e^{-n\sigma}$ für eine Probe von 3,08 g/cm² (links) und für eine Probe von 0,0424 g/cm² (rechts).

§ 301. Neutronenbeugung

Die beste Methode zur Erzeugung monochromatischer Neutronen beruht auf ihren Welleneigenschaften. Es handelt sich hier um eine Zerlegung ins Energiespektrum mit Hilfe eines Kristalls ähnlich dem für Röntgenstrahlen üblichen Verfahren. Bei der Ausführung dieser Versuche sind zwei Bedingungen zu erfüllen: Die Neutronenquelle muß erstens stark genug sein und zweitens müssen die den Neutronen des gegebenen Energieintervalls entsprechenden Wellenlängen eine geeignete Größe haben. In letzter Zeit konnten sogenannte Uranmeiler oder Reaktoren, von denen im nächsten Abschnitt gesprochen wird, als intensive Neutronenquellen benutzt werden. Die Wellenlängen können auf Grund folgender Überlegungen abgeschätzt werden. Wie wir im letzten Paragraphen sahen, gehorcht die Geschwindigkeitsverteilung langsamer Neutronen dem Maxwellschen Gesetz. Man kann deshalb die mittlere Energie ausrechnen, wenn man die Beziehung $E = kT$ benutzt. Für $T = 300°$ K erhalten wir

$$E = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300 = 4{,}14 \cdot 10^{-14} \text{ erg} = 0{,}026 \text{ eV}.$$

Die Wellenlänge eines Neutrons dieser Energie ist gleich

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24} \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-14}}} = 1{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 1{,}8 \text{ Å}.$$

In den Reaktoren ist die Temperatur der Neutronen größer als 300° K; sie ist jedoch so, daß die Wellenlänge trotzdem die Größenordnung 1 Å nicht überschreitet. Daraus folgt, daß man mit langsamen Neutronen eine Beugung im Einkristall oder im Kristallpulver wie mit Röntgenstrahlen erzielen kann. Die Reflexion der Neutronen am Kristall gehorcht dem Wulf-Braggschen Gesetz

$$n\lambda = 2d \sin\vartheta.$$

Ein typisches Spektrometer für Neutronen ist in Abb. 407 dargestellt. Das Neutronenbündel aus dem Reaktor fällt auf einen Einkristall, der auf einem kleinen Tisch des Spektrometers steht. Das reflektierte (gebeugte) Bündel geht durch Parallelspalte aus Kadmium, Bor oder anderen Substanzen, die langsame Neutronen gut absorbieren, und fällt in einen Proportionalzähler, der mit Bortrifluorid BF_3 gefüllt ist. Mit diesem Zähler wird die Intensität der Beugung unter bestimmten Winkeln gemessen.

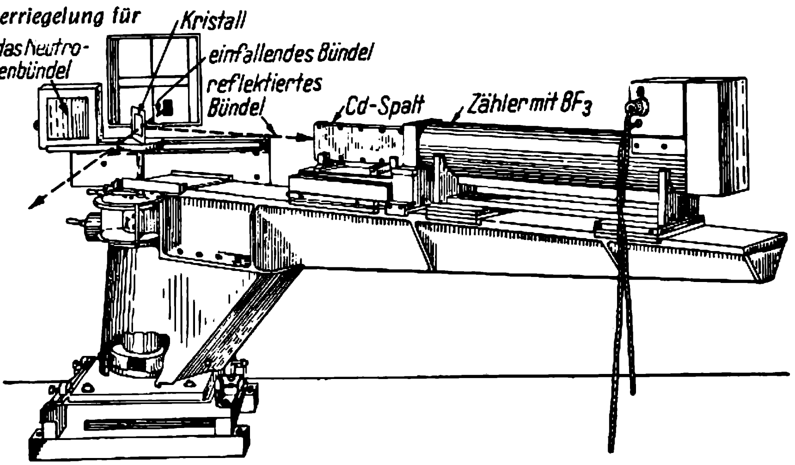


Abb. 407. Neutronenspektrometer mit Einkristall

Abb. 408 zeigt als Beispiel eine Kurve, die die Reflexionsintensität eines NaCl-Kristalls in Abhängigkeit vom Auffallswinkel des Neutronenbündels, das vorher durch einen anderen Kristall monochromatisiert wurde, darstellt.

Mit Hilfe derartiger Kristallspektrometer wurde u. a. die Resonanzabsorption langsamer Neutronen untersucht. In Abb. 409 ist die Kurve der Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts für Iridium von der Neutronenenergie im Intervall 0,01 bis 100 eV wiedergegeben. Dort sind durch helle Kreise die Ergebnisse aufgetragen, die man nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Laufzeitmethode gemessen hat. Als schwarze Kreise und Kreuze sind die Werte eingezeichnet, die mit zwei verschiedenen Neutronenspektrometern ermittelt wurden. Wie man sieht, liegen alle Punkte gut auf der ausgezogenen Kurve, die nach der Formel von Breit-Wigner erhalten wurde.

Die Anwendung der Neutronenbeugung ist durchaus nicht nur auf die Lösung kernphysikalischer Probleme in der Art der Resonanzabsorption von Neutronen beschränkt.

Die bereits vorhandenen Ergebnisse geben zu der Hoffnung Anlaß, daß der Neutronenbeugung als Methode zur Untersuchung der Kristallstruktur, die die früher ausgearbeiteten Methoden der röntgenographischen und elektronographischen Analyse wesentlich ergänzt, die Hauptbedeutung zukommen wird. Von diesem Gesichtspunkt aus sind Geräte, die Neutroneninterferenzen nach der Kristallpulvermethode ermöglichen, von großem Interesse.

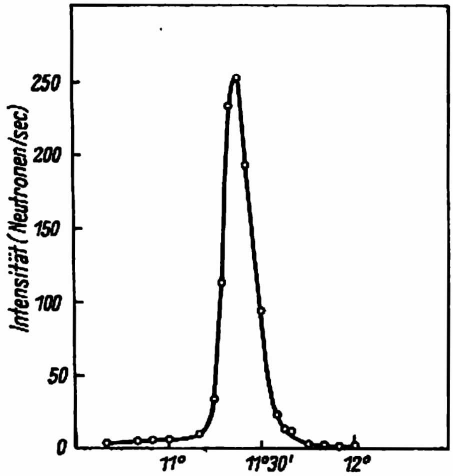


Abb. 408. Kurve für die Reflexion von Neutronen, die vorher durch einen anderen Kristall monochromatisiert wurden, an einen NaCl-Kristall

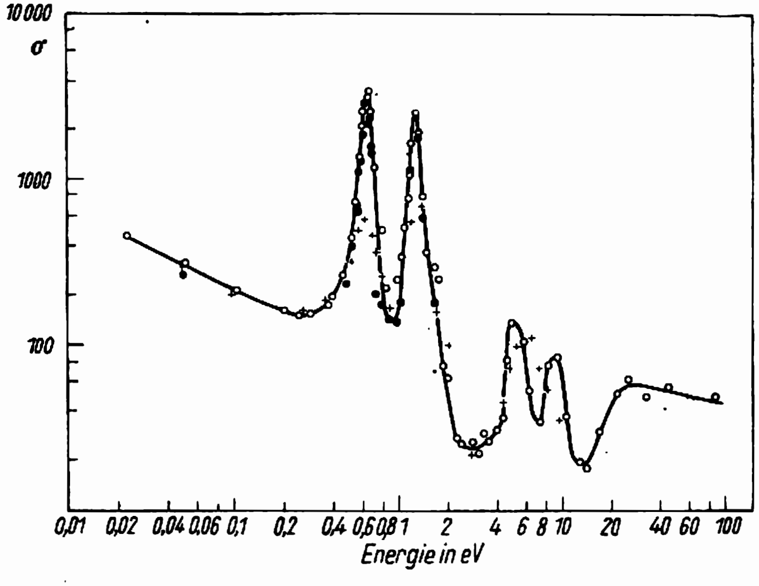


Abb. 409. Totaler Querschnitt des Iridiums für Neutronen. Helle Kreise: Meßwerte nach der Laufzeitmethode; schwarze Kreise und Kreuze: mit zwei verschiedenen Spektrometern gemessene Werte

Das Schema eines solchen Geräts ist in Abb. 410 dargestellt. Die im Kernreaktor (Meiler) erzeugten Neutronen fallen zuerst auf einen NaCl-Einkristall, der so angeordnet ist, daß von ihm in der auf dem Bild bezeichneten Richtung Neutronen bestimmter Wellenlänge (1,06 Å) reflektiert werden. Im mittleren Teil der Zeichnung sieht man links vergrößert den

Kristall, sowie das einfallende und reflektierte Bündel. Dieser Kristall dient also zur Monochromatisierung der Neutronen, die bei der Pulvermethode unerläßlich ist. Der monochromatische Neutronenstrom fällt dann auf die Pulverprobe, die sich auf einem drehbaren Tischchen befindet. Die reflektierten Neutronen fallen nun in einen mit BF_3 gefüllten

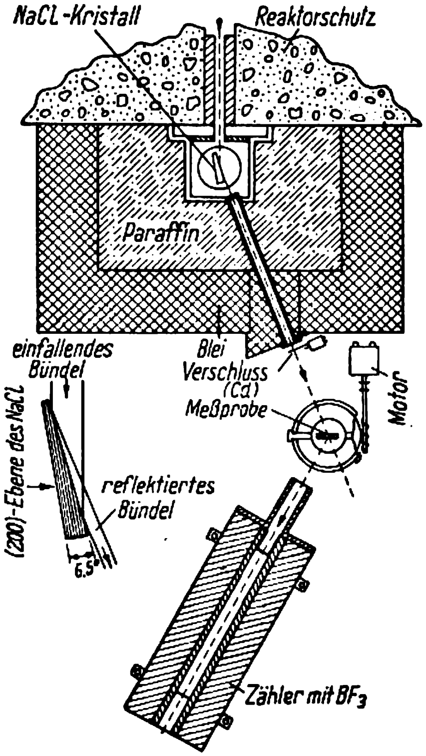


Abb. 410. Anordnung zur Neutronenbeugung an Pulvern. Links ist der monochromatisierende Kristall vergrößert herausgezeichnet

Proportionalzähler, der ihre Intensität mißt. Der Zähler wird unbeweglich aufgestellt, während die Probe drehbar ist. Auf diese Weise kann man die Reflexionsintensitäten in verschiedenen Richtungen messen. Das ganze Gerät ist automatisiert: Die Drehung der Probe erfolgt durch einen Motor, und die Zählrohrimpulse werden automatisch registriert. In Abb. 411 sind zwei Beugungskurven als Beispiele wiedergegeben: das untere von Diamantpulver und das obere von einer mikrokristallinen Aluminiumplatte. Die Beugungsmaxima liegen bei diesen Kurven an Stellen, die durch die Kristallstruktur und die benutzte Wellenlänge bestimmt werden.

Die Versuchsanordnungen zur Beugung von Neutronen an mikrokristallinem Pulver unterscheiden sich von der üblichen Anordnung für Röntgenstrahlen und Elektronen dadurch, daß die photographische Methode, die in den beiden letzten Fällen Anwendung findet, durch den Nachweis mit Hilfe eines Proportionalzählers ersetzt wird. Das hängt offensichtlich vor

allem damit zusammen, daß die Neutronen selbst keine Ionisation hervorrufen und keine photographische Wirkung haben. Der Nachweis langsamer Neutronen mit Ionisationskammern und Zählrohren beruht auf Kernreaktionen, die von den Neutronen ausgelöst werden. So benutzt man z. B. die Bortrifluoridfüllung, weil die Neutronen im Bor die Reaktion B^{10} (n, α) Li^7 hervorrufen und die dabei entstehenden α-Teilchen und Rückstoßkerne das Gas ionisieren und damit eine indirekte Registrierung der Neutronen erlauben. Das führt auf den Gedanken, die Photoemulsion zu sensibilisieren, indem man der Emulsion z. B. Salze von Bor

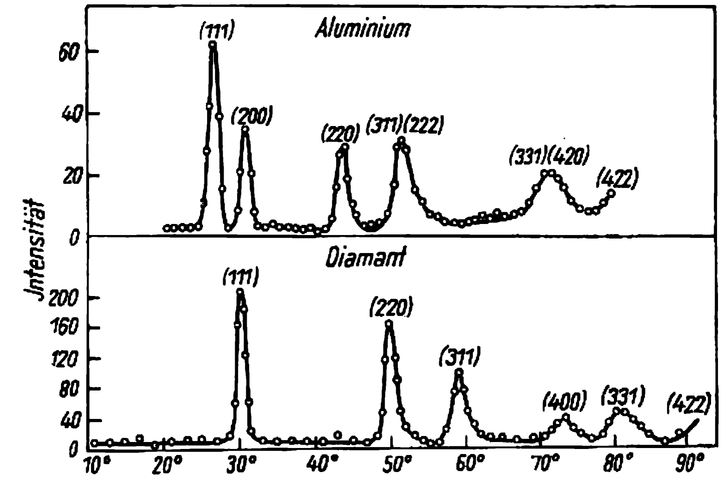


Abb. 411. Neutronenbeugung an Aluminium- und Diamantpulver

oder anderen Elementen, die einen großen Querschnitt für den Neutroneneinfang haben, beimischt. Ein anderes Mittel, um die photographische Technik für Arbeiten mit Neutronen nutzbar zu machen, ist die Verwendung von Schirmen, die den in der Röntgentechnik viel benutzten Verstärkungsschirmen entsprechen. Die Schirme werden für Röntgenstrahlen mit künstlich hergestellten Substanzen (Luminophoren), die unter der Wirkung von Röntgenstrahlen sichtbare (gewöhnlich blauviolette) Strahlung aussenden, bedeckt. Wenn man einen solchen Schirm zusammen mit einem Film in die Kasette einlegt, ist die Photoemulsion obwohl der direkten Röntgenstrahlung als auch dem sichtbaren Bild auf dem Schirm ausgesetzt. Durch diese Maßnahme wird die erforderliche Belichtungsdauer erheblich verkürzt.

Entsprechende Schirme kann man auch für Neutronen herstellen. Der Unterschied besteht nur darin, daß die „Abbildung“ auf dem Schirm durch β-Strahlen erfolgt und nur diese auf den Film wirken. Die β-Strahlen entstehen als Produkte der künstlichen Radioaktivität, die beim Neutroneneinfang durch die „empfindliche“ Schirmsubstanz auftritt.

Durch Anwendung eines solchen Verstärkungsschirmes gelang es, die Neutronenbeugung auch mit der dritten Methode, der Methode von Laue, auf photographischem Wege festzuhalten. Um eine Beugung nach dieser Methode zu erzielen, darf bekanntlich (siehe Teil I, § 33) die Strahlung nicht monochromatisch sein, sie muß vielmehr ein kontinuierliches Spektrum haben. Dieser Umstand ist für die Verwendung der Laueschen Methode zur Neutronenbeugung gerade angenehm, da die Neutronenströme, die unmittelbar vom Reaktor geliefert werden, eine kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilung besitzen und folglich alle Wellenlängen

vorkommen. Bei einem Beugungsversuch nach dieser Methode wurde als sensibilisierender Schirm eine Indiumfolie benutzt: Indium liefert beim Neutroneneinfang ein β^--radioaktives Isotop, dessen Elektronenstrahlung auch auf den Film einwirkt. Beim Durchgang eines parallelen Neutronenstroms durch einen NaCl-Kristall wurden nach zehnstündiger Belichtung typische Laue-Aufnahmen erzielt. Sie sind in Abb. 412 wiedergegeben.

Die Theorie der Neutronenwellenbeugung am Kristallgitter entspricht im allgemeinen völlig der Beugungstheorie für Röntgenstrahlen. Es gibt jedoch auch wesentliche Unterschiede. Diese hängen mit der Verschiedenartigkeit des elementaren Streuprozesses an einem einzelnen Atom zusammen. Bei den Röntgenstrahlen erfolgt die kohärente Streuung an gebundenen Elektronen des Atoms. Der Kern nimmt wegen seiner großen Masse keinen Anteil

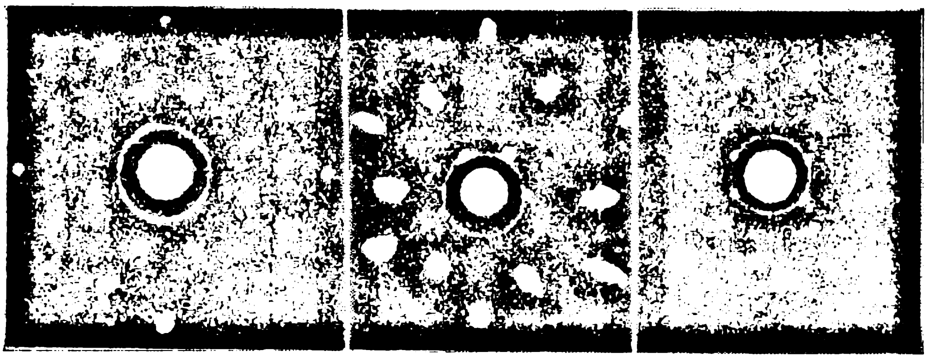


Abb. 412. Neutronenbeugung in NaCl-, Be- und Quarzkristallen nach der Methode von Laue

an der Streuung. Da die Ausmaße des Atoms von der gleichen Größenordnung (10^{-8} cm) wie die Wellenlängen der Röntgenstrahlen sind, tritt schon bei der Streuung durch Elektronen eines Atoms ein Interferenzeffekt auf: Unter kleinen Winkeln zur Einfallsrichtung der Welle befinden sich gestreute Wellen in fast gleicher Phase, die sich deshalb gegenseitig verstärken. Andrerseits löschen sich die gestreuten Wellen bei großen Winkeln wegen der entstehenden Phasendifferenzen gegenseitig teilweise aus, und die Amplitude der am Atom gestreuten Welle nimmt ab. Bei der Beugung von Elektronenwellen sind auch die Kerne an der Beugung beteiligt, und der Interferenzeffekt zeigt sich noch stärker. Dagegen werden die Neutronen *nur an den Kernen gestreut*. Dabei erfolgt die Streuung kugelsymmetrisch, d. h., die Amplitude der gestreuten Welle hängt nicht vom Streuwinkel ab, da der Kernradius von der Größenordnung 10^{-13} cm und die Wellenlänge langsamer Neutronen 10^{-8} cm ist. Diese unterschiedliche Abhängigkeit der Amplitude vom Winkel (sogenannter Atomfaktor f) ist für Röntgenstrahlen, Elektronen und Neutronen anschaulich durch die Kurven in Abb. 413 dargestellt.

Wesentliche Bedeutung kommt ferner der absoluten Größe der Streuamplitude zu. Für Röntgenstrahlen und Elektronen ist die Amplitude ungefähr der Atomnummer des streuenden Atoms proportional. Für Neutronen gibt es überhaupt keinen einfachen Zusammenhang zwischen Streuquerschnitt (proportional dem Quadrat der Amplitude f) und Z. Während aber Röntgenstrahlen und Elektronen sehr schwach an Wasserstoff gestreut werden, ist die Neutronenstreuung in Wasserstoff von der gleichen Größenordnung wie die Streuung an schwereren Atomen.

Schließlich sind auch Unterschiede in der Phase der gestreuten Wellen möglich. Für Röntgenstrahlen ist die Phase der gestreuten Wellen immer entgegengesetzt zur Phase der einfallenden Wellen, da die Frequenzen der einfallenden Röntgenstrahlen immer größer als die Eigenfrequenzen der streuenden Elektronen im Atom sind. Bei Neutronen ist sowohl ein negativer als auch ein positiver Phasensprung zwischen einfallender und gestreuter Welle möglich, obwohl der erste Fall viel häufiger als der zweite vorkommt, wie das Experiment zeigt.

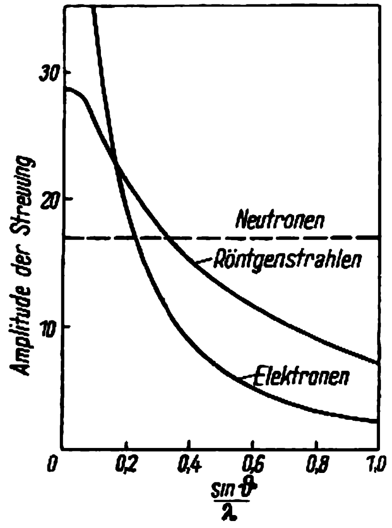


Abb. 413. Die Abhängigkeit der Amplitude verschiedener Strahlungen vom Winkel der Streuung an Kupferatomen

All diese Unterschiede im Streumechanismus an einzelnen Atomen zwischen Röntgenstrahlen und Neutronen rechtfertigen die Hoffnung, daß sich die neutronographische Analyse der Kristallstruktur gerade dann als sehr nützlich erweisen wird, wenn die röntgenographische Analyse keine guten Resultate liefert. Das bezieht sich z. B. auf solche Fälle, bei denen Wasserstoff- oder Deuteriumatome in die Kristall- oder Molekülstruktur eingehen. Am Beispiel der Kristallstruktur des Natriumhydrids NaH und NaD hat sich diese Erwartung völlig bestätigt. Man darf deshalb hoffen, daß die neutronographische Analyse für Strukturuntersuchungen komplizierter organischer Verbindungen, in denen ja die Wasserstoffatome eine große Rolle spielen, von großem Nutzen sein wird. Eine andere fruchtbare Anwendungsmöglichkeit der neutronographischen Analyse bietet sich durch das Fehlen eines gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen dem Streuquerschnitt und der Atomnummer Z. Aus diesem Grunde erweisen sich die Streuquerschnitte bei Atomen mit wenig verschiedenem Z manchmal als wesentlich verschieden. Als Beispiel können die Kerne Fe und Co dienen. Beim ersten beträgt der Querschnitt für kohärente Streuung $11 \cdot 10^{-24}$ und beim zweiten $1{,}5 \cdot 10^{-24}$ cm^2. Dieser Unterschied wurde bei der Untersuchung der sogenannten geordneten Struktur in FeCo-Legierungen ausgenutzt.

Dieses Problem hängt damit zusammen, daß das in geringerer Menge in der Legierung enthaltene Element oft die Gitterplätze des Grundelements einnimmt. In solchen Fällen

unterscheidet sich die Struktur der Legierung nicht von der Kristallstruktur des Grundelements. Bei einer bestimmten thermischen Bearbeitung verteilt sich oft ein Element in der Legierung gesetzmäßig in bezug auf das andere und bildet dabei eine geordnete Struktur oder „Überstruktur“. So entsteht z. B. im System Cu_3Au bei thermischer Bearbeitung unterhalb 400° C eine Struktur, bei der die Goldatome auf Würfelecken und die Kupferatome in den Flächenmitten liegen. Bei höheren Temperaturen werden dagegen die Goldatome wahllos verteilt und ersetzen an einigen Stellen die Kupferatome im gewöhnlichen Kupfergitter. Die Beobachtung der Überstruktur gelingt im allgemeinen leicht durch eine Strukturanalyse mit Röntgenstrahlen, wenn die Komponenten der Legierung sehr unterschiedliches Z, wie z. B. Cu und Au, besitzen. Bei Legierungen FeCo ist dagegen die Beobachtung der Überstruktur äußerst schwierig, da die Atomfaktoren der Komponenten zu dicht benachbart sind. Die neutronographische Analyse ermöglichte wegen des obenerwähnten großen Unterschieds der Streuquerschnitte für Fe und Co auch hier die Beobachtung der Überstrukturen, bei denen die Fe-Atome in den Ecken und die Co-Atome in den Würfelzentren liegen.

§ 302. Einige optische Eigenschaften der Neutronen

Wir wollen uns jetzt mit einigen weiteren optischen Effekten, die bei Neutronen beobachtet werden, beschäftigen.

1. *Reflexion an einem Spiegel*

Da die De-Broglie-Wellenlänge langsamer Neutronen von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge der Röntgenstrahlen ist, ist zu erwarten, daß sich der Brechungsindex für Neutronen genausowenig von eins unterscheidet wie der für Röntgenstrahlen (siehe Teil I, § 40). Der aus der Dispersionstheorie abgeleitete Ausdruck für den Brechungsindex hat folgende Gestalt:

$$\mu = 1 - \lambda^2 \frac{Nf}{2\pi}, \tag{302,1}$$

wobei N die Anzahl der Atome der brechenden Substanz, die auf 1 cm² der Grenzfläche entfallen und f die Amplitude der gestreuten Wellen bedeuten. Die Amplitude wird je nach dem Vorzeichen des Phasensprungs bei der Reflexion mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen: Wenn sich die Phase der reflektierten Welle in bezug auf die einfallende um 180° ändert, gilt $f > 0$; wenn sich die Phase nicht ändert, gilt $f < 0$. Aus Formel (302,1) folgt für $f > 0$ wie bei den Röntgenstrahlen $\mu < 1$. In einem solchen Falle ist jedoch die totale „äußere“ Reflexion an der Grenze Luft — Spiegel möglich. Die Größe $1 - \mu$ ist von der Größenordnung 10^{-6}. Daraus ergibt sich ein Grenzwinkel der Totalreflexion in der Größenordnung von 10′.

Die Totalreflexion thermischer Neutronen des Reaktors wurde tatsächlich experimentell beobachtet. Die Neutronen wurden vorher durch Reflexion an einem Kristall monochromatisiert. Zur Erzielung eines engen, streng parallelen Neutronenbündels wurden die Neutronen durch zwei enge Kadmiumspalten mit 3,5 mm Abstand geleitet. Das Bündel fiel streifend auf einen polierten Spiegel der betreffenden Substanz; mit einem Proportionalzähler wurde das reflektierte Bündel gesucht. Auf diese Weise wurde die Totalreflexion beobachtet und der kritische Winkel für Spiegel aus Graphit, Beryllium, Kupfer, Zink, Nickel und Eisen gemessen. Die Messungen ergaben tatsächlich für die verschiedenen Spiegel kritische Winkel zwischen 7,5′ und 12′.

Die Bedeutung dieser Versuche liegt nicht nur darin, daß man bei den Neutronen noch eine optische Erscheinung entdeckt hat, sondern vor allem in der Tatsache, daß das Auftreten oder Fehlen der Totalreflexion auf das Amplitudenvorzeichen der gestreuten Welle, d. h. auf das Vorzeichen der Phasenänderung bei der Reflexion, hinweist. Es wurde festgestellt, daß die Amplitude bei allen aufgezählten Elementen positiv ist, d. h., die Phase ändert sich bei der Reflexion um 180°. Es ist interessant zu bemerken, daß für ein Element, das aus mehreren Isotopen besteht, die Amplitude bei den einen Isotopen positiv und bei anderen negativ ist. Versuche mit getrennten Lithiumisotopen ergaben in der Tat, daß die Amplitude für Li^7 negativ und für Li^6 positiv ist.

2. *Die Erzeugung kalter Neutronen*

Wenn man ein Neutronenbündel durch einen Block aus gepreßtem Graphitpulver schickt, dann werden alle Neutronen, deren Wellenlänge die Formel von WULF-BRAGG befriedigt, eine Interferenzreflexion erfahren. Man sieht sofort, daß die maximale Wellenlänge die Forderung

$$1 \geqslant \sin\vartheta = \frac{\lambda}{2d}$$

erfüllen muß, wo d die Gitterkonstante bedeutet. Für Graphit ist diese Grenzwellenlänge gleich 6,69 Å. Alle Neutronen, für die $\lambda < 6{,}69$ Å gilt, werden beim Durchgang durch den Graphitblock gestreut. Dagegen gehen die Neutronen mit $\lambda > 6{,}69$ Å frei hindurch. Der Versuch zeigte, daß man bei der Neutronenfilterung durch Graphit Neutronen mit einer effektiven Wellenlänge von 7,15 Å erhält. Diese Wellenlänge entspricht der mittleren Energie der thermischen Bewegung bei 18° K. Die Filterung durch Graphit erlaubt also, Neutronen mit einer dicht am absoluten Nullpunkt gelegenen Temperatur zu erzeugen.

3. *Die Polarisation der Neutronen*

In § 297 sahen wir, daß die Existenz eines magnetischen Eigenmoments der Neutronen ihre Polarisation beim Durchgang durch ferromagnetische Substanzen bewirkt. Die Theorie zeigt, daß der Querschnitt beim Durchgang durch eine bis zur Sättigung magnetisierte ferromagnetische Substanz (z. B. Eisen)

$$\sigma = \sigma_0 \pm p$$

ist, wenn σ_0 der totale Querschnitt für das Neutron der Geschwindigkeit v beim Durchgang durch eine unmagnetisierte Substanz ist. Das Vorzeichen hängt davon ab, ob der Spin des Neutrons parallel oder antiparallel zur Magnetisierungsrichtung verläuft. Wenn die Intensität eines nichtpolarisierten Neutronenbündels gleich J_0 ist, dann wird die Intensität nach dem Durchgang durch die ferromagnetische Substanz J oder $J + \Delta J$, je nachdem, ob die ferromagnetische Substanz unmagnetisiert oder magnetisiert ist. Das Verhältnis $\frac{\Delta J}{J}$ ist gleich

$$\frac{\Delta J}{J} = \operatorname{ch}(n\,pd) - 1\,,$$

wobei d die Schichtdicke der ferromagnetischen Substanz und n die Anzahl der Atome in der Volumeneinheit bedeuten.

Der Polarisationseffekt für Neutronen beim Durchgang durch bis zur Sättigung magnetisiertes Eisen wurde experimentell beobachtet und zur direkten Bestimmung des magnetischen Moments des Neutrons mit Hilfe der magnetischen Resonanzmethode ausgenutzt.

XXIII. DIE KERNSPALTUNG UND DIE AUSNUTZUNG DER ATOMENERGIE

§ 303. Die Entdeckung der Spaltung schwerer Kerne

In den vorangegangenen Darlegungen wurde des öfteren vom wichtigsten Typ der Kernreaktionen gesprochen, von der Spaltung des Kerns in Teile gleicher (oder nahezu gleicher) Masse. Auf experimentellem Wege wurden derartige Kernspaltungen in den Jahren 1938 bis 1939 entdeckt, und diese Entdeckung kann ihrer Bedeutung nach in die Reihe der wichtigsten Ereignisse im Bereiche der Physik und Chemie eingeordnet werden.

Der Beginn der Arbeiten, die zu dieser Entdeckung führten, fällt in das Jahr 1934. Damals beobachteten FERMI und seine Mitarbeiter, daß beim Beschuß von Uran mit schnellen und langsamen Neutronen eine beträchtliche Anzahl (bis zu 10) verschiedener radioaktiver Kerne mit unterschiedlichen Zerfallskonstanten entstehen. Es wurde angenommen, daß ein Teil dieser Halbwertszeiten zu künstlich-radioaktiven Kernen gehört, die direkt aus dem Urankern unter der Einwirkung der Neutronen entstehen, und die übrigen zu ihren Zerfallsprodukten. Besondere Aufmerksamkeit lenkte man auf zwei Halbwertszeiten, und zwar auf eine von 13 Minuten und eine andere von 90 Minuten. Die chemische Untersuchung[1]) ergab ein erstaunliches Resultat: Die Strahler mit dieser Halbwertszeit waren keine Isotope der Elemente mit den Atomnummern zwischen 86 und 92; sie verhielten sich in chemischer Hinsicht wie Elemente der VII. Gruppe des Periodischen Systems. Da die Möglichkeit einer Abspaltung von Teilchen mit 23 bis 24 Ladungseinheiten und einer Masse von ungefähr 50 Einheiten vom Urankern damals vollkommen ausgeschlossen schien, nahm man an, daß diese Kerne in der Uranreihe zur VII. Gruppe gehören, also Kerne von Elementen sind, die hinter dem Uran stehen. Man nannte sie daher Transurane.

Um diese Annahme zu bestätigen, wurde der folgende chemische Versuch angestellt: Wie aus der Tabelle des Periodischen Systems (siehe Anhang XVI) ersichtlich ist, muß

---

[1]) Die Zahl der Atome, die durch Kernreaktionen entstehen, ist zu klein, als daß die Reaktionsprodukte direkt chemisch analysiert werden könnten (siehe § 261). Gewöhnlich bedient man sich bei der chemischen Analyse der Indikatormethode, wie sie auch das Ehepaar JOLIOT-CURIE bei der Entdeckung der künstlichen Radioaktivität anwandte (siehe § 268). Die bestrahlte Substanz wird aufgelöst. Man fügt ihr dann eine kleine, aber chemisch leicht meßbare Menge von Stoffen zu, die vermutlich ihren chemischen Eigenschaften nach der entstandenen radioaktiven Substanz ähnlich sind. Danach wird das Gemisch durch chemische Reaktionen getrennt und jede Fraktion auf Radioaktivität untersucht. Wenn es sich z. B. zeigt, daß beim Ausfällen des Elements *A* die Radioaktivität in den Satz übergeht, so bedeutet das, daß die erhaltene Substanz ein Isotop des Elements *A* ist. Es gibt eine Reihe von Abarten dieser Indikatormethode oder Methode der markierten Atome; siehe z. B. S. E. BRESSLER: „Radioaktive Elemente", Verlag Technik, Berlin, in Vorbereitung, oder M. KAMEN: „Radioactive Tracers in Biology." New York, Acad. Press 1951.

das Transuran $Z = 93$, das direkt auf das Uran folgt, dem Mangan ähnlich sein. Daher wurde zu der mit Neutronen beschossenen Uransalzlösung ein Mangansalz hinzugegeben und das Mangan dann aus der Lösung als MnO_2 ausgefällt. Es zeigte sich, daß ein Teil der aktiven Stoffe mit der Halbwertszeit 13 Minuten und 90 Minuten zusammen mit dem Mangan in der Fällung zu finden waren, was als Bestätigung der Vermutungen über die Natur der untersuchten Elemente angesehen wurde.

Diese Schlußfolgerung unterlag jedoch einer scharfen Kritik von seiten der Chemiker, die darauf hinwiesen, daß viele Elemente zusammen mit dem Mangan ausfallen. Infolgedessen könne diese Reaktion durchaus nicht als überzeugender Beweis dafür gelten, daß die erhaltenen Elemente zur VII. Gruppe gehören.

Die Möglichkeit der Entstehung von Transuranen bei Neutronenbeschuß des Urans zog jedoch ein großes Interesse auf sich, und in einer ganzen Reihe von Laboratorien wurden weitere Forschungen angestellt. 1936 bis 1937 waren es besonders HAHN, LISE MEITNER und STRASSMANN, die eine Reaktion des Urans durch Beschuß mit schnellen und langsamen Neutronen, die verschieden lange Zeit auf das Uran einwirkten, herbeiführten und vielseitige chemische Versuche anstellten. Diese Arbeiten deckten die Kompliziertheit des Prozesses und die Vielfalt der entstehenden Produkte auf, zu deren Erklärung verschiedene Zerfallsschemata vorgeschlagen wurden. Der allgemeine Schluß fiel zugunsten der anfänglichen Annahme von FERMI über die Entstehung von Transuranen auf dem Wege der β-Umwandlung der radioaktiven Isotope des Urans, die durch Neutroneneinfang entstehen. Die überzeugendste Folgerung aus diesen Arbeiten bestand darin, daß bei Neutroneneinfang durch eines der Uranisotope (welches, blieb unbekannt) ein neues Isotop entsteht, das ein β-Strahler (wir erinnern daran, daß alle bis dahin bekannten Uranisotope, U^{238}, U^{235} und U^{234} α-Strahler sind) mit einer Halbwertszeit von 23 Minuten ist und das sich dadurch in ein Element mit der Atomnummer $Z = 93$ verwandelt:

$$_{92}U + {_0n^1} \rightarrow {_{92}U}\ (23\ \text{Min.}) \rightarrow {_{93}\text{EkaRe}} + \beta^- .$$

Diesem Element wurde nach dem noch von MENDELEJEW stammenden Gebrauch eine vorläufige Benennung gegeben, die aus dem Namen des benachbarten Analogons im Periodischen System, dem Rhenium ($Z = 75$) mit der Vorsilbe „Eka“, also Ekarhenium, bestand. Es konnte zuverlässig festgestellt werden, daß sich das 23-Minuten-Produkt in chemischer Hinsicht wie das Uran verhält. Es entsteht, wenn eines der Uranisotope in einem typischen Resonanzprozeß mit sehr großem Wirkungsquerschnitt langsame Neutronen, deren Energie sehr grob geschätzt (25 ± 10) eV beträgt, einfängt.

Zu dieser Zeit entdeckten IRENE CURIE-JOLIOT und SAVITCH einen neuen Stoff, der bei einer Bestrahlung des Urans mit Neutronen entstand und die bis dahin noch nicht bekannte Halbwertszeit von 3,5 Stunden besaß. Die chemische Analyse dieses Produkts brachte sie jedoch in Verlegenheit: Es zeigte sich, daß sich der neue Stoff in chemischer Hinsicht wie Lanthan ($Z = 57$) verhielt. Es konnte möglich sein, ihn als Isotop des Aktiniums ($Z = 89$) zu deuten, und diese Annahme wäre durchaus gerechtfertigt, da das Aktinium im Periodischen System drei Plätze vor dem Uran steht. Es zeigte sich jedoch, daß sich der neue Stoff sehr gut auf chemischem Wege vom Aktinium trennen ließ, in allen seinen Reaktionen sich jedoch wie das Lanthan verhielt, dessen Massenzahl um 100 Einheiten kleiner ist als die mittlere Massenzahl des Urans. Daher folgerten sie, daß der Stoff mit der Halbwertszeit 3,5 Stunden allen seinen Eigenschaften nach Lanthan ist. Es konnte jedoch nicht erklärt werden, wie er aus dem Uran entsteht. Tatsächlich waren sie der Entdeckung der Uranspaltung außer-

ordentlich nahe. Heute ist bekannt, daß eines der Spaltprodukte des Urans ein Isotop des Lanthans mit der Halbwertszeit 3,5 Stunden ist.

HAHN und STRASSMANN prüften die Ergebnisse dieser Arbeit, bestätigten sie und entdeckten neue Einzelheiten und neue Halbwertszeiten. Es wurde klar, daß die Anfangsreaktion durch eine große Zahl nachfolgender Prozesse kompliziert wird. Um diese zu erkennen, schufen sie neue Zerfallsschemata, die heute nicht mehr von Interesse sind, mit Ausnahme des Ergebnisses, daß als Zwischenglied beim Neutronenbeschuß des Urans das Isomer des Radiums, $_{88}Ra^{231}$ entstehen muß [$(n, 2\alpha)$-Prozeß]. Um ihr Schema zu bestätigen, führten sie genaue chemische Untersuchungen nach der Indikatormethode durch. Zu ihrem größten Erstaunen entdeckten sie dabei, daß sich das Produkt, das nach ihrer Annahme Radium sein müßte, wie *Barium* verhielt: Wenn sie zu dem Gemisch der entstehenden künstlich-radioaktiven Stoffe ein Bariumsalz hinzufügten und danach das Radium wie üblich durch Fällung und Kristallisation abtrennten, fiel das hypothetische „Radium" weder mit dem Radium noch mit seinen Isotopen (Thorium X und Mesothorium I) aus, sondern blieb mit dem Barium zurück und verhielt sich bei chemischen Reaktionen ganz wie dieses.

Ihre Schlußfolgerung formulierten sie folgendermaßen: „Wir kommen zu dem Schluß: Unsere ‚Radiumisotope' haben die Eigenschaften des Bariums; als Chemiker müßten wir eigentlich sagen, bei den neuen Körpern handelt es sich nicht um Radium, sondern um Barium, denn andere Elemente als Radium oder Barium kommen nicht in Frage"[1]).

Weiter zeigten sie, daß unter den Thoriumprodukten, die nach Neutroneneinfang durch das Isotop Thorium Th^{232}, d. h. bei der Reaktion

$$_{90}Th^{232} + _0n^1 \rightarrow _{90}Th^{233}$$

entstehen, ebenfalls Barium vorkommt. Diese ungewöhnlichen Resultate, die zu den damaligen Vorstellungen über den Mechanismus der Kernreaktionen im Widerspruch standen, wurden jedoch schnell durch neue Versuche bestätigt.

So entstand natürlich eine Vorstellung über die Möglichkeit von Kernreaktionen, bei denen vom Uran- oder Thoriumkern Teile mit einer Masse von etwa 140 Einheiten abgespalten werden. In diesem Falle muß es aber auch ein anderes Spaltstück mit einer mehr als zweimal kleineren Masse als der des Urans geben. Tatsächlich wurden unter den anderen Reaktionsprodukten radioaktive Isotope des Strontiums und Yttriums gefunden und ebenso das radioaktive Isotop eines Edelgases, das Krypton oder Xenon sein konnte.

Wenn jedoch der Prozeß der Teilung des Urankerns in zwei große Teile mit genähert gleichen Massen möglich ist, so muß dieser Prozeß von der Befreiung ungeheurer Energie begleitet sein, was aus der folgenden einfachen Überlegung hervorgeht. Wenn die Spaltung schon beendet ist und die Bruchstücke sich bis zu einem Abstand, in dem die Wirkung der Kernkräfte keine Rolle mehr spielt, voneinander entfernt haben, dann ist die allein übrigbleibende elektrostatische Abstoßungsenergie der Kerntrümmer mit den Ladungen Z_1 und Z_2 gleich

$$U = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r},$$

wobei r der Abstand zwischen den Kerntrümmern im Augenblick der Teilung ist. Wir nehmen als Beispiel einmal an, daß

$$Z_1 = Z_2 = 46 \quad \text{und} \quad r = 1{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ cm} \quad \text{ist.}$$

[1]) Siehe Naturwissenschaften 27, 1939, 11.

Dann ergibt sich daraus eine Energie von

$$U = \frac{46^2 \cdot (4,8)^2 \cdot 10^{-20}}{1,8 \cdot 10^{-12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = 165 \text{ MeV}.$$

Annähernd dasselbe Resultat erhält man, wenn man den Unterschied in der Bindungsenergie, wie sie einem Teilchen im Urankern und in den Kernen der Spaltprodukte mit der Masse von 100 bis 140 Einheiten zukommt, ausrechnet. Wie bekannt ist, verringert sich die Bindungsenergie am Ende des Periodischen Systems um etwa 1 MeV im Vergleich zu den Kernen mittlerer Masse. Daher muß bei der Spaltung des Urans in zwei Kerne mittlerer Masse Energie von $\sim$ 1 MeV $\cdot$ 238, also eine Energie von der Größenordnung 200 MeV, frei werden.

Versuche von O. FRISCH und L. MEITNER bestätigten diese Folgerung. Die Anordnung dieser Versuche war die folgende: Eine kleine, mit einem linearen Verstärker und einem Thyratron verbundene Ionisationskammer wurde von innen mit Uranoxyd überzogen. Wird nun an die Kammer eine Neutronenquelle (Rn + Be) gebracht, so kann man 10- bis 30mal in der Minute starke Ionisationsstöße, die nur energiereichen Teilchen mit einer großen Masse zugeschrieben werden können, beobachten. Die ganze Anordnung war so berechnet, daß die durch α-Teilchen erzeugten Impulse nicht ausreichten, um vom Oszillographen registriert zu werden. Andererseits zeigten Kontrollversuche, daß solche Ionisationsstöße nicht auftreten, wenn entweder das Uran oder die Neutronenquelle nicht vorhanden ist. Die Anzahl der Ionisationsstöße verdoppelte sich ungefähr, wenn die Neutronenquelle mit einer Schicht Paraffin umgeben wurde, woraus zu schließen war, daß im Prozeß der Kernspaltung die langsamen Neutronen eine wesentliche Rolle spielen.

Die Versuche von FRISCH wurden sofort in einer großen Zahl von Laboratorien mit positivem Resultat wiederholt. Außerdem bestätigten F. JOLIOT-CURIE und ebenso FRISCH und MEITNER die Uranspaltung durch andere Versuche, die auf folgenden Überlegungen begründet waren. Die Kerne, die als Ergebnis der Uranspaltung vorzufinden sind, müssen einen anomalen Überschuß an Neutronen gegenüber der Protonenzahl besitzen. Wir nehmen an, daß das leichte Isotop des Urans $_{92}U^{235}$ gespaltet wird und man als Spaltprodukte Barium ($Z = 56$) und Krypton ($Z = 36$) erhält. Die schwersten stabilen Isotope dieser Elemente haben die Massen 138 und 86, die Massensumme (138 + 86 = 224) ist um 11 Einheiten kleiner als die Masse des Ausgangskerns U^{235}. Folglich müssen die Spaltprodukte 11 überschüssige Neutronen enthalten.

Aus den Versuchen mit künstlicher Radioaktivität ist bekannt, daß in allen diesen Fällen die Kerne instabil sind und spontan unter Umwandlung von Neutronen in Protonen und Aussendung von Elektronen zerfallen. Aus diesem Grunde sind auch die bei der Uranspaltung entstehenden Kerne immmer radioaktiv und bilden den Stammkern einer β-Umwandlung.

Der erwähnte Versuch von F. JOLIOT-CURIE, FRISCH und MEITNER bestand in folgendem: Im Innern eines Messingzylinders, der von außen mit Uranoxyd bedeckt war, brachten sie eine Neutronenquelle (Rn + Be) an. Der Messingzylinder befand sich seinerseits koaxial im Innern eines Bakelitzylinders, so daß der Zwischenraum zwischen beiden ungefähr 3 mm betrug. Nach Ablauf einer gewissen Zeit wurde der Bakelitzylinder abgenommen und in seinem Innern ein Zähler angebracht, der die Radioaktivität, die nach einem bestimmten Gesetz sinkt, registriert. Die Deutung dieses Versuchs ist einfach: Die Kernsplitter, die

bei der Uranspaltung entstehen, fliegen nach entgegengesetzten Seiten auseinander, treffen auf den Bakelitzylinder auf und teilen ihm die Radioaktivität mit.

Der Prozeß der Uranspaltung konnte auch photographisch in WILSON-Kammer-Bildern festgehalten werden. Die Kammer arbeitete mit Wasser- und Alkoholdämpfen bei niedrigem Druck (15 cm Hg). Das Uran war in Form von UO_3 auf einer dünnen Folie im Innern der Kammer angebracht. Es wurden 885 Stereoaufnahmen gemacht, auf 25 davon konnten Spurenpaare, die von schweren, in entgegengesetzter Richtung aus der Folie herausfliegenden Teilchen herrührten, gefunden werden. Da der Druck im Innern der Kammer niedrig war, konnten die sehr dünnen Spuren der α-Teilchen, die spontan vom Uran ausgesandt wurden, leicht von den Spuren der schweren Teilchen unterschieden werden.

Abb. 414. Uranspaltung in der WILSON-Kammer

Auf Abb. 414 ist eine Aufnahme des Spaltprozesses wiedergegeben. Darauf sind ganz deutlich die Spuren zweier schwerer Teilchen, die nach entgegengesetzten Richtungen aus der mit Uran bedeckten Folie herausfliegen, zu erkennen (Aluminiumfolie von 1 μ Dicke,

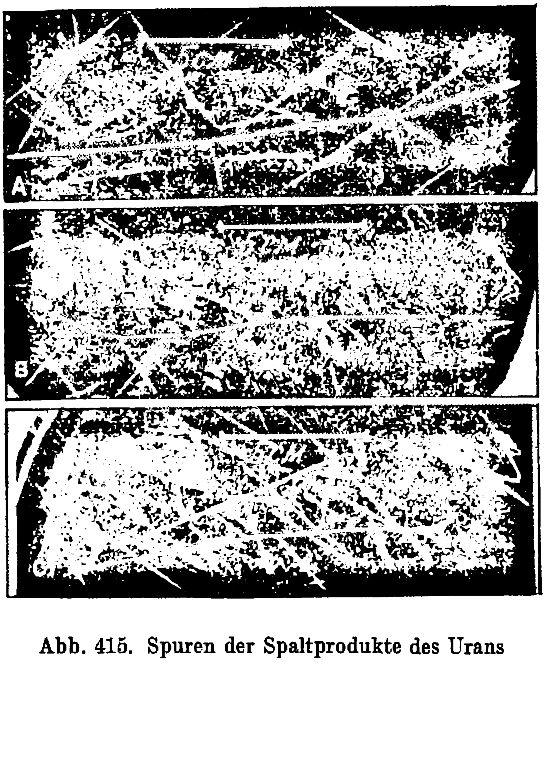


Abb. 415. Spuren der Spaltprodukte des Urans

Druck in der Kammer etwa 30 cm). Auf Abb. 415 sind Beispiele für Spuren einzelner Teilchen gebracht. Die Aufnahmen erfolgten bei niedrigem Druck. Diese Spuren haben einige charakteristische Besonderheiten, die sie scharf von denen der Protonen oder α-Teilchen unterscheiden. Während sich im Falle von Protonen oder α-Teilchen nur selten „Gabeln" bei Kernkollisionen bilden (etwa eine Gabel auf einige tausend Spuren), zeigen die Spuren der Spaltprodukte jedesmal mehrere Abzweigungen. Außerdem sieht man Knicke, die von zahlreichen Zusammenstößen, bei denen die Impulsübertragung zur Bildung von Gabeln nicht ausreichte, herrühren.

Auf Abb. 416 findet man Aufnahmen einer U^{235}-Spaltung, die nach der Photoplattenmethode erhalten wurden.

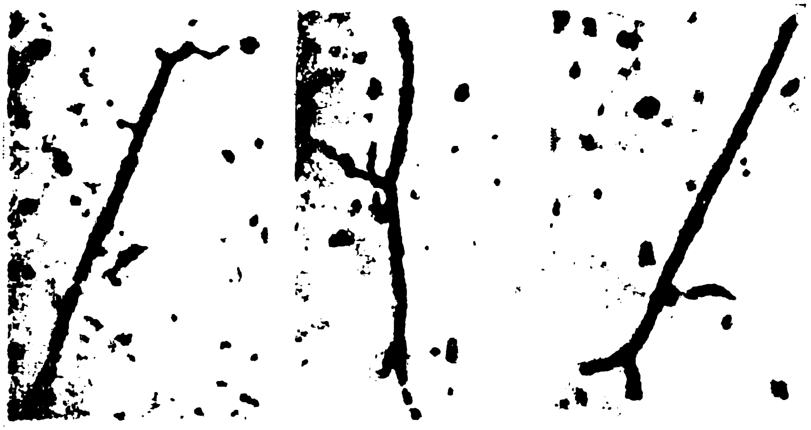


Abb. 416. U^{235}-Spaltung (Photoplattenmethode)

Im folgenden wollen wir nun die grundlegenden Ergebnisse der Untersuchung der Spaltung schwerer Kerne behandeln, ohne auf die historische Reihenfolge ihrer Gewinnung Rücksicht zu nehmen.

§ 304. Theorie der Atomkernspaltung

Zunächst betrachten wir den Mechanismus der Kernspaltung an Hand einfacher klassischer Überlegungen. Quanteneffekte besprechen wir später[1]).

Bezeichnen wir einen Kern mit der Ladung Z und der Massenzahl A durch das Symbol Z^A, so können wir die Reaktion der Spaltung schematisch in der Form

$$Z^A = Z_1^{A_1} + Z_2^{A_2} \qquad (Z = Z_1 + Z_2, \quad A = A_1 + A_2) \qquad (304,1)$$

schreiben.

[1]) Ausführliches siehe A. Achieser und J. Pomerantschuk: „Einige Fragen der Kerntheorie". Kap. V, (А. Ахиезер и И. Померанчук: „Некоторые вопросы теории ядра", гл. V, Гостехиздат, 1950). J. Frenkel: „Prinzipien der Atomkerntheorie", Kap. IV, (Я. И. Френкель: „Принципы теории атомных ядер." гл. IV, АН СССР, 1950); siehe auch H. A. Bethe: „Elementary Nuclear Theory." New York, Wiley, 1947.

Es ist offensichtlich, daß eine notwendige Bedingung einer solchen Reaktion die positive Energiebilanz, d. h. also ein Energiegewinn, ist. Wir wollen daher zunächst die energetische Seite des Prozesses betrachten.

Die Kernenergie ist, wie wir in § 245 sahen, durch folgende Faktoren bestimmt: erstens durch die Kernkräfte, deren Beitrag der Zahl der Teilchen im Kern, also der Massenzahl A, proportional ist, zweitens durch die Oberflächenspannung des Kerntropfens und drittens durch die Coulombsche Wechselwirkung zwischen den gleichnamig geladenen Protonen. Da die Teilchenzahl bei der Reaktion (304,1) ungeändert bleibt, hängt die Energiebilanz dieser Reaktion von den beiden letzteren Faktoren ab, d. h. von dem Verhältnis zwischen der Änderung der Oberflächenenergie und der Coulombschen Abstoßung.

Wir wollen jetzt die Energiebilanz der Spaltungsreaktion ziehen, und dabei von der Voraussetzung (die nicht ganz den experimentellen Ergebnissen entspricht) ausgehen, daß der Kern mit der Ladung Z und der Massenzahl A sich in zwei gleiche Hälften spaltet, d.h. also, daß $Z_1 = Z_2 = \frac{Z}{2}$ und $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$ ist. Die Bedingung der Volumenerhaltung gibt zunächst

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\,\frac{4}{3}\pi R_1^3\,,$$

woraus

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$$

resultiert. Nach den Formeln (245,3) und (245,6) ist die Summe der Oberflächenenergie und der Energie der elektrostatischen Abstoßung gleich:

vor der Spaltung

$$4\pi R^2\sigma + \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}\,,$$

nach der Spaltung $\left(\text{unter Berücksichtigung, daß } Z_1 = \frac{Z}{2} \text{ ist}\right)$

$$2\left(4\pi R_1^2\sigma + \frac{3}{5}\frac{Z_1^2e^2}{R_1}\right) = 2\left(4\pi\sigma\frac{R^2}{\sqrt[3]{4}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}\,\frac{Z^2e^2}{4R}\right).$$

Daraus finden wir

$$\Delta E = 4\pi R^2\sigma\,(1 - \sqrt[3]{2}) + \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right). \qquad (304,2)$$

Hierin ist das erste Glied negativ, das zweite positiv. Physikalisch ist dieses Resultat vollkommen verständlich. Das erste Glied stellt nur die Bilanz der Oberflächenenergie (ohne Berücksichtigung der Ladung) des Kerntröpfchens bei der Spaltung in zwei kleinere Tröpfchen dar. Dabei bleibt das Volumen erhalten, die Summe der Oberflächen der gebildeten Tröpfchen ist jedoch größer als die Oberfläche des ursprünglichen Tropfens:

$$2\cdot 4\pi R_1^2 - 4\pi R^2 = 4\pi R^2(\sqrt[3]{2} - 1) = 0{,}26\cdot 4\pi R^2\,,$$

d. h., die Oberfläche vergrößert sich um 26%. Daher ist vom Gesichtspunkt der Bilanz der Oberflächenenergien die Spaltung ein energetisch unvorteilhafter Prozeß; vorteilhaft ist

der entgegengesetzte Prozeß. Das ist auch der Grund dafür, daß zwei Tropfen einer gewöhnlichen Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, bei gegenseitiger Berührung zusammenfließen.

Das zweite Glied der Formel (304,2) berücksichtigt die Änderung der COULOMBschen potentiellen Energie. Diese Energie, die dem Quadrat der Ladung direkt proportional und dem Radius entgegengesetzt proportional ist, nimmt bei der Spaltung ab, da sie infolge der Ladungsteilung in zwei gleiche Hälften viermal kleiner wird und sich infolge des kleineren Radius nur $\sqrt[3]{2} = 1{,}26$mal vergrößert.

BOHR und WHEELER und unabhängig von ihnen der sowjetische Physiker J. FRENKEL untersuchten die Faktoren, von denen die Spaltung abhängt. Ob ΔE positiv oder negativ ist, d. h., ob bei der Kernspaltung Energie befreit oder absorbiert wird, hängt davon ab, was größer ist: der Energieaufwand zur Überwindung der Oberflächenkräfte oder die Abnahme der elektrostatischen Energie. Es ist klar, daß der kritische Wert ΔE, bei dem die Spaltungsreaktion „isotherm" vor sich gehen würde, dem Falle $\Delta E = 0$ entspricht. Unter dieser Bedingung liefert die Formel (304,2)

$$\frac{\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}}{4\pi R^2\sigma} = \sqrt[3]{4}\,\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{4}-1} = 0{,}70\,. \tag{304,3}$$

Hierin steht auf der linken Seite das Verhältnis der elektrostatischen Energie zur Oberflächenenergie, und wir sehen, daß ΔE gegen Null geht, wenn dieses Verhältnis den Wert 0,7 annimmt. Wir setzen $R = r_0\,A^{\frac{1}{3}}$ ($r_0 = 1{,}5\cdot 10^{-13}$ cm) und schreiben die Formel (294,3) in die Form

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi r_0^3\sigma}\,\frac{Z^2}{A} = 0{,}7 \tag{304,4}$$

um. Der Faktor bei $\frac{Z^2}{A}$ besteht aus universellen Konstanten.

Um den ungefähren Wert der Massenzahl zu finden, bei der die Spaltung energetisch vorteilhaft verläuft, setzen wir $Z = \frac{A}{2}$ (was für mittlere und schwere Kerne offenkundig unzutreffend ist) und $\sigma = 10^{-20}$ cm². Aus obiger Formel finden wir dann $A = 87$. So zeigt also ein grober Überschlag, daß bei Massenzahlen $A > 87$ die Spaltung energetisch vorteilhaft sein wird. Bei etwas genauerer Rechnung findet man, daß der kritische Wert $A = 87$ ein wenig zu klein ist und die Spaltung für $A > 100$ günstig wird. In der Tabelle LIX sind Energiewerte ΔE aufgeführt, die bei der Spaltung verschiedener Kerne in die in der zweiten Spalte verzeichneten Produkte frei werden.

Tabelle LIX

Ausgangskern	Spaltprodukte		Freiwerdende Energie	
			bei der Spaltung	bei nachfolgenden Umwandlungen
$_{28}Ni^{61}$	$_{14}Si^{30}$,	$_{14}Si^{31}$	− 11	2
$_{50}Sn^{117}$	$_{25}Mn^{58}$,	$_{25}Mn^{59}$	10	12
$_{68}Er^{167}$	$_{34}Se^{83}$,	$_{34}Se^{84}$	94	13
$_{82}Pb^{206}$	$_{41}Nb^{103}$,	$_{41}Nb^{103}$	120	32
$_{92}U^{239}$	$_{46}Pd^{119}$,	$_{46}Pd^{120}$	200	31

Diese Tabelle zeigt, daß beim Nickel für $A = 61$ die Energiebilanz noch negativ ist ($\Delta E = -11$ MeV), d. h., bei der Spaltung wird Energie aus dem umgebenden Medium absorbiert. Bei $_{50}Sn^{117}$ mit $A = 117$ ist ΔE jedoch bereits positiv und gleich $+ 10$ MeV, und das Uran $_{92}U^{239}$ setzt eine ungeheure Energie frei, $\Delta E = 200$ MeV.

Es ist natürlich nicht nur eine Spaltung in zwei gleiche oder nahezu gleiche Bruchstücke möglich. Abb. 417 gestattet, die bei der Spaltung von U^{239} frei werdende Energie zu finden, wenn diese sich auf verschiedene Art vollzieht. Auf der Abszisse ist die Protonenzahl der Kerne der Spaltprodukte aufgetragen, auf der Ordinate die Anzahl der Neutronen. Die Massenzahlen der Trümmer, die gleich der Summe aus Protonen und Neutronen in deren Kernen sind, stehen an den geneigten Geraden. Die Ellipsen entsprechen frei werdenden Energien von 100, 150, 180 und 190 MeV für die eine oder andere Art der Spaltung. Durch die Punkte sind stabile Isotope gekennzeichnet. Wenn z. B. eines der Spaltprodukte $_{44}Ru^{100}$ ist und bei der Spaltung 150 MeV frei werden (durch das Sternchen im Schnittpunkt der Geraden $A = 100$ mit der Ellipse 150 MeV gekennzeichnet), so hat das andere

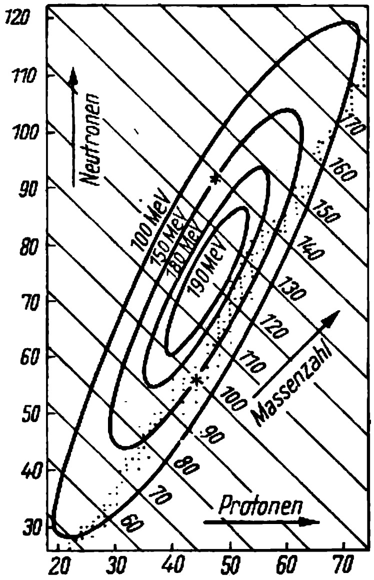


Abb. 417. Spaltprodukte von U^{239} für verschiedene Energien der Spaltung
Durch die Punkte sind stabile Isotope gekennzeichnet. Die Spaltstücke $_{48}Cd^{139}$ und $_{44}Ru^{100}$, die als Beispiel gewählt wurden, sind durch Sternchen markiert

eine Kernladung von $92 - 44 = 48$ und eine Massenzahl $239 - 100 = 139$, ist also der $_{48}Cd^{139}$-Kern. Wir sehen, daß auf der Ellipse, die der Freisetzung von 150 MeV entspricht, der Punkt mit den Koordinaten $Z = 48$ und $A = 139$ außerhalb des Streifens stabiler Kerne liegt. Tatsächlich ist das Verhältnis zwischen der Protonen- und Neutronenzahl im Kern $_{48}Cd^{139}$ sehr anomal: Das schwerste stabile Isotop Cd hat eine Massenzahl 116, das

Isotop $_{48}Cd^{117}$ ist schon β^--radioaktiv. Daraus folgt, daß beim Auftreten der Spaltprodukte $_{44}Ru^{100}$ und $_{48}Cd^{139}$ eins von ihnen, und zwar $_{48}Cd^{139}$, spontane β-Umwandlungen erfahren wird bis zu dem Zeitpunkt, wo im Kern ein normales Verhältnis zwischen Neutronen und Protonen hergestellt ist. Bei diesen Umwandlungen wird eine zusätzliche Energiemenge frei, die in der letzten Spalte der Tabelle LIX angegeben ist.

§ 305. Die Aktivierungsenergie bei der Spaltung

Wir sehen also, daß sich alle Elemente, deren Atommassen größer als 100 sind, als instabil hinsichtlich der Spaltung erweisen. Die Grenze der Beständigkeit liegt in der Mitte des Periodischen Systems, etwa in der Nähe des Silbers. Es taucht natürlich die Frage auf: Warum existieren dann aber noch Isotope mit Massen größer als 100 in der Natur und warum unterliegen sie nicht der spontanen Spaltung (ausgenommen die allerschwersten Kerne, siehe § 277)?

Die Antwort auf diese Frage lautet, daß die positive Energiebilanz eine nicht ausreichende Bedingung ist, damit die Spaltung eintreten kann. Dazu gibt es ein Analogon bei gewöhnlichen chemischen Reaktionen. Betrachten wir ein einfaches Beispiel:

$$H(\uparrow) + pH_2(\uparrow\downarrow) \rightarrow oH_2(\uparrow\uparrow) + H(\downarrow).$$

Die Reaktion besteht im Ersatz eines Atoms im Molekül des Parawasserstoffs (pH_2) durch ein freies Atom mit entgegengesetzter Richtung des Kernspins, wodurch ein Molekül des Orthowasserstoffs (oH_2) entsteht. Obwohl diese Reaktion eine kleine positive Energiebilanz hat, erfolgt sie bei weitem nicht bei jedem Zusammenstoß. Darüber hinaus zeigt der Versuch, daß z. B. bei der Temperatur 10° C nur drei von 10^7 Zusammenstößen zu der Reaktion führen. Dabei ist die Geschwindigkeit der Reaktion in hohem Maße temperaturabhängig. Bei jeder chemischen Reaktion ist die Zahl der wirksamen Zusammenstöße n mit der Gesamtzahl der Zusammenstöße n_0 durch die Formel

$$n = n_0 e^{-E/kT}$$

verknüpft. Das zeigt, daß für das Zustandekommen der Reaktion die Energie des Systems größer als ein gewisser kritischer Wert E, den man die Aktivierungsenergie nennt, sein muß. Die Potentialkurve der Abb. 418 zeigt anschaulich den Wert der Aktivierungs-

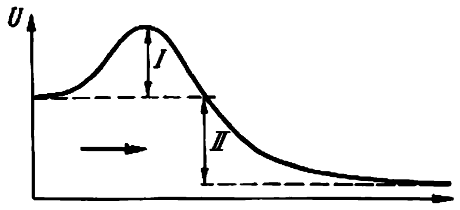


Abb. 418. Aktivierungsenergie (I) und Reaktionsenergie (II)

energie: Wir sehen, daß, obwohl die Reaktion zum Freiwerden von Energie führt, sie so lange nicht vonstatten gehen wird, bis nicht die Energie des Systems die Höhe des Potentialwalls erreicht, der beide Bereiche teilt. Links von diesem Wall ist das System in einem Zustand, der als relativ beständig oder metastabil zu bezeichnen ist. Solange die Energie des Systems kleiner ist als die Aktivierungsenergie, kann es sich in einem derartigen Zustand beliebig lange aufhalten.

Der Mechanismus der Aktivierung bei gewöhnlichen chemischen Reaktionen kann verschieden sein: Manchmal müssen sich die Moleküle, die an der Reaktion beteiligt sind, vorher in Atome teilen, manchmal muß eine bestimmte kritische Konfiguration des Systems realisiert werden u. a. m. Den Aktivierungsmechanismus der Kernspaltungsreaktion erforschten J. Frenkel und ebenso Bohr und Wheeler. Wir sahen oben, daß die Energiebilanz der Spaltung von der Konkurrenz zwischen der Oberflächenspannung des Kerntropfens und der elektrostatischen Abstoßung abhängt. Die Kugelform, die die kleinste Oberfläche bei gegebenem Volumen hat, wäre hinsichtlich der Stabilität am günstigsten, wenn nur die Kräfte der Oberflächenspannung wirksam wären, dagegen wäre sie am ungünstigsten, wenn ausschließlich elektrostatische Abstoßungskräfte vorhanden wären. Es ist verständlich, daß der Kern relativ beständig (metastabil) sein wird, wenn die Summe der Oberflächen- und elektrostatischen Energie für die Kugelform ein Minimum ist. Wählen wir irgendeinen bestimmten Parameter, der die Form des Kerntropfens charakterisiert, und stellen die potentielle Energie als Funktion dieses Parameters auf, so erhalten wir die Sattelkurve der Abb. 418. Solange der Kern eine Kugelform hat, befindet er sich im niedrigsten Punkt des Sattels (Minimum der potentiellen Energie). Bei jeder Deformation wächst die potentielle Energie des Kerns, und wenn sie so groß ist, daß der Gipfel des „Potentialwalls" erreicht ist, entsteht ein labiler Zustand, in dem eine spontane Spaltung auftreten kann. Die Höhe des Walls über dem niedrigsten Punkt des Sattels ist somit die Aktivierungsenergie, die gleich der Energie ist, die aufgewendet werden muß, um die kritische Deformation des Kerns zu erreichen. Mit Vergrößerung der Kernladung verringert sich die Vertiefung der Potentialkurve, und für einen bestimmten Wert von Z (der Zahl der Protonen im Kern) schließlich wird die Tiefe gleich Null. Ein derartiger Kern ist instabil: Die kleinste Deformation führt zu seiner Spaltung.

Im vorangegangenen Paragraphen sahen wir, daß die Spaltung energetisch günstig ist, wenn das Verhältnis der elektrostatischen Energie des Kerns zu seiner Oberflächenenergie gleich 0,7 wird. J. Frenkel und Bohr und Wheeler zeigten auf verschiedenem Wege, daß die Aktivierungsenergie gegen Null geht, wenn das erwähnte Verhältnis gleich 2 wird. Unter Benutzung der linken Seite der Formel (304,4) erhalten wir für diesen Fall

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi r_0^3\sigma}\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{Krit}}=2$$

oder

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{Krit}}=10\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{r_0^3\sigma}{e^2}. \tag{305,1}$$

Setzen wir die bekannten Werte r_0, σ und e ein, so finden wir für den Grenzfall der völligen Instabilität des Kerns hinsichtlich der Spaltung:

$$\frac{Z^2}{A}=10\,\frac{12{,}57\cdot(1{,}5)^3\cdot10^{-39}\cdot10^{20}}{3\cdot(4{,}8)^2\cdot10^{20}}=50.$$

Die Größe $\frac{Z^2}{A}$ erweist sich also als Maß für die Instabilität des Kerns hinsichtlich der Spaltung. Wenn wir dieses Kriterium auf die letzten Elemente des Periodischen Systems anwenden, so erhalten wir z. B. für das Hauptisotop des Urans:

$$\frac{Z^2}{A}=\frac{(92)^2}{238}=35{,}5.$$

Für die neu entdeckten Transurane liegt die Größe $\frac{Z^2}{A}$ selbstverständlich noch näher am Grenzwert. Z. B. ist für ${}_{95}Am^{242}$ $\frac{Z^2}{A} = 37{,}3$. Wir sehen, daß diese schweren Kerne sich an der Grenze der Stabilität befinden.

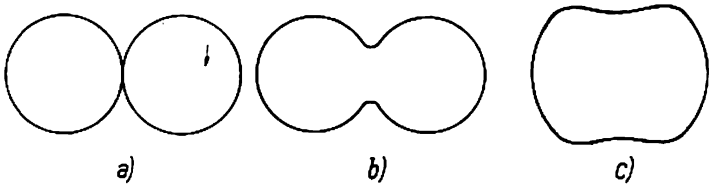


Abb. 419

Der Mechanismus der Spaltung besteht nach der dargelegten Theorie in folgendem: Bei kleinen Deformationen des Kerns, den wir uns als geladenes Tröpfchen vorstellen, gerät dieser in Schwingung, so daß er sich ausdehnt und zusammenzieht. Wenn bei der gegebenen Kernladung die Anfangsdeformation die kritische Größe, die der Aktivierungsenergie entspricht, erreicht, führen diese Schwingungen letzten Endes zur Spaltung. Die Größe der kritischen Deformation hängt wesentlich von der Kernladung ab. Die Grenze der Stabilität ergibt sich, wie wir sahen, aus der Formel (305,1); danach erhalten wir

$$Ze = \left(10 \frac{4}{3} \pi r_0^3 A \sigma\right)^{\frac{1}{2}} = (10 \cdot \text{Volumen} \cdot \text{Oberflächenspannung})^{\frac{1}{2}}.$$

Bei dieser Größe der Ladung führt schon eine geringe Abweichung von der Kugelform zum Auftreten einer Einschnürung und zur Spaltung des Tropfens in zwei Hälften. Für $\frac{Z^2}{A} < \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{Krit}}$ ist schon eine endliche Änderung der Form erforderlich, um die kritische

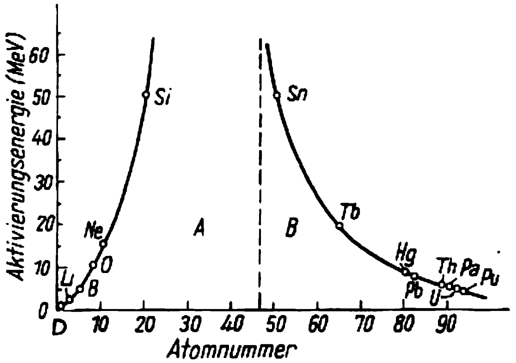


Abb. 420. Abhängigkeit der Aktivierungsenergie, wie sie dem Kern zur Einleitung einer exothermen Reaktion zuzuführen ist, von der Atomnummer

A — Instabilität hinsichtlich der Vereinigung; *B* — Instabilität hinsichtlich der Spaltung

Konfiguration zu erreichen; je kleiner die Ladung ist, desto größer muß die anfängliche Deformation sein, die schließlich durch Schwingungen zur Spaltung führt, d. h., um so größer ist die Aktivierungsenergie der Reaktion. In Abb. 419 sind kritische Konfigurationen für verschiedene Werte $\frac{Z^2}{A}$ gezeigt: Abb. 419c entspricht einem $\frac{Z^2}{A}$-Wert, der sich nur wenig vom kritischen Wert unterscheidet, Abb. 419a entspricht $Z = 0$.

Die Aktivierungsenergien für die Spaltung verschiedener schwerer Kerne sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle LX

Isotop	Z^2/A	Aktivierungs-energie in MeV
$_{92}U^{234}$	36,2	4,8
$_{92}U^{235}$	36,0	5,1
$_{91}Pa^{231}$	35,9	5,2
$_{92}U^{238}$	35,5	5,8
$_{90}Th^{232}$	35,0	6,6
$_{88}Ra^{226}$	34,4	7,6
$_{80}Hg^{196-204}$	32,7—31,3	11—15
$_{50}Sn^{112-124}$	22,5—20,2	40—50

Die Abhängigkeit der Aktivierungsenergie von der Atomnummer wird durch Abb. 420 wiedergegeben. Mit Annäherung an die Mitte des Periodischen Systems verläuft die Kurve steil aufwärts. Im linken Teil der Zeichnung ist die Abhängigkeit der Aktivierungsenergie von der Atomnummer für den umgekehrten Vorgang, also für die Vereinigung zweier Kerne zu einem, dargestellt. Im Falle zweier Deuteronen beträgt diese Energie nur 0,5 MeV und steigt ebenfalls zur Mitte des Periodischen Systems hin steil an.

Wir sehen also, daß mit Ausnahme der Elemente mit mittlerer Atomnummer und mittlerer Masse sich alle Kerne im metastabilen Zustand befinden und „Brennstoff" für „alchimistische" Reaktionen darstellen: die schweren Kerne für die Reaktion der Spaltung, die leichten für die der Vereinigung. Dabei liegen die besten Reaktionsmöglichkeiten und die damit verbundene Befreiung großer Energien, wie auch zu erwarten war, an den entgegengesetzten Enden des Periodischen Systems. Wenn wir um uns herum diese Reaktion nicht beobachten können, dann nur darum, weil für ihren Ablauf mit endlicher Geschwindigkeit eine Aktivierungsenergie von einigen Millionen Elektron-Volt notwendig ist. Gehen wir von diesen Aktivierungsenergien zu Temperaturen über, bei denen solche „thermonuklearen" Reaktionen mit merkbarer Geschwindigkeit vor sich gehen, so erhalten wir, wenn wir beispielsweise $kT = 1$ MeV setzen,

$$T = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-6}}{1{,}48 \cdot 10^{-16}} \sim 10^{10}\,{}^\circ\,\mathrm{K}.$$

Beachten wir, daß kT die *mittlere* Energie bei gegebener Temperatur ist und daß bei beliebiger Temperatur die Geschwindigkeit der Gasmoleküle nach dem Maxwellschen Gesetz verteilt sind, d. h. also, daß es neben den Teilchen mit mittlerer Energie auch solche mit erheblich größeren Energien gibt, dann können wir die Größenordnung der Temperatur

abschätzen, bei der spontane „alchimistische“ Reaktionen möglich sind. Sie geht in die 10 Millionen Grad. Solche Temperaturen herrschen in den zentralen Teilen der Sterne, und wie wir noch sehen werden, ist die Annahme berechtigt, daß dort auch gegenwärtig solche Reaktionen stattfinden, die die Temperatur der Sterne auf hohem Niveau halten.

§ 306. Die spontane Spaltung

Im vorigen Paragraphen sahen wir, daß für $\frac{Z^2}{A} = 50$ die elektrostatischen Kräfte die Oberflächenspannung des Tropfens der Kernflüssigkeit völlig kompensieren und der Kern seine Stabilität verliert. Nehmen wir für eine grobe Abschätzung an, daß Z proportional A zunimmt, so sehen wir, daß dies für $Z = 125$ eintrifft. Ein derartiger überschwerer Kern kann nicht mehr bestehen und muß sich spontan im Verlauf eines Zeitraums der Größenordnung von 10^{-21} sec spalten.

Jedoch auch für niedrigere Werte von Z ist eine spontane Spaltung durch den Tunneleffekt, d. h. durch einen dem α-Zerfall analogen Mechanismus (§ 284), möglich. Die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs ist durch den Exponentialfaktor

$$e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2M(U-E)}\,d}$$

gegeben.

Der Kehrwert dieser Wahrscheinlichkeit ist die mittlere Lebensdauer τ des Kerns hinsichtlich der spontanen Spaltung. Wählen wir als Faktor vor der Exponentialfunktion 10^{-21} (Kern-Zeiteinheit), dann haben wir

$$\tau = 10^{-21} \cdot e^{\sqrt{2M(U-E)}\,\frac{4\pi d}{h}}.$$

Für $U - E$ ist im gegebenen Falle die Aktivierungsenergie einzusetzen, d. h. 5 — 6 MeV; die Größe d, von der die Wahrscheinlichkeit stark abhängt, kann nur angenähert abgeschätzt werden. Rechnet man τ in Jahren, M in Massenzahlen A, $U - E$ in MeV und d in Einheiten r_0, so nimmt die vorige Formel folgende Form an

$$\tau = 10^{-29+0{,}145a\sqrt{A(U-E)}}.$$

Hierin ist $a = 2d$. Für U^{238} ($A = 238$) kann man $U - E$ zu 6 MeV ansetzen, die Größe a ist von der Größenordnung $\frac{3}{2}$ $(238)^3$ (in Einheiten r_0). Dann erhält man

$$\tau = 10^{-29+51} = 10^{22} \text{ Jahre} = 10^{30} \text{ sec}.$$

Diese Lebensdauer ist unvergleichlich größer als das τ des α-Zerfalls desselben U^{238} ($4 \cdot 10^9$ Jahre). Bei einer solchen mittleren Lebensdauer könnte man die Bildung *eines Splitterpaares pro Tag* in einem Stück Uran mit der Masse 1 kg erwarten.

In Wirklichkeit ist die Wahrscheinlichkeit der spontanen Spaltung des Urans wesentlich größer (und die Lebensdauer entsprechend kleiner) als der erwähnte Wert. Die sowjetischen Physiker K. A. Petrshak und G. N. Fljorow beobachteten experimentell die spontane Spaltung des Urans und bestimmten seine mittlere Lebensdauer zu 10^{16} Jahren. Eine solche Abweichung von der Schätzung entsteht durch die ungenaue Kenntnis der Aktivierungsenergie. Hier, wie auch im Falle des α-Zerfalls, führen kleine Energieschwankungen zu sehr großen Unterschieden in der Lebensdauer.

§ 307. Die verschiedenen Spaltungsverfahren

In den vorangegangenen Paragraphen beschäftigten wir uns mit der Theorie der Spaltungsreaktionen schwerer Kerne. Es sei noch einmal kurz zusammengefaßt, daß bei einer großen Zahl von geladenen Teilchen (Protonen) im Kern die elektrostatischen Abstoßungskräfte die Kräfte der Oberflächenspannung, die den Kern vor der Zerstörung bewahren, in hohem Maße kompensieren. Wird an einem solchen Kern eine Deformation hervorgerufen, so kann sich der Kerntropfen als Folge der dadurch entstandenen Schwingungen in zwei kleinere Kerne spalten. Die Energie, die notwendig ist, um dem Kern diese kritische Deformation, auf die eine Spaltung erfolgt, beizubringen, ist die Aktivierungsenergie des Prozesses. Sie wird dem Kern durch ein von ihm eingefangenes Neutron zugeführt, dessen Energie gleich seiner Bindungsenergie zuzüglich der kinetischen Energie ist. Die Bindungsenergie, die in den schwersten Kernen (Thorium, Protaktinium, Uran, Plutonium) auf ein Kernteilchen entfällt, beträgt etwa 5 bis 7 MeV, die Aktivierungsenergie des Spaltungsprozesses macht ungefähr 6 MeV aus.

Wir betrachten als Beispiel die Spaltung der Uranisotope U^{235} und U^{238}. Durch Absorption eines Neutrons entsteht jeweils ein Isotop mit einer um Eins größeren Masse, z. B.

$$U^{235} + n^1 \rightarrow U^{236} + \gamma .$$

Ob es zu einer Spaltung kommt oder nicht, hängt von der Beziehung zwischen der Bindungsenergie des Neutrons im U^{235} und der Aktivierungsenergie des U^{236} ab, da der Spaltung das Isotop unterliegt, das das Neutron eingefangen hat. Im vorliegenden Falle beträgt die Bindungsenergie 6,81 MeV und die Aktivierungsenergie 6,0 MeV. Daraus folgt, daß schon thermische Neutronen, die von U^{235} absorbiert werden, eine Bindungsenergie mit sich bringen, die die Aktivierungsenergie des entstehenden Kerns übertrifft. Daher teilt sich U^{235} bereits unter der Wirkung langsamer Neutronen. Im Gegensatz hierzu beträgt die Bindungsenergie für U^{238} 5,3 MeV, und die Aktivierungsenergie ist für U^{239} um etwa 1 MeV größer. Daher spaltet sich U^{238} nicht unter der Einwirkung langsamer Neutronen: Damit eine Spaltung zustande kommen kann, muß das durch U^{238} einzufangende Neutron außer seiner Bindungsenergie noch einen Energieüberschuß von etwa 1 MeV in Form seiner kinetischen Energie mit sich bringen.

Die Bindungsenergie ist im allgemeinen bei Kernen mit einer ungeraden Neutronenzahl größer und bei Kernen mit gerader Neutronenzahl kleiner (siehe § 246). Daher ist die Spaltung durch thermische Neutronen vorwiegend bei Kernen mit ungerader Neutronenzahl möglich. Im Falle des U^{235} ist z. B. die Neutronenzahl $235 - 92 = 143$, für U^{238} dagegen $238 - 92 = 146$.

Der Versuch bestätigte diese theoretischen Voraussagen voll und ganz. Zu ihrer Nachprüfung wurde mit Hilfe eines Massenspektrographen eine Uran-Isotopentrennung in kleinem Maßstabe vorgenommen. Auf Platinstreifchen wurden einige Mikrogramm U^{238} und entsprechend geringere Mengen U^{235} und U^{234} gesammelt. Diese getrennten Isotope wurden mit schnellen und mit langsamen Neutronen beschossen, und es konnte festgestellt werden, daß sich U^{238} nur durch schnelle Neutronen spalten läßt.

Weiter zeigte es sich, daß nicht nur Neutronen, sondern auch Protonen, Deuteronen und α-Teilchen, ja sogar γ-Quanten, eine Spaltung hervorrufen. Die Photospaltung wurde zuerst bei der Bestrahlung von Uran und Thorium mit γ-Strahlen der Energie 6,3 MeV, die durch Bombardierung von CaF_2 durch Protonen [$F(p, \gamma)$-Reaktion] erzeugt wurden, entdeckt. Sie ist auch leicht mit künstlichen γ-Strahlen, wie man sie im Betatron erhält, zu erreichen.

In letzter Zeit wurden zur Spaltung schwerer Kerne Teilchen sehr hoher Energie — Neutronen, Deuteronen und α-Teilchen mit Energien von entsprechend 100, 200 und 400 MeV

benutzt. Diese Teilchen spalten nicht nur das Uran, Thorium und Protaktinium, sondern auch die leichteren Kerne, und zwar Wismut ($Z = 83$), Blei ($Z = 82$) und Thallium ($Z = 81$).

Schließlich gelang es K. A. Petrshak und G. N. Fljorow, wie schon in § 306 erwähnt, sehr seltene Prozesse der Uranspaltung zu beobachten, ohne daß eine Neutronenquelle vorhanden war. Sie arbeiteten eine außerordentlich empfindliche Methode zur Registrierung von Spaltprodukten aus und beobachteten im Mittel sechs Impulse in der Stunde bei Anwesenheit von Uran, das keinerlei Bestrahlung ausgesetzt war. Eine strenge Beurteilung aller möglichen Ursachen, die für diese Impulse verantwortlich sein konnten, führte zu dem Schluß, daß es sich um spontane Kernspaltung des Urans handeln muß. Petrshak und Fljorow schätzten die Halbwertszeit für diese Spaltung des Isotops U^{238} zu $10^{16} - 10^{17}$ Jahren. Die Halbwertszeit des üblichen, mit Emission von α-Teilchen verbundenen Zerfalls beträgt 10^9 Jahre.

§ 308. Die Spaltprodukte

Die Spaltprodukte sind überaus vielfältig. Die in neueren Veröffentlichungen enthaltenen Tabellen der bei der Uranspaltung entstehenden Trümmer führen etwa 300 verschiedene Isotope auf[1]), die unter den Spaltprodukten identifiziert werden konnten. Eine derartige Vielfalt erklärt sich daraus, daß sich erstens der Kern auf verschiedene Art und Weise spaltet und somit verschiedene primäre Trümmer ergibt, und zweitens diese primären Produkte immer radioaktiv sind und den Anfang einer mehr oder weniger langen Kette von Folgeprodukten bilden.

Auf Abb. 421 ist für U^{235} die Trümmerausbeute (in %) in Abhängigkeit von der Masse der Trümmer dargestellt. Wie man sieht, kommt die geringste Wahrscheinlichkeit dem Fall der Spaltung in genau gleiche Hälften zu. Die ganze Kurve ist zur Linie der halben Masse symmetrisch und zeigt zwei Maxima, die darauf hindeuten, daß die größte Wahrscheinlichkeit für eine Spaltung besteht, bei der sich die der Trümmermassen etwa wie 2:3 verhalten.

Die wichtigsten Eigenschaften der Kerntrümmer, die mit der größten Wahrscheinlichkeit aus dem U^{235} entstehen, sind in Tabelle LXI aufgeführt[2]).

Tabelle LXI

	Leichte Trümmer A_1	Schwere Trümmer A_2
Massenzahl A	$\sim$ 95	$\sim$ 139
Atomnummer Z	$\sim$ 38 (Sr)	$\sim$ 54 (Xe)
Energie E in MeV	97	65
Geschwindigkeit v_0 in cm/sec	$1{,}4 \cdot 10^9$	$0{,}93 \cdot 10^9$
$(H\varrho)$ in Gauss/cm	$6{,}5 \cdot 10^5$	$5{,}9 \cdot 10^5$
(Ionenladung)	20 e	22 e
mittlere Reichweite $^0R_{\text{mittl}}$	25 mm in Luft	19 mm in Luft

Radioaktive Zerfallsketten werden aus Produkten, die nachfolgend durch β-Umwandlung entstehen, gebildet. Diese Umwandlung ist auch theoretisch zu erwarten. Wie schon in § 303 erwähnt wurde, besitzen die durch den Spaltungsprozeß gebildeten Kerne einen anomal hohen Neutronengehalt. Ein solcher Kern ist bestrebt, seinen Neutronenüberschuß durch nach-

[1]) *Успехи физических наук*, т. XXXIII, стр. 77, 1947.
[2]) Nach Daten aus dem unter der Redaktion von C. Goodman herausgegebenen Buch: „The science and engineering of nuclear power", 1947.

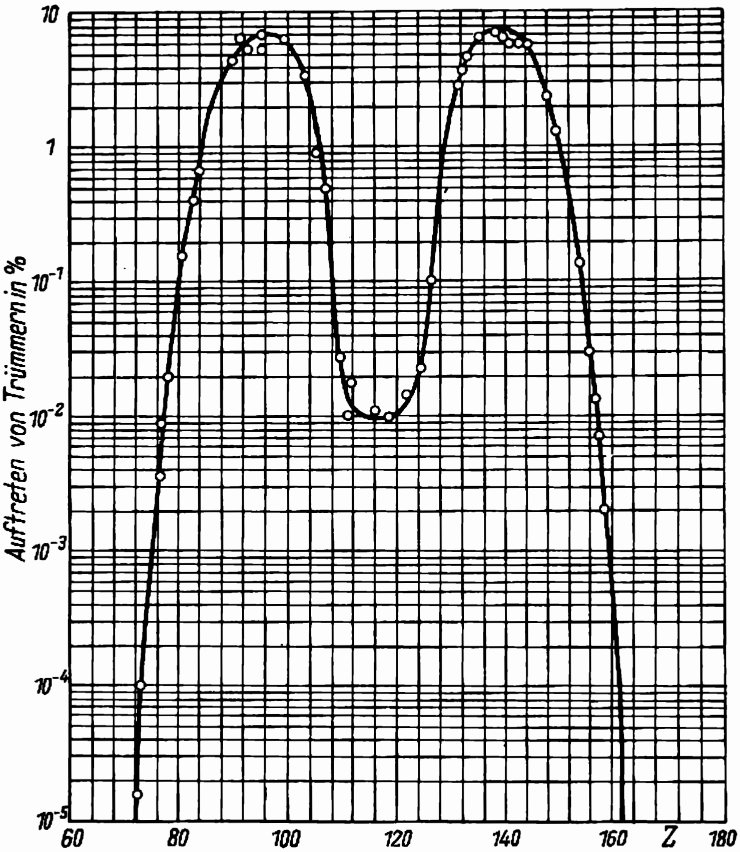


Abb. 421. Auftreten der verschiedenen Trümmer bei der U^{235}-Spaltung in Abhängigkeit von ihrer Masse

folgende β-Umwandlung auszugleichen. Bei jeder derartigen Umwandlung verringert sich der Neutronenüberschuß um zwei Einheiten — es verschwindet ein Neutron und erscheint ein Proton. Infolgedessen entsteht eine ganze radioaktive Reihe mit 4 bis 6 Gliedern, die sich bis zu dem Augenblick fortsetzt, in welchem sich ein stabiles Produkt gebildet hat. Beispiele derartiger Ketten enthält die folgende Tabelle:

Massenzahl	53 (J)	54 (Xe)	55 (Cs)	56 (Ba)	57 (La)	58 (Ce)
137	30 sec →	3,4 min →	33 Jahre →	stabil		
138		17 min →	32 min →	stabil		
139		41 sec →	7 min →	85 min →	stabil	
140		16 sec →	kurz →	12,8 Tg. →	40,0 Std. →	stabil

Die Spaltung leichterer Kerne (83 Bi – 73 Ta) durch Teilchen sehr hoher Energien, wie sie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, besitzt einige Besonderheiten, die sie von der Spaltung schwerer Kerne durch langsame Neutronen unterscheidet. So ist z. B. die Asymmetrie in den Splittermassen nicht vorhanden. Weiter existiert eine beträchtliche Ausbeute leichter Isotope, und es tritt die Bildung eines stabilen Isotops gleich als erstes Produkt auf. Zum Beispiel beobachtet man bei der Spaltung des Wismuts durch α-Teilchen mit einer Energie von 400 MeV und Deuteronen von 200 MeV die Bildung von Br^{82} in einer Menge, die mit der Menge von Br^{83} vergleichbar ist, während sich bei der Uranspaltung mit langsamen Neutronen die Ausbeuten dieser Isotope wie $1:10^4$ verhalten. Das erklärt sich wahrscheinlich daraus, daß sich beim Einfang eines Teilchens mit sehr großer Energie der Kern so stark „erwärmt", daß der Spaltung die „Verdampfung" einer großen Anzahl von Neutronen vorausgeht. Das wird dadurch bestätigt, daß als Spaltprodukte mit der größten Wahrscheinlichkeit solche Kerne auftreten, deren Massensumme kleiner als die Massenzahl des beschossenen Kerns ist.

§ 309. Die bei der Spaltung freiwerdenden Neutronen

Als eine der wichtigsten Besonderheiten der Spaltung schwerer Kerne ist die diese Reaktion begleitende Befreiung von Neutronen anzusehen. Es sind dabei zwei Gruppen von Neutronen zu unterscheiden: „momentane" und „verzögerte". Die ersteren werden unmittelbar nach der Spaltung emittiert, die letzteren mit erheblichen Verzögerungen.

Das Auftreten einer „momentanen" Neutronenemission (momentanen in bezug auf die Laborzeit, nicht aber hinsichtlich der Kernzeit mit der Einheit 10^{-21} sec) ist verständlich. Es ist durchaus möglich, daß bei der Spaltung eines großen Kerntropfens dieser in Teilchen zerfällt und daß es dabei einigen Neutronen nicht gelingt, sich den Splittern anzugliedern. Ähnlich ist es bei der Teilung eines großen Tropfens einer gewöhnlichen Flüssigkeit in zwei Hälften, während der im allgemeinen noch kleine Tröpfchen entstehen. Außerdem befinden sich die Spaltprodukte im ersten Augenblick nach der Spaltung, wenn sie wieder Kugelform annehmen, in einem stark angeregten Zustand, der durch freiwerdende Deformationsenergie bedingt ist. Die Anregungsenergie können sie entweder in Form von γ-Strahlen abgeben oder sie zur Emission schneller Neutronen verwenden, wenn sich in einer Zeit, die vergleichbar mit der mittleren Lebensdauer für γ-Strahlenemission ist, zufällig eine ausreichende Energiemenge auf ein oder mehrere Neutronen konzentriert.

Nicht weniger interessant und wichtig ist auch der Prozeß der Emission „*verzögerter*" Neutronen. Es zeigt sich, daß einige der Spaltprodukte nach einer Zeit in der Größenordnung von einigen Sekunden beginnen, Neutronen in Form spontaner Strahlung nach der Art von α- oder β-Strahlung radioaktiver Stoffe auszusenden[1]). Die Intensität dieser Strahlung nimmt mit der Zeit ab. Durch Analyse der Kurve, die die Zeitabhängigkeit der Neutronenzahl angibt, können einige bestimmte Halbwertszeiten festgestellt werden. Diese betragen

---

[1]) Eine solche Neutronen-Radioaktivität wurde auch an einigen leichten Elementen nach ihrem Beschuß mit Deuteronen sehr hoher Energie entdeckt. So wurde z. B. beim Beschuß von Elementen, die dem Sauerstoff nahe stehen, aber größere Masse haben, eine Neutronen-Aktivität mit der Halbwertszeit 4,4 sec festgestellt. Dieselbe Halbwertszeit besitzt das β^--radioaktive Isotop des Stickstoffs N^{17}. Daraus resultiert die folgende Deutung der Neutronen-Radioaktivität mit der erwähnten Halbwertszeit: Eines der Produkte beim Deuteronenbeschuß ist N^{17}. Dieser wandelt sich unter β^--Zerfall in den angeregten O^{17*}-Kern um, der wiederum spontan ein Neutron aussendet und in O^{16} übergeht.

z. B. für U^{235} in Sekunden: 0,4; 1,8; 4,4; 23 und 56. Die relative Intensitätsverteilung ist in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Halbwertszeit in sec	Relative Intensität bei Sättigung
0,4	0,4
1,8	0,5
4,4	1,1
23	1,0
56	0,14

Der Bruchteil der verzögerten Neutronen relativ zu allen bei der Spaltung ausgesandten Neutronen beträgt 1%.

Der Entstehungsmechanismus verzögerter Neutronen wurde von Bohr und Wheeler folgendermaßen gedeutet. Wie wir schon sahen, ist in den Kernen der Spaltprodukte ein unverhältnismäßig hoher Überschuß an Neutronen gegenüber den Protonen vorhanden. Dieser Überschuß wird durch nachfolgende β-Umwandlungen ausgeglichen. Die Produkte dieser β-Umwandlungen befinden sich im Augenblick der Entstehung in einem angeregten Zustand, und wenn sich in irgendeinem von ihnen die Anregungsenergie größer als die Bindungsenergie des Neutrons im jeweiligen Kern erweist so wird in der folgenden Umwandlung statt eines β-Teilchens ein Neutron ausgesandt. Da diese Emission im Verlauf einer Zeit erfolgt, die sehr kurz im Vergleich zur Halbwertszeit der vorangehenden β-Umwandlung ist, erweist sich die Halbwertszeit des Abklingens der Neutronenaktivität genau gleich der Halbwertszeit des β-Zerfalls.

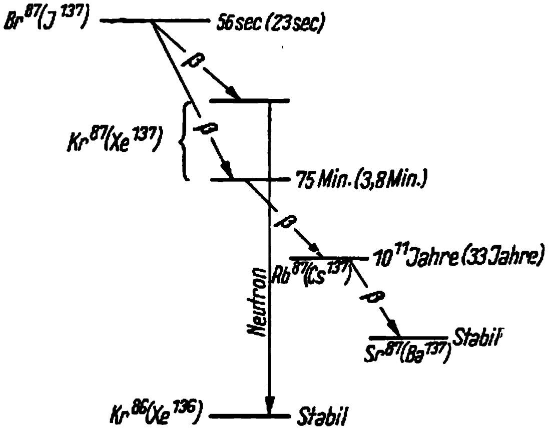


Abb. 422. Schema der Entstehung verzögerter Neutronen

Zur Prüfung dieses Schemas wurde die Bestimmung der Art der Neutronenstrahler auf chemischem Wege durchgeführt. Vorversuche zeigten, daß die Träger der Neutronenaktivitäten mit den Halbwertszeiten 23 sec und 56 sec zusammen mit Silberhalogeniden ausgefällt werden. Des weiteren wurde festgestellt, daß bei chemischen Reaktionen der

Träger der Aktivität mit der Halbwertszeit 23 sec dem Jod folgt, der mit der Halbwertszeit 56 sec dem Brom.

Andererseits sind künstlich radioaktive Elemente $_{35}Br^{87}$ und $_{53}J^{137}$ mit den Halbwertszeiten 56 sec und 23 sec bekannt. Diese unterliegen den folgenden Umwandlungen:

$$_{35}Br^{87} \xrightarrow[56\,\text{Sek.}]{} {}_{36}Kr^{87} + \beta^- \xrightarrow[75\,\text{Min.}]{} {}_{37}Rb^{87} + \beta^- \xrightarrow[10^{11}\,\text{Jahre}]{} {}_{38}Sr^{87}\ (\text{stabil}),$$

$$_{53}J^{137} \xrightarrow[23\,\text{Sek.}]{} {}_{54}Xe^{137} + \beta^- \xrightarrow[3{,}8\,\text{Min.}]{} {}_{55}Cs^{137} + \beta^- \xrightarrow[33\,\text{Jahre}]{} {}_{56}Ba^{137}\ (\text{stabil}).$$

Danach muß die 56-Sekunden-Neutronenaktivität dem Kr^{87}, die 23-Sekunden-Aktivität dem Xe^{137} zugeschrieben werden. Der mögliche Zerfallsmechanismus für diesen Fall ist in dem Schema der Abb. 422 dargestellt: Br^{87} unterliegt einer verzweigten Umwandlung: Ein Teil der entstehenden Kerne zerfällt durch weitere β-Umwandlungen mit Bildung des stabilen Sr^{87}, ein anderer sendet Neutronen aus und bildet das stabile Kr^{86}. Ein analoges Schema entspricht der 23-Sekunden-Aktivität des J^{137}.

Sehr wichtig ist die Frage nach der Zahl der bei einem Spaltungsakt entstehenden Neutronen. Zu ihrer Beantwortung wurden Arbeiten ausgeführt, die zeigten, daß *im Mittel* aus einem Spaltprozeß *mehr als ein Neutron* hervorgeht, und zwar zwei bis drei, so daß sich die Neutronen bei der Spaltung „vermehren“. Diese wichtige Tatsache bedingt, wie wir in § 311 sehen werden, die Möglichkeit einer Kettenreaktion.

§ 310. Transurane

Am Anfang dieses Abschnitts sahen wir, daß das Interesse an den Reaktionen des Urans mit Neutronen auf der Diskussion der Entstehungsmöglichkeit von Kernen mit Ladungen größer als 92, d. h. Transurankernen, beruhte. Die Existenz derartiger Elemente wurde durch nachfolgende Arbeiten vollkommen bestätigt.

Wir wollen eine systematische Beschreibung der Eigenschaften der wichtigsten heute bekannten Transuranisotope geben, ohne näher auf die Einzelheiten ihrer Entdeckungsgeschichte einzugehen.

Neptunium 239. Als erstes Transuran wurde das Isotop mit der Atomnummer 93 und der Massenzahl 239 entdeckt. Das entsprechende Element wurde *Neptunium* (chemisches Symbol Np) genannt. Schon bei den ersten Untersuchungen der Uranspaltung wurde die Tatsache des Resonanzeinfangs langsamer Neutronen mit Bildung eines β-radioaktiven Uranisotops festgestellt, das sich mit einer Halbwertszeit von 23 Minuten in das Transuran $Z = 93$ umwandelt (siehe § 303).

Dieser Befund wurde bei Bestrahlung des Urans mit Neutronen im Zyklotron bestätigt. Dabei fand man, daß der Neutroneneinfang im wesentlichen durch das Uranisotop U^{238} erfolgt; das entstehende Isotop U^{239}, das sich mit der Halbwertszeit 23 Minuten umwandelt, ergibt einen β-radioaktiven Stoff, der mit der Halbwertszeit 2,4 Tage zerfällt. Dieser Stoff ist ein Neptuniumisotop, Np^{239}. Das Umwandlungsschema ist

$$_{92}U^{238}\,(n,\ \gamma)\ {}_{92}U^{239} \xrightarrow[23\,\text{Min.}]{\beta^-} {}_{93}Np^{239} \xrightarrow[2{,}4\,\text{Tage}]{\beta^-} 94^{239}.$$

Eine Analyse der chemischen Eigenschaften des neuen Elements wurde nach der Methode der „markierten Atome“ durchgeführt und gab Aufschluß über einige seiner chemischen Eigenschaften. Insbesondere ergab sich, daß das Neptunium kein Analogon des Rheniums ($Z = 75$) ist, wie seiner Stellung im Periodischen System nach zu erwarten war, sondern in seinen chemischen Eigenschaften dem Uran sehr nahe steht.

Neptunium 237. 1942 wurde ein anderes, besonders wichtiges Neptuniumisotop, Np^{237}, entdeckt. Dieses Isotop ist ein Produkt der β^--Umwandlung des künstlich-radioaktiven Uranisotops U^{237}, das als Ergebnis der $(n, 2n)$-Reaktion

$$ {}_{92}U^{238}\,(n,\ 2n)\,{}_{92}U^{237} \xrightarrow[6{,}8\ \text{Tage}]{\beta^-} {}_{93}Np^{237} $$

aus dem U^{238} entsteht. Das Isotop Np^{237} unterliegt dem α-Zerfall mit der sehr langen Halbwertszeit von $2{,}2 \cdot 10^6$ Jahren. Wegen dieser langen Halbwertszeit war es möglich, dieses Isotop in wägbaren Mengen (die nach Mikrogramm zählen) anzusammeln und die chemischen Eigenschaften des Neptuniums mit Hilfe der sogenannten „Ultramikrochemie"[1]) zu untersuchen. Die ersten Mengen des Np^{237} wurden durch Bestrahlung großer Mengen Urans mit im Zyklotron erzeugten schnellen Neutronen gewonnen. Später, mit Beginn der Arbeit von „Uranmeilern" (siehe § 312), gelang es, bis zu 100 μg Np^{237} zu erhalten und seine chemischen Eigenschaften eingehend zu studieren. Auch sein Wirkungsquerschnitt für den Einfang langsamer Neutronen konnte festgestellt werden. Np^{237} ist Stammvater einer radioaktiven Familie, die der Formel $4n + 1$ (siehe § 277) entspricht.

Außer diesen beiden Neptuniumisotopen wurden noch eine Reihe anderer entdeckt, und zwar Np^{231}, Np^{234}, Np^{235}, Np^{236} und Np^{238}.

Plutonium 238. Gleich nach der Entdeckung des Np^{239} wurde 1941 ein weiteres Transuran, $Z = 94$, das Plutonium (chemisches Symbol Pu), gefunden. Beim Beschuß des Urans mit Deuteronen wurde die Entstehung des Neptuniumisotops Np^{238} als Ergebnis der Reaktion ${}_{92}U^{238}\,(d, 2n)\,{}_{93}Np^{238}$ entdeckt. Dieses Isotop Np^{238} ist β^--radioaktiv und wandelt sich mit der Halbwertszeit 2,0 Tage in das α-radioaktive Isotop ${}_{94}Pu^{238}$ (Halbwertszeit 92 Jahre) nach folgendem Schema um:

$$ {}_{92}U^{238}\,(d,\ 2n)\,{}_{93}Np^{238} \xrightarrow[2{,}0\ \text{Tage}]{\beta^-} {}_{94}Pu^{238} \xrightarrow[92\ \text{Jahre}]{\alpha} {}_{92}U^{234}\,. $$

Der Name „Plutonium" wurde dem Element 94, ebenso wie „Neptunium" in Analogie zu den Namen der Planeten, die hinter dem Uranus stehen, gegeben.

Plutonium 239. Dies ist das wichtigste Isotop des Plutoniums. Es ist ein Umwandlungsprodukt des β-Zerfalls von Np^{239} mit der Halbwertszeit 2,4 Tage (siehe S. 540). Pu^{239} ist α-radioaktiv und wandelt sich mit der Halbwertszeit 24000 Jahre in U^{235} um:

$$ {}_{93}Np^{239} \xrightarrow[2{,}4\ \text{Tage}]{\beta^-} {}_{94}Pu^{239} \xrightarrow[2{,}4 \cdot 10^4\ \text{Jahre}]{\alpha} {}_{92}U^{235}\,. $$

Die Bedeutung des Pu^{239} liegt darin, daß es ein geeigneter „Brennstoff" für die Gewinnung von Atomenergie (siehe § 313) ist, wodurch das Problem auftauchte, wie Pu^{239} in großen Mengen zu bekommen ist. Dazu wurde anfangs eine beträchtliche Menge Uran (hundert Kilogramm) der Bestrahlung im Zyklotron ausgesetzt. Auf diesem Wege wurden im Verlauf der Jahre 1942 bis1943 ungefähr 1000 μg, also rd. 1 mg, Plutonium gewonnen. Da es seinen chemischen Eigenschaften nach ebenso wie das Neptunium dem Uran sehr ähnlich ist, war zur Ausarbeitung der wirksamsten Methoden der Abtrennung des Plutoniums von dem seine Masse weit übersteigenden Uran zunächst ein sehr genaues und erschöpfendes Studium der

---

[1]) Eine Beschreibung dieser Untersuchungsmethode radioaktiver Substanzen siehe bei S. E. Bressler: „Radioaktive Elemente", (С. Е. Бреслер: Радиоактивные элементы, Гостехздат, 1949).

chemischen, physikalischen und physikalisch-chemischen Eigenschaften des Plutoniums notwendig. Diese wurde auch mit Hilfe der „Ultramikrochemie" vorgenommen. Pu^{239} ist stark α-radioaktiv: in 1 mg Pu^{239} erfolgen im Verlauf einer Minute $140 \cdot 10^6$ α-Umwandlungen. Die α-Radioaktivität ist also fast $2 \cdot 10^5$mal größer als die des Urans. Zu seiner Analyse sind daher kleine Mengen (von der Größenordnung mg) zu benutzen, ungeachtet dessen, daß heute künstlich beträchtlich größere Mengen gewonnen werden.

Außer Pu^{238} und Pu^{239} ist heute noch eine Anzahl anderer Plutoniumisotope bekannt: Pu^{232}, Pu^{234}, Pu^{236}, Pu^{240}, Pu^{241}. Sie sind alle α-radioaktiv mit Ausnahme von Pu^{241}, das dem β^--Zerfall mit einer Halbwertszeit von etwa 10 Jahren unterliegt.

Americium und Curium. Beim Beschuß von U^{238} und Pu^{239} mit energiereichen α-Teilchen (40 – 44 MeV) im Zyklotron wurden noch zwei andere Transurane entdeckt, $Z = 95$ und 96. Das erste wurde Americium (chemisches Symbol Am), das zweite Curium (Symbol Cm) genannt. Die Kernreaktionen, die zur Entstehung dieser Elemente führen, sind

$$_{92}U^{238}(\alpha, n)\,_{94}Pu^{241} \xrightarrow[\sim 10\ \text{Jahre}]{\beta^-} {}_{95}Am^{241} \xrightarrow[490\ \text{Jahre}]{\alpha},$$

$$_{94}Pu^{239}(\alpha, 3n)\,_{96}Cm^{240} \xrightarrow[26{,}8\ \text{Tage}]{\alpha},$$

$$_{94}Pu^{239}(\alpha, n)\,_{96}Cm^{242} \xrightarrow[150\ \text{Tage}]{\alpha}.$$

Die chemischen Eigenschaften von Am und Cm wurden nach der Methode der markierten Atome erforscht. Beide Elemente sind wie auch Neptunium und Plutonium in chemischer Beziehung dem Uran und den seltenen Erden analog.

Das Isotop des Americiums mit der Halbwertszeit 490 Jahre ist noch stärker α-radioaktiv als Pu^{239}. Die Aktivität des Am^{241} entspricht $70 \cdot 10^9$ α-Umwandlungen in 1 mg pro Minute. Noch aktiver ist Curium, Cm^{242}. Seine Aktivität entspricht ungefähr 10^{14} α-Zerfällen in 1 mg pro Minute.

1950 erhielt man zwei weitere Transurane, Berkelium (Bk, $Z = 97$) und Californium (Cf, $Z = 98$). Beide Elemente wurden wie Americium und Curium durch Beschuß mit α-Teilchen hoher Energie erhalten.

Durch das eingehende Studium der chemischen und spektralen Eigenschaften der schweren Elemente einschließlich der Transurane rückte die Frage nach ihrer Elektronenstruktur wieder in den Vordergrund. Früher vermutete man, daß sich bei den letzten Elementen des Periodischen Systems vom Aktinium an die Auffüllung der $6d$-Schale bei aufgefüllter $7s$-Schale vollzieht. Das würde bedeuten, daß die schwersten Elemente eine sogenannte „Übergangsgruppe" bilden. Derartige Gruppen sind durch die Struktur $nd^x\,(n+1)s^y$ mit $x = 1$ bis 10 und $y = 1$ und 2 charakterisiert. Als Beispiel mögen die Übergangsgruppen von Scandium ($Z = 21$) bis Kupfer ($Z = 29$) oder von Yttrium ($Z = 39$) bis Silber ($Z = 47$) dienen. Beim Scandium bilden die äußersten Elektronen die Konfigurationen $3d4s^2$, beim folgenden Element, dem Titan ($Z = 22$) die Konfiguration $3d^24s^2$ usw. bis zum Kupfer mit der Konfiguration $3d^{10}4s$. Analog ist beim Yttrium die Konfiguration der letzten Elektronen $4d5s^2$, beim folgenden Element, dem Zirkon, $4d^25s^2$ usw. bis zum Silber mit $4d^{10}5s$. Wenn die letzten Elemente des Periodischen Systems zur Übergangsgruppe $nd^x\,(n+1)s^y$ mit $n = 6$ (also z. B. $6d7s^2$ oder $6d^27s^2$ usw.) gehörten, so wären sie den Elementen der unmittelbar vorangehenden Übergangsgruppe von $_{71}Lu$ bis $_{79}Au$ (Konfiguration $5d^x6s^y$) ähnlich, was aber in Wirklichkeit nicht zutrifft, auf jeden Fall nicht für die schwersten

Elemente $_{93}$Np — $_{96}$Cm, die den entsprechenden Elementen der benachbarten Übergangsgruppe ($_{72}$Hf, $_{73}$Ta) nicht ähnlich sind.

Außer den Übergangsgruppen gibt es im Periodischen System bekanntlich noch die Gruppe der seltenen Erden, die mit dem 58-ten Element, Cer, beginnt und dem 71-ten, Lutetium, endet. Die Elektronenstruktur dieser 14 Elemente ist durch die Konfiguration $4f^x5d\,6s^2$ oder $4f^x5d^26s$ bei aufgefüllten Schalen $5s$ und $5p$ charakterisiert [Beispiele: $_{58}$Ce ($4f5d6s^2$), $_{59}$Pr ($4f^25d6s^2$)]. Da sich in diesem Falle eine Schale auffüllt, die tief innerhalb der Elektronenhülle liegt, sind die seltenen Erden durch eine außerordentlich große Ähnlichkeit in chemischer Hinsicht ausgezeichnet.

Die letzten Elemente des Periodischen Systems erinnern in ihren spektralen und chemischen Eigenschaften in vieler Hinsicht an die Gruppe der seltenen Erden. Daher wird heute angenommen, daß die dem Aktinium ($_{89}$Ac) folgenden Elemente eine zweite Gruppe seltener Erden mit der Elektronenkonfiguration $5f^x6d\;7s^2$ ($x = 1$ bis 14) bilden. In der nachstehenden Tabelle sind die Elektronenstrukturen der Elemente von $_{89}$Ac bis $_{96}$Cm und parallel dazu die Strukturen der Elemente der ersten Gruppe der seltenen Erden angegeben.

Tabelle LXII. Elektronenkonfigurationen der 1. und 2. Gruppe seltener Erden

$_{89}$Ac	$6d7s^2$	$_{57}$La	$5d6s^2$
$_{90}$Th	$\begin{cases} 6d^27s^2 \\ 5f6d7s^2 \end{cases}$	$_{58}$Ce	$\begin{cases} 5d^26s^2 \\ 4f5d6s^2 \end{cases}$
$_{91}$Pa	$5f^26d7s^2$	$_{59}$Pr	$4f^25d6s^2$
$_{92}$U	$5f^36d7s^2$	$_{60}$Nd	$4f^35d6s^2$
$_{93}$Np	$5f^46d7s^2$	$_{61}$Pm	$4f^45d6s^2$
$_{94}$Pu	$5f^56d7s^2$	$_{62}$Sm	$4f^55d6s^2$
$_{95}$Am	$5f^66d7s^2$	$_{63}$Eu	$4f^65d6s^2$
$_{96}$Cm	$5f^76d7s^2$	$_{64}$Gd	$4f^75d6s^2$

Wir erwähnten mehrmals, daß die Eigenschaften der Transurane nach den Verfahren der „Ultramikrochemie" erforscht worden sind. Die Notwendigkeit des Übergangs von der Indikatormethode, die zur Untersuchung der künstlich radioaktiven Stoffe angewandt wurde, zu einer direkten Methode ergab sich, weil erstere zuweilen zu falschen Schlüssen führt. Das Prinzip der Indikatormethode besteht ja darin, daß man dem zu untersuchenden Stoff irgendein bestimmtes Element in meßbaren Mengen hinzufügt und beobachtet, ob die Radioaktivität der untersuchten Substanz bei den verschiedenen vorgenommenen chemischen Reaktionen (z. B. der Ausfällung) dem Trägerelement folgt oder nicht. Daß die Aktivität zusammen mit dem Träger in den Satz übergegangen ist, läßt jedoch noch keine eindeutigen Rückschlüsse auf die Identität der chemischen Reaktionen des untersuchten Elements und des Trägerelements zu. Das untersuchte Element kann auch aus anderen Gründen in den Satz übergehen (z. B. infolge einer Adsorption der Verbindung des radioaktiven Elements auf den Kriställchen des Trägers).

Darum entstand die wichtige Aufgabe, die neuen Elemente *direkt* zu untersuchen, wozu die Entwicklung von Arbeitsmethoden notwendig war, die eine Handhabung winziger, oft nur nach Mikrogrammen meßbarer Mengen ermöglichen. Zu diesem Zweck ist nicht nur die Benutzung von Ultramikrowaagen notwendig, sondern auch von Vorrichtungen, die

ein Arbeiten mit äußerst kleinen Volumina gestatten. Um Lösungen einer hinreichend großen Konzentration zu erhalten, kommt es vor, daß man es mit Volumen von 10^{-1} bis 10^{-5} cm^3 zu tun hat. Zum Experimentieren mit derartig kleinen Volumen wurden aus Kapillarröhrchen mit einem Innendurchmesser von 0,1 bis 1 mm spezielle Reagenzgläschen, Pipetten und Büretten hergestellt. Alle Arbeiten mußten unter dem Mikroskop mit Hilfe sogenannter Mikromanipulatoren, die vordem für biologische Zwecke konstruiert worden waren, ausgeführt werden. Dabei ließ sich für die Messungen eine Genauigkeit bis zu 0,5% erreichen.

Es wurden auch besondere Typen von Ultramikrowaagen geschaffen. Die einfachste „Waage" besteht aus einem dünnen Quarzfaden, der an einem Ende befestigt ist und am anderen ein winziges „Schälchen" trägt. Die Wägung wird nach der mikroskopisch gemessenen Verbiegung des Fadens vollzogen. Derartige Waagen haben eine Empfindlichkeit von 0,02 μg $= 2 \cdot 10^{-8}$ g und ermöglichen eine Wägung bis 20 μg.

Noch empfindlichere Waagen gestatten, 1 μg und weniger mit einer Genauigkeit von 0,005 μg zu wägen. Sie sind nach dem Typ der Waagen mit Waagebalken gebaut, wobei als Waagebalken ein Quarzfaden dient, dessen Durchmesser, ausgehend vom vierfachen Durchmesser eines menschlichen Haares, so gering sein kann, daß er nicht mehr mit bloßem Auge beobachtet werden kann. Bei der Wägung wird die Auslenkung des Waagebalkens durch die Torsion eines zu diesem senkrechten Quarzfaden, an den der Waagebalken befestigt ist, kompensiert.

Interessant ist die Frage nach der Möglichkeit, Plutonium in der Natur aufzufinden. Das langlebigste Isotop des Plutoniums Pu^{239} hat eine Halbwertszeit von 24000 Jahren. Nimmt man also sogar $\tau = 10^5$ an, so müßte nach dem geologischen Zeitraum von 10^9 Jahren nur der Bruchteil $e^{-\frac{10^9}{10^5}} = e^{-10^4}$ des anfänglich vorhandenen Plutoniums noch erhalten sein. Nichtsdestoweniger hat man in der Uranpechblende bei chemischer Abtrennung vom Neptunium und Plutonium eine schwache Radioaktivität, die dem Pu^{239} zugeschrieben wurde, entdeckt. Die Menge des Plutoniums in der Pechblende wurde auf $1:10^{14}$ der Masse des Minerals geschätzt. Wenn Pu^{239} noch in Mineralien vorhanden ist, wenn auch in verschwindend kleiner Menge, so ist aller Grund zu der Annahme vorhanden, daß dieses unter Einwirkung der in der Natur vorhandenen Neutronen (die aus der Höhenstrahlung stammen) ständig aus dem Uran entsteht.

§ 311. Die Kettenreaktion

In den vorhergehenden Paragraphen sahen wir, daß bei der Spaltung von Urankernen nicht nur eine beträchtliche Energiemenge, sondern auch eine gewisse Anzahl ν (zwei bis drei) Neutronen frei wird. Im Zusammenhang damit taucht natürlich die Frage auf, ob man nicht diese Neutronen ihrerseits zur Spaltung anderer Urankerne benutzen kann. An Stelle eines für die Spaltung verwendeten Neutrons hätten wir ν Spaltungsneutronen. Aus diesen ν Neutronen entstehen, nachdem sie durch Urankerne eingefangen worden sind und deren Spaltung hervorgerufen haben, ν^2 neue Neutronen, die ihrerseits ν^3 Neutronen erzeugen usw. Die Zahl der Neutronen würde nach einer geometrischen Reihe wachsen, wobei gleichzeitig Energie frei wird. Könnte man also alle bei der Spaltung entstehenden Neutronen zu neuen Spaltprozessen ausnutzen, so erhielte man ein lawinenartiges Anwachsen der Spaltungsreaktion. Derartige Reaktionen sind in der Chemie gut bekannt, sie werden als Kettenreaktionen bezeichnet. In Analogie zur Chemie kann man auch beim Uran von der Entwicklung einer Kettenreaktion sprechen.

Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als ob die Auslösung einer Kettenreaktion auf keinerlei Schwierigkeiten stößt. Bei jedem Spaltungsakt vollzieht sich tatsächlich nicht nur der Ersatz des bei der Spaltung verbrauchten Neutrons, sondern es entsteht auch noch ein Überschuß von ($\nu - 1$) Neutronen. In Wirklichkeit ist aber das Problem der Auslösung einer Kettenreaktion weitaus komplizierter.

Die Befreiung von mehr als einem Neutron bei jedem Spaltungsakt ist eine notwendige, keineswegs aber hinreichende Bedingung für das Zustandekommen einer Kettenreaktion. Damit eine Neutronenlawine entsteht, müssen noch andere, weniger offen zu Tage liegende Bedingungen erfüllt sein. In jedem realen System gibt es eine große Zahl der verschiedensten Faktoren, die einen Verlust an Neutronen und damit ihren Ausfall bei der Lawinenbildung verursachen. Wenn die Zahl der Neutronenverluste sehr groß ist, kann die Lawinenbildung stocken. Um die komplizierten physikalischen Erscheinungen, die eine Kettenreaktion beeinflussen, besser überschauen zu können, wollen wir nach Fermi[1]) das Schicksal irgendeines Neutrons, das sich in einer Uranschicht befindet, verfolgen.

Wir nehmen an, daß das von uns ausgewählte Neutron ein sehr schnelles ist, so daß seine Anfangsenergie, die Energie E_f, die für die Spaltung des Kerns U^{238} erforderlich ist, übersteigt. Wie wir noch sehen werden, hängen all unsere Resultate nicht von dem Wert der Anfangsenergie des Neutrons ab und auch nicht von seiner Herkunft: Es kann ein Spaltungsneutron sein, das aus einer spontanen Spaltung der Urankerne herrührt, oder ein umherirrendes Neutron der Höhenstrahlung oder auch eines, das aus irgendeiner künstlichen Neutronenquelle stammt.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Abmessungen des Urans so groß sind, daß wir das Herausfliegen des Neutrons aus dem System nicht zu berücksichtigen brauchen. Ein derartiges Uranmedium nennen wir ein unendliches vervielfachendes Medium. Ein Neutron, das sich darin bewegt, wird Zusammenstöße mit Urankernen erleiden. Ist seine Energie größer als der Schwellenwert E_f der Spaltung, so existiert bei einem Zusammenstoß mit Kernen des Isotops U^{238} oder U^{235} eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Neutron eine Spaltung hervorruft. Diese Wahrscheinlichkeit ist jedoch verhältnismäßig klein und kann bei einem rohen Überschlag vernachlässigt werden. Dann kann man als hauptsächlichen Prozeß der Wechselwirkung schneller Neutronen mit den Kernen die elastische und unelastische Streuung ansehen. Die unelastische Streuung spielt bei sehr großen Neutronenenergien (mehr als 100000 eV) die Hauptrolle. Bei jeder unelastischen Streuung verliert das Neutron einen beträchtlichen Teil seiner Energie. So wird also die unelastische Streuung zu einer schnellen Energieabnahme oder Verlangsamung der Neutronen führen. Wenn das Neutron z. B. zu Beginn seiner Bewegung eine Energie von 2 MeV besaß, so wird nach einem oder zwei unelastischen Stößen seine Energie unter dem Schwellenwert E_f liegen. Mit anderen Worten: Das Neutron ist so gebremst worden, daß es keine Kernspaltung beim Uran-Hauptisotop U^{238} mehr hervorrufen kann.

Die elastische Neutronenstreuung kann man mit hinreichender Genauigkeit nach den Stoßgesetzen der klassischen Mechanik behandeln. Die Rechnung zeigt, daß bei jedem Zusammenstoß mit einem Kern der Masse μ das Neutron im Mittel eine gewisse Energie ε verliert. Stoßen die Neutronen mit den Urankernen, die eine sehr große Masse haben, zusammen, so ist der mittlere Energieverlust sehr klein. Nichtsdestoweniger ist die elatische Streuung der Hauptmechanismus der Neutronenbremsung, nachdem das Neutron auf eine Energie von der Größenordnung 100000 eV, unter der die Wahrscheinlichkeit des unelastischen

[1]) E. Fermi, Elementare Theorie der Meiler mit Kernreaktionen, Science, 10. Jan. 1947.

Stoßes sehr klein ist, verlangsamt wurde. Die Neutronen verlieren die Energie in kleinen Raten und verlangsamen sich bis zu Energien von der Größenordnung der Wärmebewegungsenergie im Stoff, $E_{\text{therm}} \sim 0{,}025$ eV. Zur Charakterisierung der Erscheinung der elastischen Streuung sei erwähnt, daß zur Abbremsung eines Neutrons von der Energie $E_f = 1{,}75$ MeV auf die thermische Energie ungefähr 2000 Zusammenstöße mit Urankernen notwendig sind.

So ergibt sich also für die Abbremsung der Neutronen von einer Energie der Größenordnung einiger Millionen eV bis auf die thermische Energie folgendes Bild: Die Neutronen erleiden zunächst eine unelastische Streuung, bei der sich ihre Energie in großen Raten vermindert. Danach, wenn ein unelastischer Stoß sehr unwahrscheinlich wird, beginnt eine ständige Energieverminderung des Neutrons durch elastische Streuung an Urankernen. Neutronen mit einer Energie die kleiner als E_f ist, können die U^{238}-Kerne nicht spalten, wohl aber die Kerne des U^{235}. Aus den allgemeinen Überlegungen des § 300 folgt jedoch, daß die Wirksamkeit hinsichtlich der Spaltung von U^{235} mit abnehmender Neutronenenergie wächst; der Wirkungsquerschnitt ist $\frac{1}{v}$ proportional. Daher sind die bis zur thermischen Energie verlangsamten Neutronen die wirksamsten, und der ganze Prozeß der Neutronenbremsung von der Energie E_f bis zur thermischen Energie ist also vom Gesichtspunkt der Einleitung einer Kettenreaktion aus günstig.

Es existiert aber auf dem Wege zur Auslösung einer Kettenreaktion im Uran noch ein ernsthaftes Hindernis. Wir haben bis jetzt eine mögliche Form der Wechselwirkung zwischen Neutron und Urankern U^{238} noch nicht berücksichtigt. Es handelt sich um den einfachen Strahlungseinfang des Neutrons durch den U^{238}-Kern, der sich dabei in das Isotop U^{239} umwandelt. Die Möglichkeit eines derartigen Prozesses wurde schon in § 310 erwähnt, wo wir sahen, daß sich U^{239} durch zwei nachfolgende β-Zerfälle in Pu^{239} umwandelt. Es ist klar, daß bei jedem Strahlungseinfang des Neutrons durch den U^{238}-Kern ein Neutron verloren geht, was vom Gesichtspunkt des Zustandekommens einer Kettenreaktion äußerst nachteilig ist.

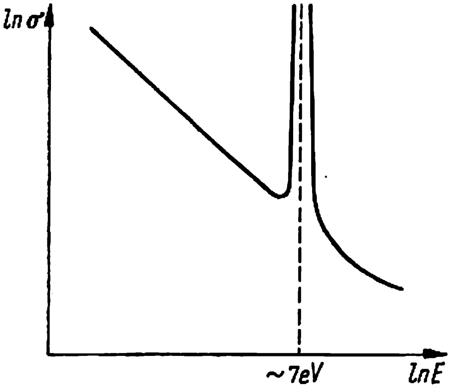


Abb. 423. Resonanzabsorption von Neutronen in U^{238}

Wir erwähnten schon früher, daß der Neutroneneinfang durch Kerne des U^{238} den Charakter einer Resonanzerscheinung hat, d. h., daß der Einfangsquerschnitt des U^{238}-Kerns für gewisse Neutronenenergien besonders groß ist. Das Resonanzniveau des Neutroneneinfanges liegt für U^{238} im Bereich einer Energie von etwa 7 eV. Der Einfangquerschnitt ist in diesem Bereich sehr

groß (Abb. 423). Wenn man noch berücksichtigt, daß die Kerne des Isotops U^{238} den Hauptanteil aller Urankerne darstellen, so wird verständlich, daß die Verwirklichung einer Kettenreaktion im Uran ein sehr schwieriges Problem ist. Zu seiner Lösung muß man sich einer Reihe von Kunstgriffen und spezieller Verfahren, zu deren Beschreibung wir etwas weiter unten kommen werden, bedienen.

Außer der Neutronenabsorption durch Kerne des Uranisotops U^{238} ist diese auch durch die Kerne anderer Elemente, die als Beimischungen im Uran enthalten sind, möglich. Ein derartiger Neutronenverlust würde das Problem der Kettenreaktion noch schwieriger gestalten, ja, diese sogar ganz unmöglich machen, wenn der Einfang in den Beimischungen groß ist. Daher ist die erste unerläßliche Bedingung für das Zustandekommen einer Kettenreaktion im Uran dessen Reinheit hinsichtlich aller fremden Beimischungen. Dabei ist ganz besonders sorgfältig auf die Reinigung von solchen Elementen zu achten, die einen großen Einfangsquerschnitt für Neutronen besitzen, wie z. B. Bor oder seltene Erden.

Wenn eine derartige Reinigung, die selbst schon eine schwierige technische Aufgabe ist, mit Erfolg durchgeführt wurde, ist das Problem jedoch noch lange nicht gelöst. Die Resonanzabsorption der Neutronen in den U^{238}-Kernen ist noch zu groß, als daß sich in der Uranmasse eine Kettenreaktion entwickeln könnte.

Um die Rolle der Resonanzabsorption im U^{238} bis zu dem Grad abzuschwächen, der einer Auslösung der Kettenreaktion nicht mehr im Wege steht, kann man auf zweierlei Weise vorgehen:

1. Erhöhung des Gehalts an spaltbarem U^{235} in der Isotopenmischung;
2. Anwendung sogenannter Moderatoren.

Der erste Weg ist vollkommen klar. Gelänge es, U^{235} von U^{238} zu trennen, so wäre in dem gereinigten Isotop U^{235} eine Auslösung der Kettenreaktion ohne weiteres möglich, obwohl auch durch U^{235}-Kerne Neutronen absorbiert werden, ohne daß es zur Spaltung kommt. Die Isotopentrennung, die grundsätzlich sehr einfach ist, ist in der praktischen Ausführung eine sehr schwierige Angelegenheit. Die verschiedenen Methoden der Isotopentrennung wurden in Teil I, §§ 18 bis 22, behandelt. Wir wollen hier auf den zweiten oben erwähnten Weg zur Realisierung einer Kettenreaktion eingehen.

§ 312. Die Anwendung von Moderatoren. Der Uranmeiler

Die Anwendung eines Moderators beruht auf folgenden Überlegungen: Wir stellen uns vor, daß ein im Spaltungsakt entstandenes Neutron vor dem Zusammenstoß mit einem Urankern, der es durch Resonanzabsorption einfangen könnte, bis auf eine Energie abgebremst wird, die unter dem Resonanzniveau liegt. Dann ist die Gefahr der Absorption des Neutrons durch einen U^{238}-Kern beträchtlich herabgemindert. Diese Abbremsung des Spaltungsneutrons kann durch Zusammenstöße des Neutrons mit leichten Kernen, die in das Uranmedium eingebracht werden, erreicht werden. Eine derartige Einrichtung erhielt die Bezeichnung Moderator.

Als Moderator kann ein leichtes Element mit hinreichend kleinem Einfangquerschnitt dienen. Wie wir sahen, erleidet das Neutron den größten Energieverlust bei Zusammenstößen mit Protonen. Bei solchen Zusammenstößen besteht aber eine beträchtliche Einfangwahrscheinlichkeit für das Neutron, wobei sich ein Deuteron bildet. Daher ist Wasserstoff als Moderator wenig geeignet. Der nächstfolgende Kern ist das Deuteron mit der Massenzahl 2. Das Deuteron besitzt einen verschwindend kleinen Einfangquerschnitt für Neutronen nnd ist daher ein sehr guter Moderator. Praktisch verwendet man das

Deuteron in seiner Verbindung mit Sauerstoff, also als schweres Wasser D_2O. Ein Nachteil des schweren Wassers ist allerdings, daß es teuer und schwer herzustellen ist. Helium kann nicht als Moderator verwendet werden, da es sich unter Normalbedingungen im Gaszustand befindet. Kohlenstoff hat, obwohl er wesentlich weniger wirksam als Deuterium ist, vor letzterem den Vorzug, billig und leicht zugänglich zu sein. Der Einfangquerschnitt für Neutronen ist beim Kohlenstoff hinreichend klein, etwa 10^{-27} cm². Daher wird sehr reiner Kohlenstoff in der Praxis häufig als Moderator verwendet. Die Bremseigenschaften verschiedener Moderatoren sind in Tabelle LXIII aufgeführt. Darin ist die Zahl der Zusammenstöße, die das Neutron erleiden muß, um von einer Energie $E = 1{,}75$ MeV bis zur thermischen Energie $E_{\text{therm}} = 0{,}025$ eV abgebremst zu werden, angegeben.

Tabelle LXIII

Moderatorkern	H^1	D	He^4	Be^9	C^{12}	O^{16}	U^{238}
Zahl der Zusammenstöße	18	24	41	50	110	145	2100

Nun wollen wir uns wieder der Betrachtung eines schnellen Neutrons zuwenden, berücksichtigen aber jetzt, daß es nicht nur Zusammenstöße mit Urankernen, sondern hauptsächlich mit den Kernen des Moderators erleidet. Wir nehmen vorläufig an, daß die Urankerne gleichmäßig in der Bremssubstanz verteilt sind. Nachdem das Neutron bis zu einer Energie verlangsamt ist, die unter der Spaltungsschwelle des U^{238} liegt, wird es hauptsächlich durch elastische Zusammenstöße mit den Kernen des Moderators verlangsamt. Diese Abbremsung vollzieht sich überaus schnell. Wie aus Tabelle LXIII ersichtlich ist, genügen schon 110 Zusammenstöße mit Kohlenstoffkernen, um das Neutron auf thermische Energie abzubremsen. Zur Bremsung unter den Energiewert der Resonanzabsorption im U^{238} sind noch weniger Zusammenstöße notwendig.

Die Zusammenstöße des Neutrons mit Urankernen, in erster Linie mit den Kernen des Isotops U^{238}, das den Hauptanteil der Masse des Urans bildet, fallen auf dem ganzen Bremsweg des Neutrons bis zur Resonanzenergie nicht sehr ins Gewicht. Die Einfangwahrscheinlichkeit für schnelle Neutronen ist klein, und die Wirksamkeit der Urankerne hinsichtlich der Bremsung des Neutrons ist viel kleiner als die des Moderators. Wenn im Augenblick des Durchgangs durch den Bereich der Resonanzabsorption im U^{238} das sich verlangsamende Neutron keine Zusammenstöße mit diesen Urankernen erleidet, sind auch im weiteren Bremsprozeß Zusammenstöße mit Kernen des Isotops U^{238} wenig gefährlich für das Neutron, da unterhalb des Resonanzbereichs der Wirkungsquerschnitt wieder klein wird.

Da die Zahl der Moderatorkerne im Medium sehr groß ist und die Geschwindigkeitsänderung bei elastischen Zusammenstößen des Neutrons verhältnismäßig schnell vor sich geht, ist es verständlich, daß die Wahrscheinlichkeit für das Neutron, gerade in dem Augenblick mit einem U^{238}-Kern zusammentreffen, in dem seine Energie nahe bei der Resonanzenergie liegt, wesentlich geringer ist als in einem System ohne Moderator. So bewirkt also die Bremssubstanz eine beträchtliche Verringerung der Wahrscheinlichkeit eines Resonanzeinfanges des Neutrons durch die Kerne des U^{238}.

Wir bezeichnen mit p die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Neutron glücklich durch den Resonanzbereich hindurchgelangt, also nicht vom U^{238}-Kern absorbiert wird. Dann können wir unter Vernachlässigung der Neutronenvermehrung bei Kernspaltungen durch schnelle

Neutronen sagen, daß von N_0 Neutronen, die anfänglich im Medium vorhanden waren, $N_0 p$ Neutronen thermische Energie erreichen, nach dem sie der Resonanzabsorption in den U^{238}-Kernen glücklich entgangen sind. Ein gewisser Teil dieser $N_0 p$ Neutronen wird von den Kernen des Moderators und den Beimischungen des Mediums absorbiert, die übrigen werden durch Urankerne eingefangen. Die Einfangwahrscheinlichkeit im Uran sei mit f bezeichnet. Dann werden von $N_0 p$ thermischen Neutronen $N_0 pf$ im Uran absorbiert. Die übrigen $N_0 p\,(1-f)$ Neutronen gehen ohne Nutzen für die Kettenreaktion verloren. Die Größe f wird Koeffizient der thermischen Ausnutzung genannt.

Wir bezeichnen weiter mit ν die Zahl der Neutronen, die bei jedem Einfangakt im Uran entstehen. Es ist zu beachten, daß die Zahl der Neutronen pro Einfang ν nicht mit der Neutronenzahl pro Spaltung ν_f zusammenfällt, da in den Urankernen ein Strahlungseinfang ohne Spaltung stattfinden kann. Dann treten als Resultat der Spaltung anstatt der $N_0 pf$ thermischen Neutronen $N_0 pf\,\nu$ neue schnelle Neutronen auf. Diese neuen schnellen Neutronen werden dieselben Stadien durchlaufen wie die primären, so daß nach deren Abbremsung und Einfang eine zweite Generation von $N_0(pf\,\nu)^2$ schnellen Neutronen entsteht. Diese werden in analoger Weise in eine dritte Generation von $N_0(pf\nu)^3$ Neutronen übergehen usw. Die Zahl der Neutronen wächst also nach einer geometrischen Reihe der Form

$$N_0 + N_0(pf\nu) + N_0(pf\nu)^2 + \dots .$$

Die Größe $pf\nu$ wird gewöhnlich mit k bezeichnet und heißt *Vervielfachungskoeffizient für ein unendliches Medium.* Die Summe der unendlichen Reihe ist die Zahl der Neutronen:

$$N = \frac{N_0}{1-k}.$$

Ist der Vervielfachungskoeffizient k gleich 1, so führt, wie klein die Zahl der ursprünglichen Neutronen N_0 auch sein mag, der lawinenartige Wachstumsprozeß zu einer unendlichen Menge von Neutronen im vervielfachenden Medium. Somit ist die Forderung $k \geqslant 1$ die gesuchte Bedingung dafür, daß im unendlichen, vervielfachenden Medium eine Kettenreaktion entsteht. Wir sehen, daß k aus drei verschiedenartigen Größen besteht, die einen einfachen physikalischen Sinn haben und von verschiedenen Faktoren abhängen. Der Faktor ν ist ganz durch die Eigenschaften der Urankerne bestimmt, und sein Wert ist eine Konstante der Reaktion. Dagegen hängen die Größen f und p bis zu einem gewissen Grade von unserer Willkür ab und können so von uns gewählt werden, daß k den größtmöglichen Wert annimmt. Es ist ohne weiteres klar, daß f um so größer sein wird, je kleiner der Neutroneneinfang im Moderator und den Beimischungen ist. Zur Vergrößerung von f ist es daher notwendig, das Uran und den Moderator von Beimischungen zu reinigen. Außerdem ist es zur Vergrößerung von f nötig, die Zahl der Kerne des Moderators gegenüber der Zahl der Urankerne möglichst klein zu halten. Der Koeffizient p hängt auch von dem Verhältnis der Zahl der Moderatorkerne zu der der Urankerne ab, allerdings gerade in umgekehrtem Sinne. Tatsächlich, es erfolgt um so seltener ein Zusammenstoß zwischen Neutronen und Urankernen allgemein und zwischen Resonanzneutronen und U^{238}-Kernen im besonderen, je mehr Kerne des Moderators im Medium sind. Um daher die Wahrscheinlichkeit des Resonanzeinfanges zu verkleinern, ist es zweckmäßig, das Verhältnis der Zahl der Moderatorkerne zur Zahl der Urankerne zu vergrößern. Da der Vervielfachungskoeffizient k vom Produkt der Größen f und p, die sich in entgegengesetzter Richtung ändern, abhängt, ist es offensichtlich, daß es ein bestimmtes Optimum des Verhältnisses R des Moderatorgehalts zum Uran-

gehalt im Medium geben maß, bei dem k ein Maximum erreicht. In Tabelle LXIV[1]) sind diese Optimalwerte von k für verschiedene Moderatoren aufgeführt.

Tabelle LXIV. Optimale homogene Mischungen natürlichen Urans mit Bremssubstanzen

Moderator	Optimalverhältnis R	Maximalwert k
H_2O	5,7	0,62
Be	340	0,66
Graphit	440	0,84
D_2O	170	1,33

Wir sehen, daß für die natürliche Isotopenmischung des Urans die Auslösung einer Kettenreaktion in einem homogenen Medium nur dann möglich ist, wenn schweres Wasser als Moderator verwendet wird. Schon Kohlenstoff ist in diesem Falle als Moderator unbrauchbar, da k in einem Medium Uran + Graphit zwar nur wenig, aber doch kleiner als 1 ist. Um in einer Uran-Graphit-Mischung eine Kettenreaktion zu erhalten, ist eine weitere Verbesserung der Reaktionsbedingungen notwendig. Bis jetzt haben wir angenommen, daß die Kerne des Urans und des Moderators gleichmäßig verteilt sind. Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, daß eine derartige Verteilung nicht die günstigste vom Gesichtspunkt der Resonanzeinfangsverminderung durch U^{238}-Kerne ist. Wir stellen uns vor, daß dieselbe Menge Uran nicht gleichmäßig, sondern in Form von Würfeln oder Blöcken makroskopischer Abmessungen im Moderator angeordnet sei. Wie ändern sich dann die Bedingungen für den Resonanzeinfang[2])?

Wir nehmen an, daß ein Neutron mit einer Energie, die sehr nahe bei der Resonanzenergie liegt, auf einen Uranblock fällt und nicht in den ersten Schichten absorbiert wird. Fermi beschreibt sein weiteres Schicksal: „Der Wirkungsquerschnitt für Resonanzabsorption ist eine sich sehr schnell nach der Formel von Breit-Wigner ändernde Funktion. Verteilen wir das Uran nicht gleichmäßig, sondern in Form einzelner großer Blöcke, so kann man erwarten, daß das sich im Innern des Blocks befindende Uran durch ein dünne Oberflächenschicht von der Einwirkung der Neutronen, deren Energie nahe bei der Resonanzenergie liegt, abgeschirmt wird. Daher ist die Wahrscheinlichkeit der Resonanzabsorption der Neutronen durch Urankerne, die im Innern des Blocks liegen, wesentlich kleiner als die von isolierten Atomen. Es ist selbstverständlich, daß sich mit abnehmender Resonanzabsorption auch der Einfang thermischer Neutronen im Uran verringert.

Theoretische Berechnungen und das Experiment zeigen, daß bei bestimmten Abmessungen der Blöcke der Gewinn, der aus der Verminderung des Neutronenverlusts durch Resonanzeinfang resultiert, den entsprechenden Verlust durch geringeren Einfang von thermischen Neutronen deckt. Als günstig erweist sich ein Gitter aus Uranblöcken, die in die Graphitmasse eingelagert sind. Das Gitter kann z. B. ein Gitter aus Uranstäben oder ein kubisches Gitter

[1]) Die Tabelle wurde dem Buch „The science and engineering of nuclear physics“ unter der Redaktion von C. Goodman, 1947, Bd. I, entnommen.

[2]) Ausführlicher siehe A. Achieser und J. Pomerantschuk: „Einige Fragen der Kerntheorie“. S. 335 ff. (А. Ахиезер и И. Померанчук: „Некоторые вопросы теории ядра“, изд. 2-е, Гостехиздат 1951, §§ 20—22.)

aus Uranwürfeln sein. Das erstere ist vom Gesichtspunkt der Neutronenabsorption aus etwas weniger günstig, hat aber häufig eine Reihe praktischer Vorteile, da es leichter das Problem der Wärmeableitung zu lösen gestattet.

Im folgenden wollen wir aber nur ein kubisches Gitter betrachten[1]).

Bisher untersuchten wir die Bedingungen für das Zustandekommen einer Kettenreaktion im unendlich ausgedehnten Medium. Tatsächlich sind aber die Abmessungen des vervielfachenden Mediums immer begrenzt. Ein solches reales System, das aus einer Mischung von Uran und Moderator besteht, nennt man einen *Uranmeiler* oder *Reaktor*. Das Vorhandensein von Begrenzungen wirkt sich wesentlich auf die Neutronenbilanz in der Kettenreaktion aus. Es erscheint eine neue Quelle für den Verlust von Neutronen, die durch die Wände hindurch nach außen fliegen und unwiederbringlich aus dem Spiel ausscheiden. Je kleiner die Abmessungen des Meilers sind, desto größer ist das Verhältnis seiner Oberfläche zum Volumen. Die Zahl der Neutronen, die den Meiler verläßt, ist seiner Oberfläche proportional, während die Zahl der in ihm entstehenden Neutronen seinem Rauminhalt proportional ist. Daher wird bei sehr kleinen Reaktoren die Zahl der hinausfliegenden Neutronen so groß sein, daß sich eine Kettenreaktion nicht entwickeln kann.

Mit zunehmenden Abmessungen des Reaktors verringert sich die relative Bedeutung der Neutronen, die durch Verlassen des Reaktors verloren gehen. Bei einer bestimmten Größe des Reaktors, der sogenannten *kritischen Größe*, wird die Anzahl der austretenden Neutronen genau durch die im Reaktor dank der Spaltungsreaktionen neu gebildeten kompensiert. In diesem Falle haben wir es mit einem gewissen stationären Zustand im Reaktor zu tun. Die Zahl der in ihm vorhandenen Neutronen bleibt für ein beliebiges, willkürlich festgelegtes Niveau konstant. Letzteres bedeutet, daß zur Einstellung eines stationären Zustands im Reaktor nicht die absolute Zahl der sich in ihm befindenden Neutronen, sondern nur ihre Zunahme eine Rolle spielt. Ein stationärer Zustand liegt dann vor, wenn dieser Zuwachs kompensiert wird. Die Kompensation kann bei einer beliebigen Zahl im Reaktor enthaltener Neutronen eintreten.

Rechnungen zeigen, daß die kritische Größe eines kubischen Meilers durch die Beziehung

$$D = \frac{L}{\sqrt{k-1}} \tag{312,1}$$

gegeben ist, worin D die Länge einer Seite des Reaktors, L die mittlere Weglänge eines Neutrons vom Augenblick seiner Entstehung im Spaltprozeß bis zum Einfang durch irgendeinen Kern und k der Vervielfachungskoeffizient ist.

Aus Formel (312,1) sehen wir, daß sich die kritische Größe des Meilers stark mit dem Vervielfachungskoeffizienten k ändert, wenn dieser einen Wert nahe 1 hat. In der Praxis ist es sehr wichtig, die Abmessungen des Reaktors zu vermindern. Setzen wir typische Werte für L und k ein, die aus dem Bericht von Fermi entnommen sind ($L = 350$ cm, $k = 1{,}06$), so finden wir, daß die kritische Größe D eines Reaktors ungefähr 10 m beträgt.

Wir bringen als Beispiel eine kurze Beschreibung eines kleinen arbeitenden Reaktors, der für Versuchszwecke gebaut wurde[2]).

„Das Gitter des Meilers hat inhomogene Struktur. Da zum Zeitpunkt seiner Inbetriebnahme keine ausreichende Menge metallisches Uran zur Verfügung stand, wurde dieses nur

[1]) E. Fermi, Elementare Theorie der Meiler mit Kettenreaktionen. Science 10, Jan. 1947.

[2]) E. Fermi, zitierte Arbeit.

im zentralen Teil des Reaktors angeordnet. In den Außenteilen wurde es durch Uranoxyd ersetzt.

Der Betrieb des Reaktors wird mit Ionisationskammern, die mit BF_3 gefüllt und mit Verstärkern oder Galvanometern verbunden sind, überwacht. Da der Reaktor kein Kühlungssystem besitzt, ist seine Leistung durch die Notwendigkeit, bei hinreichend niedrigen Temperaturen zu bleiben, begrenzt.

Der Reaktor kann unbegrenzt lange mit einer Leistung von 2 kW arbeiten. Kurzzeitig, d. h. ein oder zwei Stunden, wird er jedoch oft bis auf etwa 100 kW gebracht. Zu Forschungsarbeiten mit Neutronen wird häufig eine Graphitsäule von $1{,}5 \cdot 1{,}5$ m Grundfläche verwendet, die oberhalb des Reaktors angebracht und von allen Seiten abgeschirmt ist. Die Neutronen diffundieren aus dem Reaktor in die Säule, in der sie schnell auf thermische Energie abgebremst werden. Praktisch sind alle Neutronen in der Säule im Abstand von einigen 10 cm über der oberen Begrenzung des Reaktors schon rein thermische Neutronen.

Der Reaktor ist auch mit Öffnungen in den Schutzwänden und herauszuziehenden Graphitstäben versehen, die es ermöglichen, die Vorgänge im Innern des Reaktors zu untersuchen oder Proben zur Bestrahlung mit Neutronen in ihn einzuführen.

Wenn der Reaktor mit einer Leistung von 100 kW arbeitet, beträgt der Neutronenstrom in seiner Mitte etwa $4 \cdot 10^{10}$ Neutronen pro cm^2 und sec."

§ 313. Die Plutoniumgewinnung. Die Anwendung der Kernenergie

Bei der Betrachtung des Entwicklungsmechanismus der Kettenreaktion im Reaktor hielten wir die Neutronen, die aus der Reaktion durch Einfang ausscheiden, als nutzlos verloren. Das ist jedoch in Wirklichkeit nicht ganz richtig. Tatsächlich gehen diejenigen Neutronen verloren, die im Kohlenstoff, den verschiedenen chemischen Beimischungen oder den aus technischen Gründen in den Reaktor eingebauten Stoffen (siehe unten) absorbiert werden. Ein anderes Schicksal erwartet die Neutronen, die durch die Kerne des Uranisotops U^{238} absorbiert werden. Wie wir schon wissen (siehe § 310), wandelt sich der U^{238}-Kern durch Neutroneneinfang und nachfolgenden zweifachen β-Zerfall in den Pu^{239}-Kern um. Eine wesentliche Eigenart des letzteren ist, daß seine Kerncharakteristik der des U^{235} sehr ähnlich ist. Ebenso wie der U^{235}-Kern wird der Pu^{239}-Kern beim Einfang langsamer Neutronen gespalten."

So entsteht als Ergebnis des Einfangs eines Teils der Neutronen das spaltbare Element Pu^{239}, das U^{235} gegenüber einen wichtigen Vorteil hat. Dieser besteht darin, daß der neue Stoff Plutonium ein vom Uran verschiedenes Element ist, wodurch es sich in chemischer Hinsicht vom Uran, in dessen Masse es entsteht, unterscheidet. Daher ist die Abtrennung des Plutoniums vom Uran und die Gewinnung eines spaltbaren Materials in reiner Form eine viel leichter zu lösende Aufgabe als die Isotopentrennung.

Somit wird beim Betrieb des Reaktors ein Teil des U^{235} gespalten und verschwindet. Als Ersatz dafür entsteht eine gewisse Anzahl von Kernen eines neuen spaltbaren Stoffs, des Plutoniums, und außerdem wird Energie frei. Die Menge Plutonium, die sich im Reaktor bildet, ist der Zahl der Neutronen, die von U^{238}-Kernen eingefangen werden, proportional. Diese ist ihrerseits der Gesamtzahl der Neutronen proportional, die an der Kettenreaktion beteiligt sind. Daher erhält man desto mehr Plutonium als Ersatz für U^{235}, je intensiver die Reaktion vor sich geht. Nach Ablauf einer gewissen Zeit der Reaktortätigkeit werden die Uranstäbe herausgezogen und einer komplizierten chemischen Bearbeitung unterworfen, um das gewonnene Plutonium vom Uran zu trennen. Die Schwierigkeit der chemischen Trennung

des Plutoniums vom Uran beruht auf zwei Umständen. Der erste ist der, daß die Uranmasse neben dem Plutonium eine große Menge Kerntrümmer der U^{235}-Spaltung enthält. Diese Trümmer sind stark radioaktiv, infolgedessen besitzt das aus dem Reaktor gezogene Uran eine so große Radioaktivität, daß es unmöglich ist, sich ihm auf geringe Entfernungen zu nähern. Alle Operationen mit diesem Uran müssen durch ferngelenkte Vorrichtungen ausgeführt werden. Das betrifft auch die Abtrennung des Plutoniums von der Masse des Urans. Eine weitere Schwierigkeit ist, daß das Plutonium dem Uran in chemischer Hinsicht sehr ähnlich ist. Wir haben in § 310 schon gesehen, daß die schweren Elemente, beginnend mit dem Aktinium, eine zweite Gruppe seltener Erden bilden, bei der sich die innere 5*f*-Schale auffüllt und deren Trennung daher wie bei den Lanthaniden ein schwieriges chemisches Problem ist. Diese beiden Tatsachen — die starke Radioaktivität des dem Reaktor entnommenen Urans und die chemische Ähnlichkeit von Plutonium und Uran — gestalten den technologischen Abtrennungsprozeß des Plutoniums außerordentlich kompliziert.

In einem reinen spaltbaren Stoff, d. h. ohne die Benutzung von Moderatoren, kann man eine sich mit ungeheurer Schnelligkeit entwickelnde Kettenreaktion von explosionsartigem Charakter erhalten. In einem derartigen Falle ist ebenso wie beim Reaktor die Zahl der entstehenden Neutronen dem Volumen des spaltbaren Stoffes proportional, während die Zahl der den Stoff verlassenden Neutronen seiner Oberfläche proportional ist. Daher ist es für die Entwicklung einer Kettenreaktion erforderlich, daß die Abmessungen des Systems eine gewisse kritische Größe überschreiten. Wegen der Abwesenheit eines Moderators ist aber die kritische Größe des Systems beträchtlich herabgesetzt. Ein System aus reinem Spaltmaterial, in dem sich eine sehr schnelle Kettenreaktion entwickelt, ist eine Atombombe.

Die Ausnutzung der Spaltungsenergie des Urans oder Plutoniums in der Atombombe war die erste Anwendung der Atomenergie in großem Maßstab. Ihre Nutzung zu friedlichen Zwecken, außer als Sprengstoff, ist in zwei Richtungen möglich:

1. Auf dem verhältnismäßig beschränkten Gebiet der künstlichen Gewinnung radioaktiver Stoffe für verschiedene wissenschaftliche und industrielle Zwecke. Wie wir wissen, sind alle Kerne, die Neutronen einfangen, radioaktiv. Man kann also prinzipiell beliebige radioaktive Stoffe erhalten, indem man das entsprechende Element der Neutronenbestrahlung in einem Reaktor aussetzt. Dieser Prozeß unterscheidet sich seinem Wesen nach durch nichts von der Gewinnung von Radioisotopen mit Hilfe von Kernreaktionen, wie sie z. B. mit dem Zyklotron realisiert werden. Die Anwendung von Reaktoren gestattet allerdings, die Radioisotope in großen Mengen zu erhalten. Diese Radioisotope finden mannigfaltige Verwendung in der Chemie, Biologie, Medizin und einer Reihe anderer Gebiete der Wissenschaften. Setzt man den Molekülen dieses oder jenes Stoffs radioaktive Isotope zu (z. B. indem man in einigen Molekülen den stabilen Kohlenstoff durch die radioaktiven Isotope C^{11} oder C^{14} ersetzt), so kann man das Schicksal des betreffenden Stoffs, wenn er von Tieren oder Pflanzen aufgenommen worden ist, verfolgen. Auf diese Weise wurden wertvolle Ergebnisse in der Erforschung des Mechanismus der Photosynthese, beim Studium des Phosphoraustauschs im lebenden Organismus usw. gewonnen[1]).

---

[1]) Siehe z. B. S. E. Bressler: „Radioaktive Elemente", Verlag Technik, Berlin, in Vorbereitung; siehe auch K. G. Schweitzer: „Radioactive Tracer Techniques", New York, Van Nostrand, 1949.

2. Die Nutzung der sich im Reaktor entwickelnden Energie für industrielle Zwecke.

Die Vorteile der Kernenergie sind durch folgende Eigenschaften bedingt:

1. Es sind nur kleine Brennstoffmengen zur Gewinnung von Wärmeenergie erforderlich.
2. Die Sauerstoffzufuhr und Anwendung anderer Oxydationssubstanzen ist überflüssig.
3. Die potentiellen Möglichkeiten der Energiegewinnung pro Gewichtseinheit sind sehr groß.

Zur Illustration des Punkts 1 entnehmen wir einem Artikel von GOODMAN folgende Zahlenangaben: Für eine Kraftanlage mit einer Leistung von 100000 Pferdekräften beläuft sich bei 25%iger Ausnutzung der Wärmeenergie, die im Reaktor entwickelt wird, der Uranverbrauch auf *ungefähr* 350 *g pro Tag*, bei einem Wirkungsgrad von 100% auf nur 75 g. Punkt 2 bedarf keiner Erläuterungen. Zu den unter Punkt 3 erwähnten Vorteilen erinnere man sich daran, daß bei der Arbeit einer beliebigen mit Kernenergie betriebenen Anlage eine große Menge durchdringender Strahlung entsteht, die gesundheitsschädlich ist. Um daher den Vorteil einer großen Energiekonzentration ausnutzen zu können, ist es notwendig, ferngesteuerte Energieanlagen oder kompakte, leichte Schutzvorrichtungen zu entwickeln.

Schließlich erweist sich als eine überaus wichtige Besonderheit der Kernenergie die Möglichkeit, sie bei sehr hohen Temperaturen zu gewinnen und so prinzipiell einen Nutzeffekt von praktisch 100% zu erreichen. Dazu entnehmen wir dem GOODMANschen Bericht[1]) die folgenden Überlegungen: „Tatsächlich existiert praktisch keine Grenze für die Temperatur, die beim Spaltungsprozeß erreicht wird, was aus den „Fixsterntemperaturen" der Atombomben ersichtlich ist. Aus der elementaren Thermodynamik folgt, daß die Kernsplitter bei der Spaltung mit Geschwindigkeiten auseinanderfliegen, die Temperaturen von einigen Milliarden Grad entsprechen:

$$\text{Kinetische Energie} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot T = 1{,}6 \cdot 10^{-6} E\,, \qquad (313{,}1)$$

und demzufolge

$$T = 7{,}8 \cdot 10^9 E \qquad (E \text{ in MeV}, \ T \text{ in Grad K}). \qquad (313{,}2)$$

Der wahrscheinlichste Wert für E ist bei der U^{235}-Spaltung gleich 97 MeV für leichte und 65 MeV für schwere Kernsplitter. So wird die Spaltungsenergie bei einem sehr niedrigen Entropieniveau

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{T}$$

frei.

Allerdings ist die Realisierung dieses Vorteils mit gewissen Schwierigkeiten verbunden, die jedoch nur technischen, nicht prinzipiellen Charakter tragen.

Die Geschichte der Wissenschaft zeigt, daß von einer wissenschaftlichen Entdeckung, in der die Möglichkeit einer technischen Nutzung verborgen ist, bis zur Schaffung eines neuen Gebiets der Technik ein langer Weg überwunden werden muß. Dieser Weg wird im gegebenen Falle zweifellos in weit kürzerer Zeit durchlaufen sein als je zuvor auf anderen Gebieten der Technik.

---

[1]) „The science and engineering of nuclear physics", 1947, Bd. I.

§ 314. Die Rolle der Kernenergie in der Natur

Kernprozesse spielen als Quelle ungeheurer Energiemengen im Leben des Weltalls eine hervorragende Rolle. Die Energiequelle der Sterne war lange Zeit rätselhaft. Es ist bekannt, daß die Sterne (darunter auch die Sonne) riesige Energiemengen pro Sekunde in den Raum ausstrahlen. Diese Ausstrahlung führt zu einem entsprechenden Energieverlust und würde diese Energie nicht ergänzt, dann wäre es unverständlich, wie die Sonne mehrere Milliarden Jahre nach ihrer Entstehung noch derartige Energiemengen ausstrahlen könnte. Das Problem besteht also in der Aufdeckung der Quellen, aus denen die Sterne ihre Energien schöpfen.

Im 19. Jahrhundert waren außer der potentiellen Gravitationsenergie keine solchen Quellen bekannt. Daher war die einzig vernünftige Theorie in jener Zeit die von Helmholtz-Kelvin, nach der die Energieverluste der Sterne auf Kosten ihres Zusammenpressens gedeckt werden. Diese Quelle ist aber bei weitem nicht ausreichend. Würde die Sonne ihren Energiebedarf nur durch Kontraktion decken, so ergäbe sich ihr Alter zu nur 20 Millionen Jahren. Unterdessen haben aber geologische Untersuchungen ergeben, daß das Alter der Erdkruste $2 \cdot 10^9$ Jahre beträgt. Daraus folgt, daß die Kontraktion, die bei normalen Sternen zweifellos vorhanden ist, nur einen sehr kleinen Teil der ausgestrahlten Energie ersetzen und die Sterne auf keinen Fall vor der Erkaltung bewahren kann.

Heute ist klar, daß eine sehr wesentliche, vielleicht die Hauptquelle der Sternenergie die Kernprozesse sind, die sich im Sterninnern vollziehen. Dies veranlaßt uns zu der Frage, welche Kernprozesse unter den im Sterninnern herrschenden Bedingungen stattfinden können. Zu ihrer Beantwortung ist es zunächst notwendig, einige Angaben über Temperaturen und Druck im Sterninnern zusammenzustellen. Dies geschieht in Tabelle LXV.

Tabelle LXV

Stern	$\frac{M}{M_\odot}$ [1]	$\frac{R}{R_\odot}$ [1]	Druck in at	Dichte in g cm^{-3}	Temperatur in °K
Sonne	1,0	1,0	$1 \cdot 10^{11}$	76	$19 \cdot 10^6$
Sirius	2,4	1,7	$1 \cdot 10^{11}$	41	$26 \cdot 10^6$
Capella	4,2	13	$8 \cdot 10^7$	0,16	$6 \cdot 10^6$
U Ophiuchus	5,4	3,2	$3 \cdot 10^{10}$	12	$25 \cdot 10^6$
Y Cygnus	17	5,9	$3 \cdot 10^{10}$	6,5	$32 \cdot 10^6$

Wir sehen, daß bei den aufgeführten Sternen, die zur sogenannten Hauptreihe gehören, die Temperaturen im Innern in die 10 Millionen Grad gehen. Eine Ausnahme bildet lediglich Capella ($T = 6 \cdot 10^6$ °K), die zu den Riesensternen gehört, die eine gesonderte Stellung einnehmen.

Es ist also zu untersuchen, welche Kernreaktionen bei Temperaturen von etwa 20 Millionen Grad in der gasförmigen Sternmaterie von selbst vor sich gehen können. Die dort herrschenden Bedingungen unterscheiden sich in einigen Beziehungen wesentlich von denen, die bei der Auslösung von Kernreaktionen durch schnelle Teilchen, wie wir sie durch Beschleuniger

[1] $\frac{M}{M_\odot}$ und $\frac{R}{R_\odot}$ Verhältnis von Sternmasse und -radius zu Masse und Radius der Sonne.

erhalten, auftreten. Hier handelt es sich gewöhnlich um Teilchen mit Energien von einigen MeV bis zu einigen Hundert MeV, die Anzahl dieser Teilchen ist jedoch relativ sehr klein. Im Gegensatz dazu ist in einem auf $2 \cdot 10^7$ Grad erhitzten einatomigen Gas die mittlere Energie der Teilchen nur 2 keV $= 2 \cdot 10^{-3}$ MeV[1]). Dafür ist jedoch die Zahl der Teilchen und infolgedessen die Zahl der Zusammenstöße in der Zeiteinheit sehr groß. Es handelt sich also um Kernreaktionen, die unter Bedingungen stattfinden, die an normale chemische Reaktionen erinnern, jedoch bei sehr hohen Temperaturen verlaufen. Wie wir schon in § 305 erwähnten, ist die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit von der Temperatur durch die Aktivierungsenergie der betreffenden Reaktion bestimmt. Wir betrachten z. B. die Reaktion

$$_3\mathrm{Li}^7 + {_1\mathrm{H}^1} = 2\,{_2\mathrm{He}^4}.$$

Wenn wir die Möglichkeit des Eindringens von Protonen in den Kern durch den Tunneleffekt nicht berücksichtigen, bestimmt die Höhe des Potentialwalls des $_3\mathrm{Li}^7$ auch die Aktivierungsenergie. Diese Höhe errechnet sich nach der Formel

$$B = 0{,}76\, z Z^{\frac{2}{3}} \text{ MeV}, \tag{314,1}$$

worin z die Protonenladung, also 1, Z die Ladung des Kerns, in den das Proton während der Reaktion eindringt, d. h. im vorliegenden Falle 3, ist. Aus Formel (314,1) finden wir

$$B = 1{,}6 \text{ MeV}.$$

Wenn alle Teilchen des Gases eine Energie, die gleich der mittleren Energie ist, besäßen, so käme die betrachtete Reaktion nur bei einer Temperatur von $1{,}6 \cdot 10^6 \cdot 10^4 = 1{,}6 \cdot 10^{10}$ Grad in Gang, vollzöge sich bei dieser Temperatur aber momentan. Wir haben aber bisher zwei wichtige Faktoren außer acht gelassen: Die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung und den Tunneleffekt.

Infolge der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung gibt es bei jeder Temperatur eine gewisse Anzahl von Teilchen mit einer Geschwindigkeit, die die mittlere Geschwindigkeit bei gegebener Temperatur wesentlich übersteigt. Dadurch erklärt es sich auch, daß wir leicht das gelbe Leuchten des Natriumdampfs über einem Gasbrenner bei einer Temperatur von 2000 bis 3000° erhalten, obwohl die Anregungsenergie der Natriumatome etwa 2 eV $\sim$ 20000° beträgt. Infolge des MAXWELLschen Gesetzes nimmt die Zahl der Teilchen mit einer Energie, die über die mittlere Energie bei einer gegebenen Temperatur hinausgeht, mit zunehmender Energie nach einem Exponentialgesetz ab.

Die andere wichtige Tatsache, die wir noch nicht beachtet haben, ist das Eindringen des Teilchens in den Kern durch einen Tunneleffekt.

Es ist tatsächlich gut bekannt, daß die Reaktion $\mathrm{Li}^7\,(p, 2\alpha)$ schon bei einer Protonenenergie, die kleiner als 0,2 MeV ist, erfolgt, obwohl die Höhe des Potentialwalls von Li^7 1 MeV beträgt.

Diese beiden Tatsachen, d. h. also die MAXWELL-Verteilung und der Tunneleffekt, setzen die Forderungen an die Temperatur, bei der eine „thermische Kernreaktion" mit merkbarer Geschwindigkeit erfolgt, stark herab. BETHE hat eine Formel für die Zahl der Prozesse, die

---

[1]) Die Temperatur eines Gases, dessen mittlere Energie der Atome gleich 1 eV ist, läßt sich leicht aus der Beziehung $kT = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg finden, wonach

$$T = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-12}}{1{,}38 \cdot 10^{-16}} = 1{,}16 \cdot 10^4 \text{ oder ungefähr } 10^4\,{}^\circ\mathrm{K} \text{ ist.}$$

mit einer Kernreaktion enden, in einem Gas mit MAXWELLscher Geschwindigkeitsverteilung entwickelt. Er fundierte seine Formel auf eingehende Überlegungen über die Kernreaktionen, die bei den Standardbedingungen im Sterninnern ablaufen können (Temperatur 20 Millionen Grad, Dichte $\varrho = 80\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$). Sie ist ziemlich kompliziert, und wir wollen sie hier nicht wiedergeben, sondern nur die Folgerungen betrachten, zu denen sie führt.

Gegeben sei ein Gas, das aus Kernen zweierlei Art besteht, aus leichten Kernen 1 und schwereren Kernen 2. Die Formel ermöglicht, die Wahrscheinlichkeit w dafür zu berechnen, daß bei den Gewichtskonzentrationen x_1 und x_2 der beiden Teilchenarten und unter den erwähnten Standardbedingungen ($T = 20\cdot 10^6$ Grad, $\varrho = 80\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$) ein Kern der Sorte 2 in Reaktion mit einem beliebigen Kern der Sorte 1, die den Einfang des letzteren zur Folge hat, tritt. Kommen keine anderen Reaktionen vor, die Kerne der Sorte 2 zerstören oder erzeugen, so ist der Kehrwert $\frac{1}{w}$ die mittlere Lebensdauer des Kerns 2 im Stern. BETHE errechnete diese mittlere Lebensdauer für eine Reihe von Reaktionen, in denen als Kern 1 der Wasserstoffkern auftritt. In Tabelle LXVI sind die Ergebnisse dieser Rechnungen aufgeführt: In der zweiten Spalte ist die Größe der Energie, die bei der Reaktion frei wird, in Tausendsteln der Masseneinheit angegeben (für die Umrechnung in MeV ist diese Zahl mit 0,931 zu multiplizieren); in der letzten Spalte finden wir die mittlere Lebensdauer verschiedener Kerne, berechnet unter der Annahme, daß $\varrho = 80$ und die Wasserstoffkonzentration $x_1 = 35\%$ ist, was astrophysikalischen Messungen entspricht.

Am Schluß der Tabelle sind zum Vergleich die Wahrscheinlichkeiten für eine Reaktion mit Heliumkernen angegeben. Wie wir sehen, sind diese Wahrscheinlichkeiten infolge der großen Masse und Ladung der α-Teilchen sehr klein. Interessant ist andererseits, daß der Reaktion

$$_2\mathrm{He}^4 + {}_1\mathrm{H}^1 \to {}_3\mathrm{Li}^5$$

Tabelle LXVI. Wahrscheinlichkeit der Kernreaktionen bei $2\cdot 10^7$ Grad

Reaktion	Q	P (sec^{-1})	mittlere Lebensdauer
$H^1 + H^1 = D^2 + \beta^+$	1,53	$8{,}5\cdot 10^{-21}$	$1{,}2\cdot 10^{11}$ Jahre
$D^2 + H^1 = He^3$	5,9	$1{,}3\cdot 10^{-2}$	2 Sekunden
$H^3 + H^1 = He^4$	21,3	$1{,}7\cdot 10^{-1}$	0,2 Sekunden
$Li^6 + H^1 = He^4 + He^3$	4,1	$7\cdot 10^{-3}$	6 Tage
$Li^7 + H^1 = 2He^4$	18,6	$6\cdot 10^{-4}$	1 Minute
$Be^9 + H^1 = Li^6 + He^4$	2,4	$6\cdot 10^{-13}$	2000 Jahre
$B^{11} + H^1 = 3He^4$	9,4	$1{,}2\cdot 10^{-7}$	3 Tage
$C^{13} + H^1 = N^{14}$	8,2	$2\cdot 10^{-14}$	$5\cdot 10^4$ Jahre
$C^{12} + H^1 = N^{13}$	2,0	$4\cdot 10^{-16}$	$2{,}5\cdot 10^6$ Jahre
$N^{14} + H^1 = O^{15}$	7,8	$2\cdot 10^{-17}$	$5\cdot 10^7$ Jahre
$N^{15} + H^1 = C^{12} + He^4$	5,2	$5\cdot 10^{-13}$	2000 Jahre
$O^{16} + H^1 = F^{17}$	0,5	$8\cdot 10^{-22}$	10^{12} Jahre
$Mg^{26} + H^1 = Al^{27}$	8,0	10^{-26}	10^{17} Jahre
$He^3 + He^4 = Be^7$	1,6	$3\cdot 10^{-17}$	$3\cdot 10^7$ Jahre
$Be^7 + He^4 = C^{11}$	8,0	$3\cdot 10^{-30}$	$3\cdot 10^{20}$ Jahre

eine sehr große Wahrscheinlichkeit zukommt. Vollzöge sich diese Reaktion auf der Sonne, wäre all ihr Helium in annähernd 6 Tagen „verbrannt". Da Helium aber auf der Sonne vorhanden ist, ist dies ein Hinweis darauf, daß das Isotop Li^5 nicht existieren kann. Dies ist durch alle Befunde der Kernphysik vollauf bestätigt.

Die Betrachtung der letzten Spalte ergibt, daß mit Ausnahme des Wasserstoffs die Lebensdauer der leichten Elemente bis zum Bor sehr klein sind (von Bruchteilen einer Sekunde beim H^3 bis zu 2000 Jahren für Be^9). Daraus folgt, daß alle Kerne zwischen H und C, speziell D^2, H^3, Li^6, Li^7, Be^9 und B^{11}, nur in solchen Mengen im Sterninnern existieren können, in denen sie durch andere Kernreaktionen, die sich in diesen Sternen abspielen, erzeugt werden. Weiterhin ist zu bemerken, daß die Lebensdauer des Kohlenstoffs und Stickstoffs beträchtlich größer als die in der Tabelle genannten sind, da diese Elemente aus Kettenreaktionen hervorgehen, über die unten noch die Rede sein wird. Die wirkliche Lebensdauer des Kohlenstoffs und Stickstoffs ist von der Größenordnung 10^{12}, möglicherweise auch 10^{20} Jahre. Auf jeden Fall ist sie groß gegenüber dem „Alter" der Sonne.

Aus dem Gesagten folgt, daß die einzige mögliche Kernreaktion zwischen Elementen, die leichter als Kohlenstoff sind, die die Sterntemperatur aufrechterhalten könnte und nicht zu einer zu schnellen Verbrennung der Substanz führen würde, die Reaktion zwischen zwei Protonen unter Bildung eines Deuterons

$$ {}_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1D^2 + \beta^+ \qquad (314,2)$$

wäre. Die Lebensdauer des an der Reaktion beteiligten Wasserstoffs ist hinreichend groß ($1,2 \cdot 10^{11}$ Jahre), und die entstehende Wärme, die gleich 2,2 erg/g·sec ist, deckt unter den Standardbedingungen ($T = 2 \cdot 10^7$, $\varrho = 80$ bei einem Wasserstoffgehalt von 35%) gerade die Energieausstrahlung der Sonne (2 erg/g·sec). Dies deutet darauf hin, daß die Bildung schwererer Elemente mit der Reaktion (314,2) ihren Anfang nimmt. Das entstehende Deuteron muß dann sofort ein weiteres Proton einfangen, weil die Lebensdauer des Deuterons, wie aus der Tabelle hervorgeht, nur 2 Sekunden beträgt; es bildet sich dann He^3;

$$ {}_1D^2 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^3 .$$

Eine ausführliche Untersuchung der Prozesse, die auf die Bildung von He^3 folgen, führten zu dem Schluß, daß die Entstehung von schwereren Kernen als He^3 in hohem Maße unwahrscheinlich ist. Man kann erwarten, daß sich auf 10^{24} α-Teilchen ein C^{12}-Kern und auf dieselbe Anzahl von α-Teilchen ein Neutron bilden, wenn der Li^4-Kern unbeständig, oder ein C^{12}-Kern auf 10^{34} α-Teilchen und ein Neutron auf 10^7 α-Teilchen, wenn der Li^4-Kern beständig ist. Der Grund dafür besteht darin, daß ein beliebiger der nicht radioaktiven Kerne zwischen H und C, also Li^6, Li^7, Be^9 und B^{11}, bei der Reaktion mit einer unvergleichlich größeren Wahrscheinlichkeit zur Bildung von α-Teilchen führt als zum Einfang eines Protons mit nachfolgender Bildung schwererer Kerne.

Somit ist das Ergebnis eines Zusammenstoßes mit Protonen letzten Endes die Bildung von α-Teilchen, also von Helium. Daher sind für das Entstehen schwererer Kerne Zusammenstöße der α-Teilchen notwendig. Der Zusammenstoß eines α-Teilchens mit einem Proton oder einem anderen α-Teilchen führt jedoch zu einem unbeständigen Kern:

$$ {}_2He^4 + {}_1H^1 \rightarrow {}_3Li^5 ,$$

$$ {}_2He^4 + {}_2He^4 \rightarrow {}_4Be^8 .$$

Es sind darum Dreierstöße, z. B.

$$_2He^4 + 2\,_1H^1 \to {}_4Be^6\,,$$
$$2\,_2He^4 + {}_1H^1 \to {}_5B^9\,,$$
$$3\,_2He^4 \to {}_6C^{12}$$

notwendig, wenn sich schwerere Kerne bilden sollen. Der Be^6-Kern ist aber offenkundig unbeständig; ebenso der Kern B^9. Die Bildung eines $_6C^{12}$-Kerns durch Zusammenstoß dreier α-Teilchen ist im Hinblick darauf, daß für das Eindringen des dritten α-Teilchens die Überwindung eines sehr hohen Potentialwalls erforderlich ist, bei einer Temperatur von $2 \cdot 10^7$ Grad außerordentlich unwahrscheinlich.

Unter den gegenwärtigen Bedingungen im Innern der uns bekannten Sterne ist also die Bildung von Kernen, die schwerer als He^4 sind, in irgend merklicher Menge ganz unwahrscheinlich. Schwere Elemente müssen in früheren Entwicklungsstadien des Alls entstanden sein. Daraus folgt weiter, daß die Erhaltung der Sternenergie nur durch Kernreaktionen, die auf dem einen oder anderen Wege zur Bildung von α-Teilchen auf Kosten von 4 Protonen führen, möglich ist. Derartiger Möglichkeiten gibt es zwei. Die erste wird durch die Reaktion

$$_1H^1 + {}_1H^1 \to {}_1D^2 + \beta^+ \qquad (314,2)$$

eingeleitet. Das entstehende Deuteron ergibt durch den nachfolgenden Einfang weiterer Protonen letzten Endes ein α-Teilchen. Damit bei dieser Reaktion eine Energiemenge von 2 erg/g·sec frei wird, muß die Temperatur im Sterninnern 360000 Grad betragen. Eine Beurteilung der astronomischen Befunde zeigt, daß die Reaktion (314,2) wahrscheinlich den Energieverlust in schwachen Sternen mit niedrigen Temperaturen in den zentralen Teilen deckt.

Der zweite Weg der Entstehung von α-Teilchen ist mit dem sogenannten C-N-Zyklus, der von Bethe eingehend erforscht worden ist, verbunden. Dieser Zyklus ist durch die folgende Kettenreaktion darstellbar:

$$\left.\begin{aligned}
{}_6C^{12} + {}_1H^1 &\to {}_7N^{13} + h\nu\,,\\
{}_7N^{13} &\to {}_6C^{13} + \beta^+\,,\\
{}_6C^{13} + {}_1H^1 &\to {}_7N^{14} + h\nu\,,\\
{}_7N^{14} + {}_1H^1 &\to {}_8O^{15} + h\nu\,,\\
{}_8O^{15} &\to {}_7N^{15} + \beta^+\,,\\
{}_7N^{15} + {}_1H^1 &\to {}_6C^{12} + {}_2He^4\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (314,3)$$

Der Zyklus beginnt mit einer Reaktion von C^{12} mit einem Proton und führt schließlich zur Bildung eines He^4-Kerns aus vier Protonen (unter Ausstoß von 2 Positronen). Bemerkenswert ist dabei, daß im letzten Glied der Kette C^{12} neu gebildet wird: Der Kohlenstoff wird also nicht verbraucht, sondern spielt sozusagen die Rolle eines Katalysators.

Ein Vergleich der relativen Wahrscheinlichkeit der Reaktion (314,2) und des C-N-Zyklus zeigt, daß bei niedrigen Temperaturen im Sterninnern die Reaktion (314,2) wahrscheinlicher ist, bei einer Temperatur von $2 \cdot 10^7$ Grad hingegen der C-N-Zyklus. In der folgenden Tabelle ist eine Gegenüberstellung astronomischer Daten für fünf Sterne gegeben.

Tabelle LXVII. Vergleich des C-N-Zyklus mit den Beobachtungen

Stern	Leuchtkraft erg/g·sec	Dichte im Zentrum	Wasserstoff-gehalt in %	Temperatur im Sterninnern	
				astro-physikalisch	nach dem C-N-Zyklus
Sonne	2,0	76	35	19	18,5
Sirius A	30	41	35	26	22
Capella	50	0,16	35	6	32
U Ophiuchus	180	12	50	25	26
Y Cygnus	1200	6,5	80	32	30

Ein Vergleich der letzten Spalte mit der vorletzten zeigt eine durchaus befriedigende Übereinstimmung der Rechenergebnisse auf der Grundlage des C-N-Zyklus mit den astrophysikalischen Daten. Eine wesentliche Diskrepanz besteht nur für Capella. Dieser Stern gehört zu den Riesensternen. Seine Dichte in den zentralen Teilen beträgt nur 0,16 und die Temperatur $6 \cdot 10^6$ Grad. Daher sind hier nur Kernreaktionen, die bei niedrigen Temperaturen ablaufen, möglich. Eine ausreichende Energie würde z. B. die Reaktion ${}_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow 2\,{}_2He^4$ liefern. Es ist allerdings unverständlich, warum sich in Riesensternen zunächst Lithium bilden soll und warum es bis heute nicht vollständig „verbrannt" ist. Das Problem der Energieerzeugung in Riesensternen muß also als noch nicht gelöst angesehen werden.

XXIV. DIE HÖHENSTRAHLUNG

§ 315. Einleitung

Die Höhenstrahlung und die Erscheinungen, die bei ihrem Durchgang durch Substanzen hervorgerufen werden, stellen einen Komplex der wichtigsten Probleme der modernen Physik dar. Im Verlauf der letzten 20 bis 25 Jahre zog dieser Forschungszweig die größte Aufmerksamkeit der Wissenschaftler auf sich. Besonders in den Nachkriegsjahren erhielt die Höhenstrahlenforschung durch die Entwicklung einer Reihe neuer Methoden zum Nachweis schneller Teilchen einen lebhaften Aufschwung.

Die Höhenstrahlung ist ein aus dem Weltraum einfallender Strom geladener Teilchen sehr großer Energie. Beim Eindringen in die Erdatmosphäre wird die aus dem Weltraum stammende Primärstrahlung in den obersten Atmosphärenschichten absorbiert. Dabei entsteht eine Sekundärstrahlung, die aus zwei Komponenten, einer weichen und einer harten, besteht. Die harte Komponente besitzt ein großes Durchdringungsvermögen: sie durchdringt die gesamte Erdatmosphäre und stellt den Hauptteil der in Meereshöhe und sogar unter dicken Erd- oder Wasserschichten noch zu beobachtenden Höhenstrahlung dar.

Bei der Erforschung der Höhenstrahlung tauchen in erster Linie folgende Probleme auf:

1. Welche Zusammensetzung und welches Energiespektrum besitzt die Primärstrahlung?

2. Welche Erscheinungen ruft die Primärstrahlung in der Lufthülle der Erde hervor, welche Zusammensetzung hat die Sekundärstrahlung und welches Energiespektrum besitzt sie?

3. Wo im Weltall entsteht die Primärstrahlung und welcher Art ist der Beschleunigungsmechanismus, der ihr die außerordentlich große Energie, die für sie charakteristisch ist, erteilt?

Die erste Frage (nach der Zusammensetzung und dem Energiespektrum der Primärstrahlung) kann heute als im großen und ganzen gelöst angesehen werden. Es ist bekannt, daß die primäre Höhenstrahlung aus schnellen Protonen, α-Teilchen und einer unbedeutenden Menge schwererer Kerne von großer Energie besteht. In unseren Breiten beträgt die minimale Energie primärer Protonen ungefähr 150 MeV. Der Durchgang der Primärstrahlung durch die Lufthülle der Erde stellt gewissermaßen einen in der Natur in großem Maßstab verwirklichten Versuch zum Studium der Wechselwirkung sehr schneller Kernteilchen mit der Substanz dar. Darin liegt die Begründung für die Anstrengungen, die gemacht wurden, um die Antwort auf die zweite der gestellten Fragen zu erhalten.

Die primäre Höhenstrahlung ruft eine Zertrümmerung der Atomkerne der Luft, mit denen sie zusammenstößt, hervor. Dabei entstehen sekundäre Protonen, Neutronen und π-Mesonen (siehe § 246) von großer Energie. Da die Energie dieser Sekundärteilchen groß genug ist, können sie ihrerseits neue Kernzertrümmerungen hervorrufen usw. Auf diese Weise entsteht ein *Kaskaden-Kernprozeß*, in dem sich die Energie der Primärteilchen auf eine große Zahl von Sekundärteilchen verteilt. Die in diesen Prozessen entstehenden π-Mesonen (und Mesonen anderer Art) sind nicht stabil. Sie zerfallen, ohne sich weit vom Ort ihrer Entstehung entfernt zu haben. Beim Zerfall geladener π-Mesonen entstehen μ-Mesonen und Neutrinos, beim Zerfall neutraler π-Mesonen γ-Quanten. Die μ-Mesonen sind ebenfalls instabil und zerfallen in Elek-

tronen und Neutrinos. Der π-Mesonenzerfall ist der Ursprung des Auftretens zweier Komponenten der sekundären Höhenstrahlung — einer weichen und einer harten, auf die die Energie der Höhenstrahlung annähernd gleichmäßig verteilt ist. Die weiche Komponente entsteht in der Atmosphäre als Ergebnis einer Kaskadenvervielfachung von γ-Quanten und Elektronen, die beim Zerfall neutraler π- und μ-Mesonen entstehen. Die harte Komponente besteht im wesentlichen aus μ-Mesonen. In tieferen Schichten der Atmosphäre wird die weiche Komponente stärker absorbiert als die harte, und die relative Intensität der harten, durchdringenden Komponente wächst: Auf Meeresniveau handelt es sich bei etwa $^2/_3$ der ganzen Höhenstrahlung um schnelle μ-Mesonen. Dies ist in ganz großen Zügen das Bild der Entstehung zweier Sekundärstrahlenkomponenten, wie sie in der Atmosphäre durch die Primärstrahlung erzeugt werden.

Über die letzte Frage nach der Quelle der Höhenstrahlung und deren Beschleunigungsmechanismus existieren heute erst mehr oder weniger begründete Hypothesen, und man beginnt, experimentelle Tatsachen zu sammeln, die allem Anschein nach in kurzer Zeit eine Antwort auf diese Frage ermöglichen werden.

§ 316. Die wichtigsten Untersuchungsergebnisse

Die ersten Höhenstrahlungsforschungen fallen in das Jahr 1901, wo festgestellt wurde, daß trockene Luft in einem vollkommen abgeschlossenen Raum immer schwach ionisiert wird, sogar nachdem darin enthaltene geringe Mengen radioaktiver Stoffe ganz durch Zerfall verschwunden sind. Die Ionisation vermindert sich beträchtlich, verschwindet jedoch nicht, wenn man den abgeschlossenen Behälter mit einem Bleipanzer der Dicke 2,5 cm umgibt. Daraus folgt, daß wenigstens ein Teil der Ionisation im Innern des Behälters durch eine Strahlung hervorgerufen wird, die ähnlich wie die γ-Strahlung die Fähigkeit besitzt, dicke Stoffschichten zu durchdringen. Anfänglich wurde die Vermutung geäußert, daß die Quelle dieser Strahlung radioaktive Stoffe seien, die immer in geringen Mengen in der Erde usw. vorhanden sind. Zur Prüfung dieser Hypothese wurde zuerst von Gockel (1910 bis 1911) und dann von Hess (1911 bis 1912) die Intensität der Ionisation in Ballonaufstiegen bis zu 5000 m gemessen. Es zeigte sich ein ganz unerwartetes Ergebnis: In den ersten 1000 m nahm die Ionisation tatsächlich ab, wenn auch weit langsamer als erwartet. Bei weiterem Aufstieg stieg sie jedoch wieder an, und zwar besonders scharf in 3000 m Höhe. In 5000 m ist die Intensität der Ionisation dreimal so groß wie an der Erdoberfläche. Es wurde klar, daß es eine stark durchdringende Strahlung außerirdischen Ursprungs, die von oben in die Atmosphäre einfällt und für einen Teil der Ionisation der Luft an der Erdoberfläche verantwortlich ist, geben muß, obwohl auch irdische Quellen für einen Teil der Ionisation verantwortlich sind. Dieses Resultat wurde durch weitere Versuche von Kohlhörster (1913 bis 1915), der mit einer Ionisationskammer bis zu 9200 m Höhe aufstieg, bekräftigt. Seine Messungen zeigten, daß der Ionisationsstrom in dieser Höhe dreißigmal stärker als der in Meereshöhe ist. Die Existenz einer von oben zur Erde gerichteten Strahlung war damit endgültig festgestellt. Diese Strahlen wurden Höhenstrahlung oder ihrer außerirdischen Herkunft wegen auch kosmische Strahlung genannt.

Der Untersuchung der Abhängigkeit der durch die Höhenstrahlung erzeugten Ionisation von der Höhe des Beobachtungsorts über dem Meeresniveau wurde eine große Zahl Arbeiten gewidmet, die in den verschiedensten geographischen Breiten ausgeführt wurden. Diese Versuche bestanden darin, daß man Spezialionisationskammern, die mit einer automatischen Registriereinrichtung versehen waren, mit Luftballons aufsteigen ließ.

Auf Abb. 424 ist die Änderung der Ionisation mit der Höhe wiedergegeben. Auf der Abszisse ist der Luftdruck, auf der Ordinate die auf den Luftdruck reduzierte Zahl der Ionen in cm^3/sec aufgetragen.

Wir erwähnen hier, da wir dies im folgenden häufig brauchen werden, daß ohne Änderung der Luftdichte mit der Höhe, d.h. also, falls diese überall den Wert $1{,}225 \cdot 10^{-3}$ g/cm³ besäße, der Druck von 760 mm Hg in Meereshöhe durch eine Luftschicht von 8 km erzeugt würde. Eine derartige Luftschicht ist der Stoffmenge nach einer 10 m hohen Wassersäule äquivalent. Die Höhe über dem Meeresniveau z in km steht mit dem Druck x in g/cm² genähert in der Beziehung

$$x = 1030\, e^{-\frac{z}{8}},$$

d. h. annähernd

$$z = 55 - 8 \ln x.$$

Auf Abb. 424 sehen wir vier Kurven, die das Ergebnis vieler Ballonaufstiege in den geomagnetischen Breiten 3°, 38°, 51° und 60° sind.

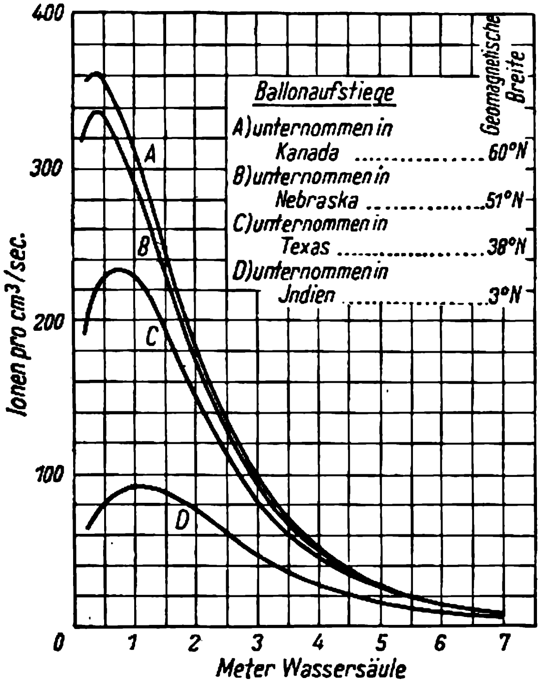


Abb. 424. Intensität der Höhenstrahlung in Abhängigkeit von der Höhe. Gemessen mit Ionisationskammern in vier verschiedenen Breiten

Wir sehen, daß mit zunehmender Höhe die Ionisation in allen Breiten anwächst, durch ein Maximum, das in etwa 12 bis 16 km Höhe liegt, geht und in noch größeren Höhen wieder abnimmt. Der beobachtete Anstieg der Ionisation mit der Höhe beweist überzeugend, daß das ionisierende Agens von oben her kommt und sich nicht in der Erdrinde befindet.

Aufstiege in der Nacht und bei Sonnenfinsternissen ergaben keine merklichen Unterschiede in der Intensität der Ionisation. Daraus folgerte man, daß das ionisierende Agens anscheinend nicht von der Sonne stammt. Es rührt auch nicht von bestimmten Sternen her, denn wie Versuche zeigten, kann man in der Himmelssphäre keinen Punkt angeben, von dem mehr kosmische Strahlung käme als von irgendeinem anderen. In den letzten Jahren erhielt man jedoch Versuchsergebnisse, die dafür sprechen, daß ein gewisser Teil der Primärstrahlung doch von der Sonne stammt: so ist z. B. die Intensität schwerer Kerne, die in der Primärstrahlung vorhanden sind, am Tage zwei- bis dreimal größer als nachts. Für Protonen und α-Teilchen, die den Hauptanteil der primären Höhenstrahlung darstellen, ist eine derartige Korrelation zwischen Intensität und Tageszeit nicht beobachtet worden.

Die Betrachtung der Kurven in Abb. 424 zeigt, daß die Ionisation, die durch die Höhenstrahlung hervorgerufen wird, stark von der geomagnetischen Breite des Beobachtungsortes abhängt: Sie ist am Äquator am kleinsten und nimmt nach höheren Breiten hin zu.

Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Ablenkung der geladenen Primärteilchen durch das magnetische Feld der Erde; sie wird ausführlich im nächsten Paragraphen behandelt.

Das außerordentlich hohe Durchdringungsvermögen der Höhenstrahlung gab zuerst zu der Vermutung Anlaß, daß es sich um ultraharte γ-Strahlen handelt, sie also elektromagnetischer Natur sei. Schon im Jahre 1927 jedoch fand D. W. Skobelzin mit einer Wilson-Kammer, die in einem starken Magnetfeld angeordnet war, in der Höhenstrahlung schnelle ionisierende Teilchen. Versuche von Bothe und Kohlhörster (1929), die zur Registrierung der Höhenstrahlung eine Koinzidenzschaltung zweier Geiger-Müller-Zählrohre benutzten, zeigten, daß die Höhenstrahlung, die in Meereshöhe beobachtet wird, im wesentlichen ein Strom geladener Teilchen ist. Der Grundgedanke zu diesen Versuchen war folgender. Es ist bekannt, daß γ-Quanten selbst die Luft nicht ionisieren, sondern nur dann eine Ionisation hervorrufen, wenn sie durch Absorption in Substanzen schnelle Elektronen auslösen. Im Gegensatz dazu ionisieren hinreichend schnelle Teilchen auf ihrem ganzen Weg. Davon ausgehend, legten Bothe und Kohlhörster ihren Versuch wie folgt an. Zwei Geiger-Müller-Zähler wurden senkrecht übereinander angeordnet und mit Fadenelektrometern verbunden, deren Ausschläge auf einem vorüberbewegten Film aufgenommen wurden. Besteht die Höhenstrahlung aus einem Teilchenstrom, so konnte man nach dem Gesagten erwarten, daß beim Durchgang eines geladenen Teilchens durch beide Zählrohre die Elektrometerausschläge zeitlich zusammenfallen müssen. Ist die Höhenstrahlung dagegen elektromagnetischer Natur, so wird keine Koinzidenz stattfinden, da die γ-Quanten nur dann einen Elektrometerausschlag hervorrufen, wenn sie in der Wand eines der Zähler absorbiert werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür aber, daß ein γ-Quant schnelle Teilchen in den Wänden beider Zählrohre erzeugt, ist außerordentlich klein. Der Versuch zeigte, daß eine beträchtliche Anzahl gleichzeitiger Elektrometerausschläge, die von schnellen, beide Zählrohre passierenden Teilchen herrührten, stattfanden. Es gelang auch zu zeigen, daß das Durchdringungsvermögen dieser Teilchen gleich dem Durchdringungsvermögen der Höhenstrahlen ist, indem zwischen den Zählrohren Stoffschichten verschiedener Dicke angeordnet wurden. Die Erklärung der großen Häufigkeit gleichzeitiger Elektrometerausschläge machte die Annahme notwendig, daß fast die gesamte Höhenstrahlung in Meereshöhe aus geladenen Teilchen besteht.

Die Verwendung zweier oder mehrerer Zählrohre in Koinzidenzschaltung (siehe § 251) fand nach den beschriebenen Versuchen eine große Verbreitung und wurde eine der wichtigsten Methoden zur Untersuchung der Höhenstrahlen. Sind die Zählrohre starr miteinander

verbunden, so ist diese Anordnung gewissermaßen ein „Teleskop" für Höhenstrahlung. Da die Anlage nur dann anspricht, wenn ein Teilchen durch alle Zählrohre hindurchfliegt, kann man tatsächlich die Intensität der Höhenstrahlung in verschiedenen Richtungen messen, auf die man das Teleskop einstellt. Es ergab sich, daß ein Maximum von Koinzidenzen auftritt, wenn das Teleskop vertikal gerichtet ist. Bei einer Neigung des Teleskops nimmt die Zahl der Koinzidenzen entsprechend der zunehmenden Dicke der Luftschicht, die bei schrägem Einfall der Höhenstrahlung zu durchdringen ist, schnell ab. Mit einer derartigen Anordnung konnte man auch die Vertikalintensität der Höhenstrahlung in verschiedenen Höhen messen. Die Versuche zeigten, Abb. 425, daß die Vertikalintensität schnell mit der Höhe wächst und bei

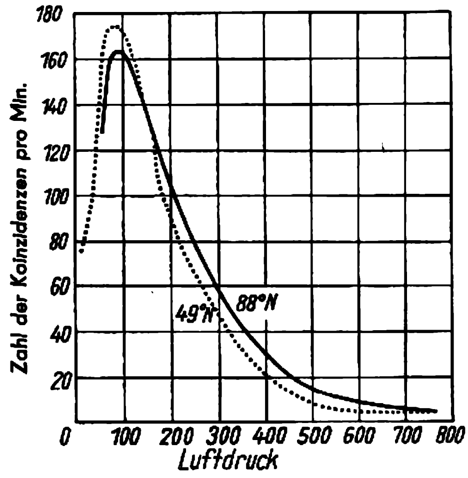


Abb. 425. Vertikalintensität der kosmischen Strahlung in Abhängigkeit von der Höhe, gemessen mit einem Zählrohr-Teleskop in den Breiten 49° und 88° N

einem Druck von etwa 100 g/cm² (was einer Höhe von rund 17 km entspricht) ein Maximum aufweist. In noch höheren Atmosphärenschichten nimmt die Zahl der Koinzidenzen schnell mit zunehmender Höhe ab. Dieser Abfall erklärt sich ebenso wie die Ionisationsabnahme mit der Höhe dadurch, daß die Geräte durchaus nicht nur die aus dem Weltraum stammende Primärstrahlung registrieren. Die Primärstrahlung erzeugt auf ihrem Weg durch die Atmosphäre eine große Zahl geladener Teilchen mit hoher Energie und großem Durchdringungsvermögen und wird selbst schnell in den höheren Luftschichten absorbiert. Wir beobachten in den verschiedenen Höhen den ganzen Komplex sekundärer, tertiärer usw. Strahlung. In sehr großen Höhen hat die Primärstrahlung noch keine so große Zahl Sekundär-, Tertiär- usw. Teilchen geschaffen, so daß die Geräte dort schwächere Intensitäten anzeigen. Daher beginnt die Gesamtintensität (d. h. die Summe der Intensitäten der Primärstrahlung, Sekundärstrahlung, Tertiärstrahlung usw.) von einer gewissen Höhe an abzunehmen, und an der Grenze der Atmosphäre, wo sich Sekundärteilchen noch nicht in irgendwie merklicher Menge bilden, ist die registrierte Intensität die der Primärteilchen allein und bleibt daher bei weiterem Aufstieg konstant. Diese Behauptung wurde durch Intensitätsmessungen bestätigt, die 1947 weit oberhalb der Erdatmosphäre durchgeführt wurden, und zwar mit

Geräten, die in Raketengeschossen montiert waren. Als Anzeigegerät für die Höhenstrahlung wurde ein einzelnes GEIGER-MÜLLER-Zählrohr verwendet. Die Rakete erreichte eine Höhe von 161 km. Auf Abb. 426 ist das dabei erhaltene Ergebnis dargestellt. Man sieht, daß oberhalb der Erdatmosphäre, beginnend bei einer Höhe von 55 km, die Intensität der Höhenstrahlung konstant ist.

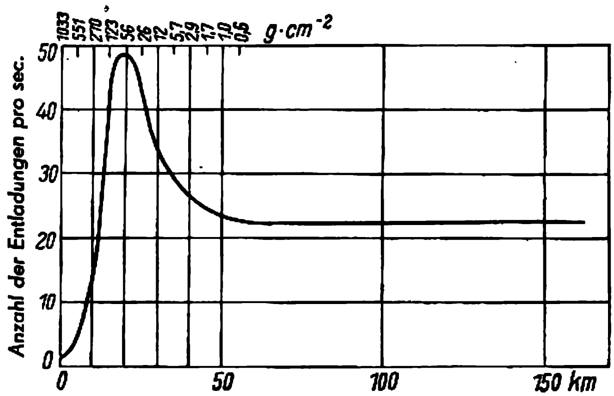


Abb. 426. Abhängigkeit der Zahl der Entladungen in einem einzelnen Zählrohr von der Höhe

Die Intensität der Höhenstrahlung ist nicht nur in großen Höhen, sondern auch in großen Erd- oder Wassertiefen gemessen worden. Die ersten derartigen Versuche wurden 1925 von L. W. MYSOWSKI und TUWIM durchgeführt. Sie maßen mit Hilfe einer Ionisationskammer die Absorption der Höhenstrahlung im Onega-See bei Leningrad. Diese Untersuchungen zeigten, daß der Absorptionskoeffizient für Höhenstrahlen in Wasser 10mal kleiner als der für harte γ-Strahlen ist. Diese Versuche waren zu ihrer Zeit von größter Bedeutung, da von 1923 bis 1925 eine Reihe von Forschern, darunter MILLIKAN, zu dem Schluß kamen, daß die Härte der Höhenstrahlung in einigen Kilometern Höhe (gemessen durch ihre Absorption in Blei), die gleiche sei wie die der gewöhnlichen γ-Strahlen, und daß demnach die Höhenstrahlung ihre Entstehung der Anwesenheit radioaktiver Elemente in hohen Atmosphärschichten verdankt.

Auf Abb. 427 sind die Ergebnisse der Messung der Höhenstrahlintensitäten unter Wasser, wie sie mit GEIGER-MÜLLERschen Zählrohren in Koinzidenzschaltung erhalten wurden, dargestellt. Wir sehen, daß sogar in einer Tiefe von 1000 m noch eine beträchtliche Höhenstrahlung beobachtet wird. Sie besitzt also die Fähigkeit, große Stoffschichten zu durchringen.

Eine große Anzahl von Untersuchungen wurde dem Studium der Absorption der Höhenstrahlung in dichten Stoffen gewidmet. Diese Untersuchungen wurden in verschiedenen Höhen — von Meeresniveau bis zu den höchsten Atmosphärenschichten — angestellt, und zeigten, wie sich das Durchdringungsvermögen der Höhenstrahlung mit der Höhe ändert. Als Meßgeräte wurden entweder Ionisationskammern oder Zählrohre verwendet. Als beste Anordnung für die geladene Komponente der Höhenstrahlung erwies sich das Teleskop aus GEIGER-Zählern, wie es in Abb. 428 wiedergegeben ist. Wenn wir die Intensität der Höhenstrahlen für verschiedene Dicken der Absorptionsschichten zwischen den Zählrohren des Teleskops messen, so erhalten wir die sogenannte Absorptionskurve der Höhenstrahlung,

die die Abhängigkeit der Zahl der Dreifachkoinzidenzen in der Zeiteinheit von der Absorberdicke darstellt. Auf Abb. 428 sehen wir die Absorptionskurven für Blei, wie sie in verschiedenen Höhen gemessen wurden; die untere Kurve gilt für Meeresniveau, die obere für eine Höhe von 3250 m.

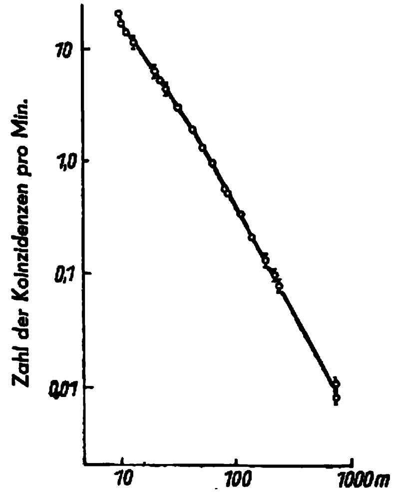


Abb. 427. Änderung der Intensität der Höhenstrahlung in Wasser in Abhängigkeit von der Tiefe

Wir sehen, daß die Ordinaten der Absorptionskurve sowohl bei Meereshöhe als auch bei 3250 m für die ersten zehn Zentimeter Blei schnell abnehmen. Danach bedingt eine weitere Verstärkung der Bleischicht nur eine weitaus langsamere Abnahme der Dreifachkoinzidenzen. Die untere Kurve zeigt, daß in Höhe des Meeresniveaus die Intensität der Höhenstrahlung (richtiger, ihres geladenen, d. h. ionisierenden Anteils) für die ersten zehn Zentimeter Bleischicht um 30% abnimmt. Der Teil der Strahlung, der durch die ersten zehn Zentimeter Blei hindurchgeht, ist stark durchdringend: Er geht durch 1 m Blei und wird dabei nur um die Hälfte geschwächt. Diesem Anteil verdankt die Höhenstrahlung ihr großes Durchdringungsvermögen.

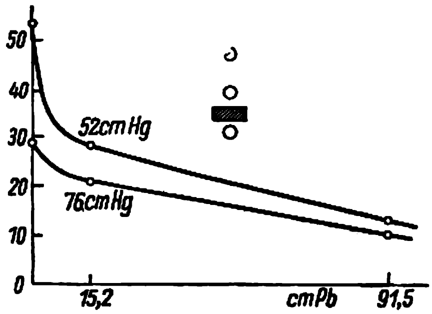


Abb. 428. Absorption der Höhenstrahlung in Blei, mittels der Koinzidenzmethode gemessen (Versuchsschema: Teleskop aus drei Zählrohren und Absorptionsschicht)

Dieser Kurvenverlauf weist deutlich darauf hin, daß es sich in Wirklichkeit um die Überlagerung zweier Kurven handelt, von denen die eine durch einen großen, die andere durch einen kleinen Absorptionskoeffizienten charakterisiert ist. Diese Tatsache deutet auf das Vorhandensein zweier Komponenten der Höhenstrahlung hin.

Die eine dieser Komponenten wird schon in einer verhältnismäßig dünnen Bleischicht von etwa 10 cm Stärke absorbiert und besteht, wie noch gezeigt werden wird, aus Positronen, Elektronen und γ-Quanten. Wir wollen sie weiche Komponente nennen Die zweite, stark durchdringende Komponente bezeichnet man als harte Komponente. Wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, macht in Meereshöhe die harte Komponente etwa zwei Drittel, die weiche etwa ein Drittel der gesamten Intensität der Höhenstrahlung aus. In großen Höhen überwiegt dagegen die weiche Komponente.

Die Frage nach dem Verhältnis zwischen den Intensitäten der weichen und der harten Komponente in verschiedenen Höhen über dem Meeresspiegel ist von großem Interesse. Die Kenntnis dieses Verhältnisses wirft ein Licht auf die Art der Sekundärprozesse, die sich beim Durchgang der Höhenstrahlung durch die Atmosphäre abspielen. Auf Abb. 429 sind

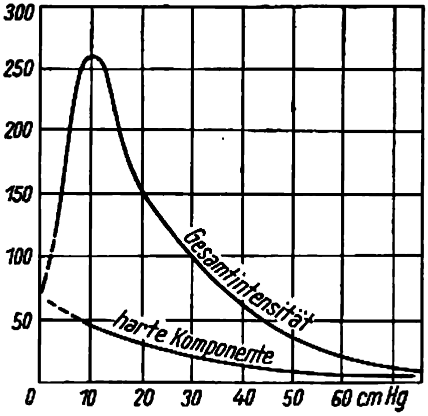


Abb. 429
Höhenabhängigkeit der Gesamtintensität der Höhenstrahlung und der harten Komponente

die Kurven dargestellt, die den Verlauf der Gesamtintensität der Höhenstrahlung und den Verlauf der harten Komponente in Abhängigkeit von der Höhe angeben. Die Gesamtintensität wurde mit zwei Zählern in Koinzidenzschaltung gemessen. Zur Messung der harten Komponente wurde zwischen den Zählern eine 10 cm dicke Bleischicht angebracht. Die Anordnung ließ man im Pilotballon aufsteigen. Auf der Ordinatenachse ist für beide Kurven die Zahl der Koinzidenzen in der Zeiteinheit aufgetragen, auf der Abszisse der Luftdruck am Beobachtungsort. Die Messung wurde bis zu einem Druck von $p = 5$ cm Hg ausgeführt, was einer Höhe von etwa 30 km entspricht. Die Differenz beider Kurven entspricht der Intensität der weichen Komponente. Wir sehen, daß die weiche Komponente mit der Höhe weitaus schneller wächst als die harte. In Meereshöhe beträgt die Intensität der weichen Komponente nahezu die Hälfte der harten, bei einem Druck von 10 cm Hg (= 15 km Höhe) hingegen ist die Intensität der weichen Komponente 4- bis 5mal so groß

wie die der harten. Daraus folgt, daß in dem Maße, wie die Höhenstrahlung in die niedrigeren Atmosphärenschichten eindringt, sich ihr Durchdringungsvermögen vergrößert; die Höhenstrahlung wird härter.

§ 317. Die Wirkung des Magnetfeldes der Erde auf die Primärstrahlung (geomagnetische Effekte)

Es ist bekannt, daß das Magnetfeld der Erde ungefähr dem Feld eines magnetischen Dipols mit dem Moment $M = 8{,}1 \cdot 10^{25}$ erg/Gauß äquivalent ist, dessen Achse die Richtung vom magnetischen Nordpol der Erde zum magnetischen Südpol einnimmt. Eine elektrische Ladung, die sich im magnetischen Feld der Erde bewegt, wird abgelenkt. Theoretische Untersuchungen zeigen, daß das Magnetfeld der Erde elektrische Ladungen, die auf die Erde zufliegen, zu den magnetischen Polen hin ablenkt: Je näher zum magnetischen Äquator ein geladenes Teilchen auf die Erdoberfläche fällt, desto stärker ist seine Ablenkung. Teilchen, die senkrecht auf die erdmagnetischen Pole einfallen, bewegen sich längs der magnetischen Feldlinien und werden nicht abgelenkt. Ein allgemein bekanntes Beispiel der Ablenkung geladener Teilchen zu den Polen hin ist das Nordlicht. Es kommt dadurch zustande, daß Elektronenströme, die von der Sonnenoberfläche ausgeschleudert werden und in das Magnetfeld der Erde einfallen, zu den Polen hin abgelenkt werden und dort die Atmosphäre ionisieren, wobei ein sichtbares Leuchten entsteht.

Die verschiedenen Erscheinungen, die durch die Wirkung des Magnetfeldes der Erde auf die primäre Höhenstrahlung hervorgerufen werden, tragen die allgemeine Bezeichnung geomagnetische Effekte. Als solche sind zu nennen der Breiten- und der Längeneffekt, die in einer Änderung der Intensität der Höhenstrahlung in Abhängigkeit von der geomagnetischen Breite bzw. Länge des Beobachtungsortes bestehen. Ferner der Effekt der azimutalen Asymmetrie, der sich darin äußert, daß die Intensität der von Osten und Westen einfallenden Höhenstrahlung verschieden ist, und eine Reihe anderer, feinerer Effekte.

Die geomagnetischen Effekte geben uns einen Einblick in die Natur der Primärstrahlung, die aus dem Weltraum zur Erde gelangt. Die schnellen Teilchen der primären Höhenstrahlung beginnen bereits im Abstand einiger Erddurchmesser den Einfluß des Magnetfeldes der Erde zu „spüren". Die magnetische Ablenkung, die das Teilchen in der Atmosphäre, die die Erde umgibt, erfährt, ist verschwindend klein gegenüber derjenigen, die es, aus dem Weltraum kommend, bei seiner Annäherung an die obere Grenze der Atmosphäre erleidet.

Ist also allgemein der Impuls eines geladenen Teilchens kleiner als eine gewisse Größe p_φ, die für die verschiedenen geomagnetischen Breiten φ verschieden ist, so wird es beim Einfall in das Erdmagnetfeld in Richtung auf einen der beiden Pole abgelenkt und gelangt nicht zur Erdoberfläche. Die Theorie der geomagnetischen Effekte verknüpft die Größe dieses kritischen Impulses p_φ eines geladenen Teilchens wie folgt mit der geomagnetischen Breite:

$$p_\varphi = 1{,}5 \cdot 10^{10} \cos^4 \varphi \cdot |Z| \frac{\mathrm{eV}}{c}. \tag{317,1}$$

Hierin ist p_φ der Impuls des Teilchens in $\frac{eV}{c}$, $|Z|$ der absolute Wert der Teilchenladung in Elementarladungen. Wir werden in der Folge den Teilchenimpuls immer in Einheiten $\frac{eV}{c}$ ausdrücken. Der Impuls kann in solchen Einheiten gemessen werden, weil die Größe pc die Dimension einer Energie hat und in eV angegeben werden kann. Aus der relativistischen Beziehung zwischen der Gesamtenergie und dem Impuls eines Teilchens (siehe Teil I, § 61)

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{61,12}$$

folgt, daß man m_0c^2 vernachlässigen kann, wenn die Energie des Teilchens E wesentlich größer, als seine Ruheenergie m_0c^2 („relativistisches" Teilchen) ist, so daß dann

$$E = pc$$

ist. Drückt man also den Impuls eines „relativistischen" Teilchens durch irgendeine Zahl in Einheiten $\frac{eV}{c}$ aus, so ist seine Energie gleich *dieser Zahl* in Einheiten eV. Ist z. B. der Impuls eines Elektrons gleich 50 MeV/c, so beträgt seine Energie 50 MeV. Die von uns gewählte Einheit des Impulses erweist sich daher als sehr bequem.

Die Formel (317,1) gilt für Teilchen, die senkrecht aus dem Weltraum auf die Erde fallen. Aus (317,1) folgt, daß in Richtung des Äquators ($\varphi = 0$) nur Teilchen, deren Impuls $p_\varphi > 1{,}5 \cdot 10^{10}\,|Z|$ ist, die Erde erreichen können. In der folgenden Tabelle sind die p_φ-Werte für ein einfach geladenes Teilchen ($Z = 1$) bei verschiedenen Breiten angegeben.

Tabelle LXVIII

Breite	0°	20°	40°	50°	90°
p_φ	$1{,}5 \cdot 10^{10}$	$1{,}4 \cdot 10^{10}$	$0{,}52 \cdot 10^{10}$	$0{,}26 \cdot 10^{10}$	0

Ist der Impuls größer als p_φ, so wird die ablenkende Wirkung des Erdmagnetfelds nicht ausreichen, und ein solches Primärteilchen wird die Grenze der Erdatmosphäre erreichen.

Diese Besonderheiten des Verhaltens geladener Teilchen im Magnetfeld der Erde erwiesen sich als überaus wichtig für die Klärung der Natur der kosmischen Primärstrahlung. Besteht nämlich die primäre Höhenstrahlung, die aus dem Weltraum zur Erde gelangt, aus geladenen Teilchen, so müßte sie im Magnetfeld der Erde eine Ablenkung erfahren. Es müßten also am Äquator, wo p_φ den größten Wert hat, eine geringere Anzahl von Teilchen die Grenze der Erdatmosphäre erreichen als in höheren Breiten. An den Polen jedoch müßten Teilchen mit beliebigem Impuls bis zur Grenze der Erdatmosphäre gelangen. Besteht also die primäre Höhenstrahlung aus geladenen Teilchen, so muß ihre Intensität mit zunehmender geomagnetischer Breite des Beobachtungsortes anwachsen.

Untersuchen wir daraufhin die Messungen der Vertikalintensität der Primärstrahlung, die in den Jahren 1948 bis 1950 mit „Teleskopen" aus Geiger-Müller-Zählrohren, die man in Pilotballons und Raketen bis an die Grenze der Atmosphäre hinaufschickte, durchgeführt wurden. Auf Abb. 430 ist die Abhängigkeit der Intensität der primären kosmischen Strahlung von der Breite nach den Versuchsergebnissen verschiedener Autoren dargestellt. Längs der Abszisse der graphischen Darstellung sind drei verschiedene Skalen aufgetragen: die geomagnetische Breite (obere Skala), die der gegebenen Breite entsprechende Größe des kritischen Impulses und der kinetischen Energie der Primärteilchen, die unter der Annahme berechnet wurde, daß es sich bei diesen Teilchen um Protonen handelt, und schließlich $\mathfrak{H}\varrho$, das Produkt aus der magnetischen Feldstärke und dem Krümmungsradius der Bahn (untere Skala). Längs der Ordinatenachse ist die Vertikalintensität aufgetragen, d. h. die Zahl der geladenen Teilchen, die vertikal auf 1 cm² pro Sekunde und Einheit des Raumwinkels auftreffen. Wir sehen, daß die Intensität der Primärstrahlung von ungefähr 0,025 am

Äquator bis 0,20 in 50° nördlicher Breite anwächst, d. h. also, daß sie sich zwischen diesen Breiten etwa verachtfacht.

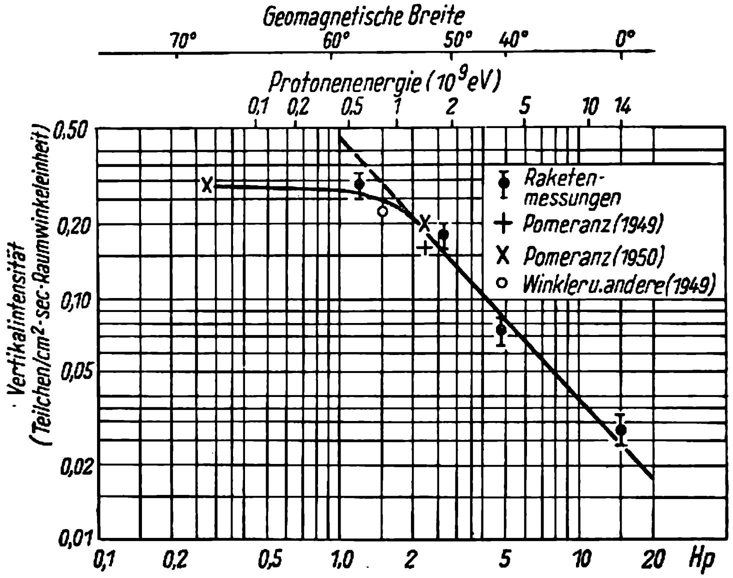


Abb. 430. Abhängigkeit der Vertikalintensität der kosmischen Primärstrahlung von der Breite. Gemessen mit einem Zählrohr-Teleskop, das in Raketen und Pilotballons in große Höhen hinaufgetragen wurde

Die Existenz eines derartig ausgeprägten Breiteneffekts beweist, daß mindestens ein beträchtlicher Teil der Primärstrahlung aus geladenen Teilchen besteht. Wie erwähnt, können nur solche Teilchen der Primärstrahlung eine gegebene geomagnetische Breite φ erreichen, deren Impuls größer als $p_\varphi = 1{,}5 \cdot 10^{10} \mid Z \mid \cos^4\varphi \, \frac{eV}{c}$ ist. Daher gibt uns die Breitenabhängigkeit der Intensität der primären Höhenstrahlung die Anzahl der Teilchen, deren Impuls größer als $p_\varphi / N\left(> \frac{pc}{Ze}\right)$ ist, d.h. unmittelbar das integrale Spektrum der Primärstrahlung.

Aus den Kurven der Skizze 424, die die Höhenabhängigkeit der durch die kosmische Strahlung hervorgerufenen Ionisation in den Breiten 3°, 38°, 51° und 60° N wiedergibt, folgt, daß der Breiteneffekt nicht nur in den höchsten Atmosphärenschichten zu beobachten ist, sondern in allen Höhen, also auch in Meereshöhe. Allerdings verringert sich die Größe des Breiteneffekts um so mehr, je tiefer die Atmosphärenschichten liegen, in denen die Messungen vorgenommen werden. So ist z. B. das Verhältnis der durch die Höhenstrahlung erzeugten Ionisation in einer Breite von 60° N (Kurve A in Abb. 424) zu der in 3° nördlicher Breite (Kurve D in Abb. 424) für einen Druck von 50 g/cm² gleich $\frac{I_{60°}}{I_{3°}} = 4{,}3$, während es bei 300 g/cm² gleich $\frac{I_{60°}}{I_{3°}} = 2{,}1$ und bei 700 g/cm² nur noch gleich $\frac{I_{60°}}{I_{3°}} = 1{,}4$ ist.

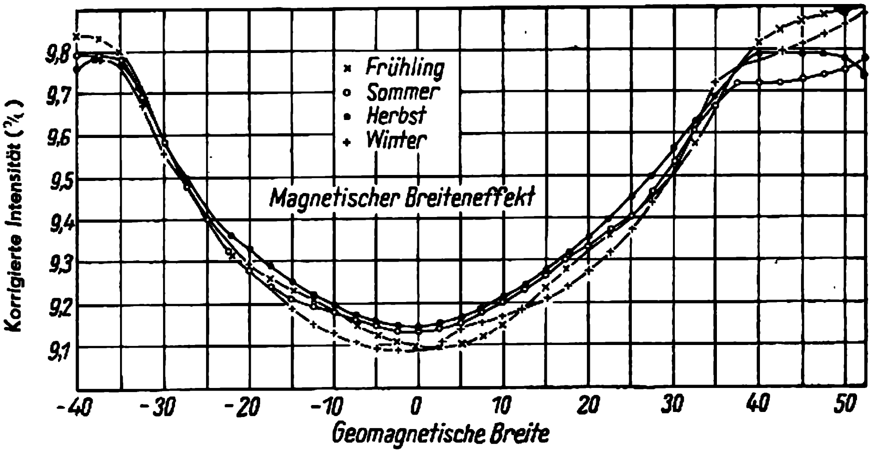


Abb. 431. Breiteneffekt, gemessen in Meereshöhe

Trotz der Kleinheit des Breiteneffekts in niedrigen Atmosphärenschichten wurde seine Existenz zuerst an Messungen, die 1930 in Meereshöhe ausgeführt wurden, entdeckt. Die genauesten Angaben über den Breiteneffekt der Höhenstrahlung auf Meeresniveau stammen von Compton und Turner, die an Bord eines Dampfers, der reguläre Reisen im Stillen Ozean zwischen Kanada und Australien ausführte, eine Ionisationskammer aufstellten. Die Messungen wurden im Verlauf von zwölf Reisen zu verschiedenen Jahreszeiten (von 1936 bis 1937) durchgeführt und ermöglichten die Feststellung des Zusammenhangs zwischen Intensität der Höhenstrahlung in Meeresniveau und geomagnetischer Breite, wobei diese sich von 52° N bis 41° S änderte. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 431 wiedergegeben. Auf der Ordinate ist die Intensität, auf der Abszisse die geomagnetische Breite aufgetragen. Die vier eingezeichneten Kurven beziehen sich auf Messungen im Frühling, Sommer, Herbst und Winter. Wir sehen, daß in Meereshöhe die Höhenstrahlungsintensität in 50° nördlicher Breite etwa 10% größer als die am Äquator gemessene ist. Die Abnahme des Breiteneffekts von hohen Atmosphärenschichten bis hinab zum Meeresniveau ist qualitativ zu verstehen, wenn man sich daran erinnert, daß bis zum Meeresniveau die durchdringendsten Teilchen, die die größte Energie besitzen, gelangen. Diese Teilchen, die sekundärer Art sind, werden durch Primärteilchen sehr hoher Energie, welche durch das Magnetfeld der Erde nur wenig beeinflußt werden, erzeugt. Diejenigen Primärteilchen, die Sekundärteilchen von geringer Durchdringungsfähigkeit erzeugen, haben im Mittel eine wesentlich niedrigere Energie und werden stärker durch das Magnetfeld der Erde abgelenkt, ergeben also den größten Breiteneffekt.

Eine ausführlichere Übersicht über den Einfluß des Breiteneffekts auf die Größe der Energie, die von der Primärstrahlung in die Erdatmosphäre in verschiedenen Breiten eingebracht wird, erhält man bei der Betrachtung der Kurven der Abb. 424. Die Fläche, die durch die Kurven A, B, C oder D, die Abzissenachse und die Ordinaten $h = 0$ und $h = 7$ m (die Kurven auf Abb. 424 reichen nicht bis zum Meeresniveau) eingegrenzt wird, stellen die Gesamtzahl der Ionen dar, die von der Höhenstrahlung in einer Luftsäule von 1 cm² Grundfläche erzeugt werden. Es ist bekannt, daß schnelle geladene Teilchen zur Erzeugung eines

Ionenpaares ungefähr ein und dieselbe Energie verbrauchen, die unabhängig von ihrer Gesamtenergie ist. Somit ist die erwähnte Fläche proportional der Energie E_1, die die Höhenstrahlen zur Ionisation der Luftatome beim Durchgang durch die Atmosphäre verbrauchen. Die gesamte Energie E_0, die von den Primärteilchen der Höhenstrahlung in die Erdatmosphäre eingebracht wird, ist größer als die Energie E_1. Der Unterschied zwischen E_0 und E_1 wird dadurch hervorgerufen, daß ein Teil der Energie der Primärstrahlung nicht durch Ionisation, sondern auf andere Weise zerstreut wird. So werden z. B. die Höhenstrahlen, die die Erdoberfläche erreichen, vom Erdboden absorbiert; weiter entstehen als Ergebnisse des π- und μ-Mesonenzerfalls leichte neutrale Teilchen, die keine Ionisation hervorrufen, usw. Es ist also $E_0 > E_1$, man kann aber ohne einen großen Fehler zu begehen annehmen, daß die Größe E_1 bzw. die Fläche unter den Kurven A, B, C und D der Energie E_0, die von der Primärstrahlung in die Erdatmosphäre mitgebracht wird, proportional ist. Die von der Kurve D begrenzte Fläche macht zwei Fünftel derjenigen unter der Kurve A aus. Daraus folgt, daß etwa zwei Fünftel der Energie, die in 60° Breite von der Primärstrahlung mitgebracht wird, Teilchen zuzuordnen ist, die fähig sind, den Äquator (Breite 3°, Kurve D) zu erreichen, d. h. Teilchen, deren Impuls größer als $1{,}5 \cdot 10^{10}$ ist. Wir erwähnen noch, daß die ganze Energie, die der Erde in Form kosmischer Strahlung zugeführt wird, ungefähr gleich der Energie ist, die ihr von allen Sternen (außer der Sonne) als sichtbares Licht zugestrahlt wird. Das entspricht in unseren Breiten einer Leistung von etwa 4 W pro Quadratkilometer der Erdoberfläche.

Aus den erwähnten Daten, die die Existenz des Breiteneffekts der Höhenstrahlung beweisen (Abb. 424, 431), folgt, daß sich zwischen etwa 50° Breite und dem Pol die Intensität der Höhenstrahlung nur wenig ändert. Dies ist gut aus den Kurven der Abb. 431 ersichtlich. Während fast 15 Jahren versuchte man diesen experimentellen Befund durch die Annahme zu erklären, daß in der Primärstrahlung überhaupt keine Teilchen vorhanden sind, deren Impuls kleiner als der kritische Impuls $p \approx 3 \cdot 10^9$ eV/c für 50° Breite ist. Als Grund für den „Ausschluß" von Teilchen mit einem Impuls kleiner als $p = 3 \cdot 10^9$ eV/c aus dem Spektrum der Primärstrahlung wurde die Wirkung des Magnetfelds der Sonne, das sich weit über die Grenzen der Erdbahn hinaus erstreckt und eine Barriere für solche Teilchen darstellen sollte, angeführt. Genaue Messungen des Höhengangs des Breiteneffekts zwischen 49° und 88° N wurden 1949 ausgeführt. Die Ergebnisse dieser Messungen zeigen (siehe Abb. 425), daß bei einem Druck, der kleiner als 200 mm Hg ist, die Kurven des Höhengangs der Intensität der kosmischen Strahlung verschmelzen, ein Breiteneffekt also praktisch nicht vorhanden ist. Bei einem Druck, der größer als 200 mm Hg ist, verläuft jedoch die Kurve für 88° Breite oberhalb der für 49°, was auf die Existenz des Breiteneffekts für Teilchen hinweist, deren Impuls kleiner als $3 \cdot 10^9$ eV/c ist.

Damit hat sich also die Vermutung, daß die ablenkende Wirkung des Magnetfeldes der Sonne zu einem Fehlen von Teilchen mit Impulsen kleiner als $3 \cdot 10^9$ eV/c im Spektrum der auf die Erde einfallenden Höhenstrahlung führt, bei genaueren Untersuchungen als nicht zutreffend herausgestellt.

Es entsteht somit die Frage, wie das fast vollständige Fehlen eines Breiteneffekts in niedrigen Luftschichten für Breiten höher als 50° zu erklären ist. Die wahrscheinlichste Deutung, die zur Zeit gegeben werden kann, lautet, daß Sekundärteilchen, die von Primärteilchen mit Impulsen kleiner als $3 \cdot 10^9$ eV/c erzeugt werden, nicht bis in die unteren Atmosphärenschichten vordringen.

Die Untersuchung des Breiteneffekts ermöglichte somit:

1. die Feststellung, daß die primäre kosmische Strahlung elektrisch geladen ist und

2. die Bestimmung des Energiespektrums jenes Teils der Primärstrahlung, der einer Ablenkung durch das Magnetfeld der Erde unterliegt, sowie
3. die Bestimmung der Anzahl der Primärteilchen, deren Energie so groß ist, daß sie durch das Erdmagnetfeld nicht abgelenkt werden.

Die Antwort auf die Frage nach dem Vorzeichen der Ladung der Primärteilchen ergab sich aus dem Studium der sogenannten azimutalen Asymmetrie der Höhenstrahlung. Wir erwähnten schon, daß der Impuls eines Teilchens, das aus dem Weltraum in vertikaler Richtung auf die Erde fliegt, größer als $p_\varphi = 1{,}5 \cdot 10^{10} \cos^4 \varphi \; |Z| \; \mathrm{eV}/c$ sein muß, damit es in der geomagnetischen Breite φ auf die Erde gelangen kann. Der kritsche Impuls hängt im allgemeinen Falle jedoch nicht nur von der Breite des Beobachtungsortes ab, sondern auch von der Richtung, aus der das Teilchen die Erdoberfläche erreicht und außerdem bei gegebener Richtung auch noch vom Vorzeichen der Teilchenladung. So ist z. B. am Äquator für ein einfach positiv geladenes Primärteilchen, das in horizontaler Richtung aus Osten anfliegt, der kritische Impuls gleich 60 BeV/c [1]) und für ein negativ geladenes Teilchen aus derselben Richtung gleich 10 BeV/c. Für Teilchen, die sich vom Westen des Horizonts her bewegen, ist der Sachverhalt umgekehrt: Die positiv geladenen Teilchen besitzen einen kritischen Impuls von 10 BeV/c und die negativ geladenen einen solchen von 60 BeV/c.

Existiert für die Primärstrahlung eine Asymmetrie im Vorzeichen der Ladung, so ist klar, daß sich diese in einer hinsichtlich des Azimuts ungleichmäßigen Verteilung der Höhenstrahlung äußern muß. Überwiegen nämlich in der Primärstrahlung positiv geladene Teilchen, so werden aus der Westrichtung mehr Teilchen als aus der Ostrichtung einfallen. Daher kann die Frage nach dem Ladungsvorzeichen der Primärteilchen durch Intensitätsmessungen an der aus Ost und West kommenden Strahlung gelöst werden. Zu diesem Zweck wird ein Zählrohrteleskop abwechselnd auf den Ost- und den Westteil des Himmels gerichtet und die Intensitäten, die in beiden Stellungen vom Teleskop registriert werden, verglichen. Intensitätsgleichheit deutet darauf hin, daß in der primären Höhenstrahlung Teilchen beider Vorzeichen in gleicher Menge vorkommen. Ein Intensitätsüberschuß bei der von Westen einfallenden Strahlung würde auf ein Überwiegen positiv geladener Primärteilchen schließen lassen.

Die umfangreichsten Untersuchungen der Ost-West-Asymmetrie in großen Höhen wurden 1948 von S. N. Wernow und N. A. Dobrotin und Mitarbeitern, die den Gang des Ost-West-Effekts mit der Höhe in Nähe des geomagnetischen Äquators (6 — 10° S) untersuchten, angestellt. In Abb. 432 ist das Schema ihrer Versuche dargestellt: Ein Teleskop aus Geiger-Zählern, das sie mit Pilotballons aufsteigen ließen, war unter einem Winkel von 60° gegen die Vertikale, um die es sich drehen konnte, geneigt. Während der Dauer des Flugs fixierte sich das Teleskop abwechselnd in östlicher und westlicher Richtung. Die Einhaltung der gegebenen Richtung wurde mit einem Relais aus drei Photoelementen erreicht, die durch das Sonnenlicht ausgerichtet wurden. Wurde das Teleskop aus der vorgeschriebenen Richtung abgelenkt, so schaltete das Relais einen Elektromotor ein, der das Teleskop im Azimut drehte und die gegebene Richtung wiederherstellte. Mit Hilfe dieser Anordnung wurde die Gesamtintensität der Höhenstrahlung und die Intensität der harten Komponente in östlicher und westlicher Richtung gemessen. Ein Teil der erhaltenen Resultate ist in Abb. 432 wiedergegeben, wo auf der Ordinatenachse die vom Teleskop registrierte Gesamtintensität und auf der Abszissenachse der Druck am Ort der Messung in mm Hg sowie die entsprechende Höhe in km aufgetragen ist. Aus den Kurven ist zu sehen, daß in großen Höhen ein aus-

[1]) 1 BeV = 10^9 eV = 10^3 MeV = $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ erg.

geprägter Ost-West-Effekt vorhanden ist: Die Intensität der aus Osten einfallenden Höhenstrahlung beträgt etwa das Doppelte der Intensität in Westrichtung. Eine Analyse der erhaltenen Daten führte zu der Schlußfolgerung, daß mindestens 90 bis 95% aller geladenen Primärteilchen eine positive Ladung haben müssen.

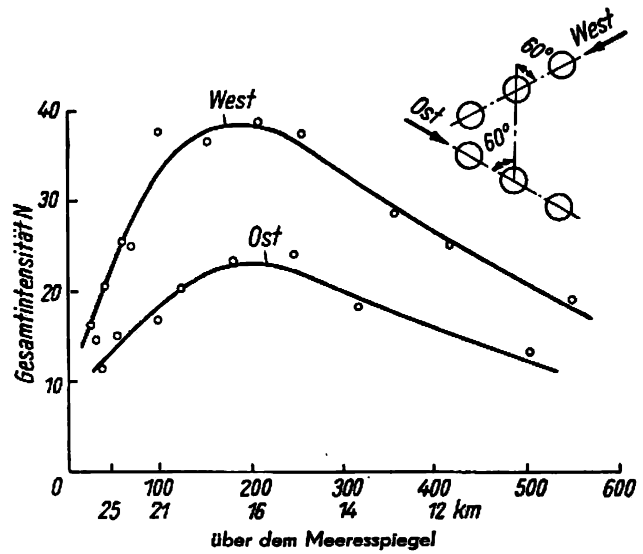


Abb. 432. Ost-West-Asymmetrie der Höhenstrahlung, in verschiedenen Höhen gemessen

Die direkte Analyse der Eigenschaften der primären Höhenstrahlung, die mit Hilfe von Geräten durchgeführt wurden, die man bis an die Grenze der Erdatmosphäre beförderte, führte zu dem Schluß, daß in der primären Höhenstrahlung keine Elektronen und Positronen mit großer Energie vorkommen. Ein wenig vorgreifend sei bemerkt, daß solche Teilchen, die eine zur Überwindung des Erdmagnetfelds ausreichende Energie besitzen, in einer Bleiplatte starke „Teilchenschauer", die aus einer großen Zahl sekundärer Elektronen und Positronen bestehen, auslösen müßten. Versuche zur Feststellung solcher Schauer wurden 1941 von M. Schein durchgeführt. Er ließ eine Anordnung aus Geiger-Zählern in Pilotballons aufsteigen, konnte aber derartige Schauer nicht nachweisen. Die Scheinschen Versuche schienen vielen nicht überzeugend genug. Deshalb führte in den Jahren 1946 bis 1947 S. N. Wernow eingehendere Untersuchungen durch. Diese ergaben, daß in großen Höhen (25 bis 30 km) Elektronen (±) und Photonen mit einer Energie größer als 10^9 eV nicht in merklicher Menge vorhanden sind. Daraus folgt, daß als positiv geladene Teilchen, die für die Ost-West-Asymmetrie verantwortlich sind, nur Protonen in Frage kommen. So wurde als Ergebnis der Analyse der geomagnetischen Effekte und der Erforschung der Eigenschaften der primären Höhenstrahlung die Hypothse der Protonennatur der Primärstrahlung vollauf bestätigt.

Der weitere Fortschritt in der Erforschung der primären kosmischen Strahlung beruht auf Messungen mit empfindlichen Photoplatten, die in die oberen Atmosphärenschichten (1948) befördert wurden. So konnte gezeigt werden, daß außer Protonen auch Kerne des Heliums

und anderer Elemente in der Primärstrahlung auftreten. Das Spektrum der aufgefundenen Kerne erstreckt sich bis $Z = 40 - 45$. Bemerkenswert ist, daß die kinetische Energie dieser Kerne proportional Z ist. Dies spricht anscheinend dafür, daß die von ihrer Elektronenhülle befreiten Kerne in den gleichen elektrischen Feldern beschleunigt wurden. Zu erwähnen ist ferner, daß die relative Häufigkeit der verschiedenen Kerne in der Höhenstrahlung dieselbe ist wie die relative Häufigkeit der Elemente im Kosmos: Aus dem Weltraum kommen etwa fünfmal weniger Heliumkerne als Protonen, während die Kerne Be, Li, B und F, deren relative Häufigkeit im All klein ist, auch in der Höhenstrahlung gänzlich fehlen. Die Gesamtmasse aller Kerne, die schwerer sind als Wasserstoff, ist in der Primärstrahlung etwa gleich der Masse, die der Protonenkomponente der Höhenstrahlung zukommt.

§ 318. Die Energieverluste bei der Ionisation

Alle experimentellen Methoden zur Beobachtung schneller, geladener Teilchen der Höhenstrahlung beruhen letzten Endes auf der ionisierenden Wirkung dieser Teilchen. Daher ist es notwendig, bevor wir zur Behandlung dieser Beobachtungsmethoden übergehen, uns einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Ionisation, die durch ein schnelles geladenes Teilchen erzeugt wird, von den Eigenschaften des Teilchens (seiner Geschwindigkeit, Ladung usw.) und denen des Mediums, in dem es sich bewegt, abhängt.

Die heute vorliegenden Untersuchungsergebnisse rechtfertigen die Annahme, daß die Energieverluste bei der Ionisation durch die Quantentheorie richtig beschrieben werden. Die Quantentheorie zeigt, daß die Energieverluste bei der Ionisation $-\left(\frac{dE}{dx}\right)_j$ in erster Näherung dem Quadrat der Ladung Z^2 des sich bewegenden Teilchens direkt proportional, dem Quadrat seiner Geschwindigkeit umgekehrt proportional und von der Teilchenmasse praktisch unabhängig sind. Die Abhängigkeit vom Medium, in dem sich das Teilchen bewegt, besteht darin, daß die Ionisation der Zahl der Elektronen in Kubikzentimeter des Mediums N proportional ist. Die Theorie liefert folgenden Ausdruck für den Energieverlust bei der Ionisation durch schnelle Teilchen:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_j = \frac{aZ^2N}{\beta^2}\left(\ln\frac{k\beta^2}{1-\beta^2} - 2\beta^2\right), \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right). \qquad (318,1)$$

In dieser Formel sind die Konstanten a und k durch das Medium, in dem sich das Teilchen bewegt, bestimmt, und hängen nicht von seiner Masse ab. Die Abhängigkeit der Energieverluste von der Geschwindigkeit und der Teilchenladung ist leicht zu verstehen. Wir erinnern uns daran, daß der Impuls p, der dem Elektron des Atoms von dem sich bewegenden, geladenen Teilchen erteilt wird, gleich dem Produkt aus der Kraft F, die zwischen dem Teilchen und dem Elektron wirkt, und der Zeit der gegenseitigen Wechselwirkung, d. h. der Zeit des Vorbeiflugs am Elektron, ist:

$$p = F \cdot t.$$

Hierin ist F die Coulombsche Wechselwirkungskraft, die proportional der Ladung Ze des Teilchens ist; die Wechselwirkungszeit t ist der Teilchengeschwindigkeit umgekehrt proportional. So ist also der dem Elektron vom fliegenden Teilchen übertragene Impuls

der Teilchenladung Z direkt und seiner Geschwindigkeit v umgekehrt proportional,

$$p \sim \frac{Z}{v};$$

die den Elektronen des Mediums vom Teilchen übergebene Energie wird dem Quadrat des Impulses und der Zahl der Elektronen in Kubikzentimeter proportional. Daraus ergibt sich, daß die Energieverluste bei der Ionisation in erster Näherung dem Quadrat der Ladung des sich bewegenden Teilchens proportional und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit umgekehrt proportional sind.

Die Kurven in Abb. 433 geben die Abhängigkeit des Energieverlusts bei der Ionisation vom Teilchenimpuls nach Formel (318,1) wieder. Auf der Abszissenachse ist der Teilchenimpuls in eV/c auf der Ordinatenachse die Zahl der Ionenpaare pro 1 cm Weglänge aufgetragen. Kurve 1 stellt diese Abhängigkeit für ein Elektron (m_e), Kurve 3 für ein Proton (1840 m_e) und Kurve 2 für ein Teilchen mit einer Masse von 200 Elektronenmassen (200 m_e) dar.

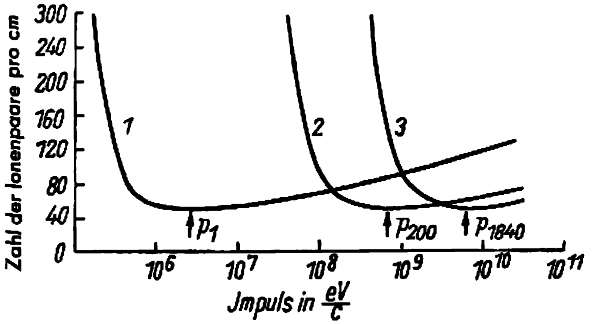


Abb. 433. Energieverluste bei der Ionisation in Abhängigkeit vom Teilchenimpuls für ein Elektron (m_e), ein Meson mit einer Masse von 200 m_e und ein Proton (1840 m_e)

Würden wir als Abszisse in Abb. 433 nicht den Impuls, sondern die Geschwindigkeit auftragen, so fielen diese drei Kurven zusammen, da die Energieverluste nach Formel (318,1) nur durch die Teilchengeschwindigkeit bestimmt sind. Daher sind auch die Kurven 1, 2 und 3 einander ähnlich. Die Kurven zeigen, daß sich bei einer Vergrößerung des Impulses die Verluste bei der Ionisation zunächst verringern. Diese Abnahme erfolgt nach einem $\frac{1}{v^2}$-Gesetz bis zu einer bestimmten Impulsgröße, die auf Abb. 433 durch p_1, p_{200} bzw. p_{1840} gekennzeichnet ist. Diese Werte entsprechen einer Teilchengeschwindigkeit, die 0,96 der Lichtgeschwindigkeit beträgt. Folgten die Energieverluste vollkommen dem $\frac{1}{v^2}$-Gesetz, so blieben bei größeren Teilchengeschwindigkeiten, also solchen, die der Lichtgeschwindigkeit noch näher kämen, die Verluste bei der Ionisation konstant. In Wirklichkeit aber findet, wie aus Abb. 433 hervorgeht, ein langsames (logarithmisches) Anwachsen des Energieverlusts mit dem Teilchenimpuls statt, das durch das logarithmische Glied in Formel (318,1) bedingt ist.

In Tabelle LXIX sind Werte für die Energieverluste bei Ionisation durch schnelle Teilchen für das Minimum der Kurve (d. h. durch relativistische Teilchen, deren Geschwindigkeit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegt) bei 1 cm Weglänge in verschiedenen Medien aufgeführt:

Tabelle LXIX

Medium	$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_i$ in eV/cm
Wasser	$2 \cdot 10^6$
Aluminium	$4{,}9 \cdot 10^6$
Blei	$1{,}1 \cdot 10^7$

Die Dicke der Erdatmosphäre ist hinsichtlich ihrer Absorptionsfähigkeit einer 10 m hohen Wasserschicht äquivalent. Da das Teilchen auf 1 cm im Wasser bei der Ionisation $2 \cdot 10^6$ eV Energie verliert (siehe Tabelle LXIX), so muß es über eine Energie, die nicht kleiner als $2 \cdot 10^9$ eV ist, verfügen, um die ganze Atmosphäre durchdringen zu können. Wir wissen, daß die Höhenstrahlung Bleischichten, die nach Metern messen, durchdringen kann. In jedem Meter Blei verliert ein schnelles Teilchen nur durch Ionisation $1{,}1 \cdot 10^9$ eV. Aus Abb. 427, in der die Absorptionskurve der kosmischen Teilchen für Wasser dargestellt ist, sehen wir, daß sogar unter einer Wasserschicht von 1000 m Dicke noch eine beträchtliche Anzahl Höhenstrahlungsteilchen zu beobachten sind. Um eine derartige Wasserschicht zu durchdringen, muß das Teilchen eine Energie von mindestens $2 \cdot 10^{11}$ eV besitzen. Diese Zahlen geben uns erneut eine Vorstellung von der Größe der Energie, über die die Primärteilchen der kosmischen Strahlung verfügen.

§ 319. Die Beobachtung schneller geladener Teilchen mit der Wilson-Kammer und der Photoplatte

In diesem Paragraphen wollen wir zwei Untersuchungsmethoden kennenlernen, die eine Beobachtung der Bahnen schneller geladener Teilchen und die Bestimmung ihres Impulses, ihrer Geschwindigkeit, Energie, Ladung und Masse ermöglichen: Das Wilson-Kammer-Verfahren und die Photoplattenmethode. Die Kenntnis dieser Methoden ist zum Verständnis der weiter unten beschriebenen Versuche unerläßlich.

Fast alle Erkenntnisse über die Natur der Höhenstrahlung wurden bis vor gar nicht langer Zeit mit Hilfe der Wilson-Kammer gewonnen. Da die Höhenstrahlung in vertikaler Richtung die größte Energie besitzt, wird zu ihrer Beobachtung die Kammer vertikal in einem starken, quer dazu liegenden Magnetfeld angeordnet (Methode von Skobelzin). D. W. Skobelzin (1929) war der erste, dem es gelang, die Bahnen der kosmischen Teilchen zu photographieren; das Magnetfeld erwies sich in seinen Versuchen jedoch als zu schwach, um eine Ablenkung dieser Teilchen hervorzurufen, so daß er das Vorzeichen ihrer Ladung nicht bestimmen konnte. In den darauffolgenden Versuchen wurden ausgedehnte und starke Magnetfelder bis zu 20000 Oersted benutzt. Unter diesen Bedingungen erhielt man eine große Anzahl von Teilchenspuren, die durch das Feld gekrümmt waren. Es war auffallend, daß diese Ablenkung nach beiden Seiten hin erfolgte; dadurch wurde klar, daß in der Höhenstrahlung negativ und positiv geladene Teilchen vorkommen. Letztere

wurden anfänglich für Protonen gehalten. In der Folge zeigte sich jedoch, daß es sich bei der Mehrzahl dieser Teilchen um Positronen und positiv geladene Mesonen handelt.

Die in einem Magnetfeld aufgestellte WILSON-Kammer war während langer Zeit die wichtigste Anordnung zur Bestimmung der Masse, der Ladung und der Energie der Teilchen, die in der Höhenstrahlung vorkommen, und zum Studium ihrer Wechselwirkung mit Substanzen. Daher wollen wir zunächst die Messungen betrachten, die mit der WILSON-Kammer erfolgen.

Es ist offensichtlich, daß man in der WILSON-Kammer direkt die folgenden drei Größen, die ein geladenes Teilchen charakterisieren, messen kann: Den Krümmungsradius ϱ seiner Bahn im Magnetfeld, die spezifische Ionisation d, die das Teilchen auf seinem Weg erzeugt, und die Teilchenreichweite R. Aus dem Krümmungsradius ϱ ist der Teilchenimpuls zu bestimmen, wenn die Feldstärke $\mathfrak{H}$ und die Teilchenladung e bekannt sind. Aus der Beziehung

$$\frac{e}{c} v \mathfrak{H} = \frac{mv^2}{\varrho}$$

folgt

$$mv = p = \frac{e}{c} \mathfrak{H}\varrho$$

und

$$pc = e\mathfrak{H}\varrho. \tag{319,1}$$

In dieser Formel ist pc in erg anzugeben, e in CGSE-Einheiten, $\mathfrak{H}$ in Oersted und ϱ in Zentimetern. Gibt man pc in Elektronenvolt an, e in Elementarladungen, $\mathfrak{H}$ und ϱ wie vordem in Oersted und Zentimetern, so erhält Formel (319,1) die folgende Form:

$$pc = 300e\mathfrak{H}\varrho. \tag{319,1'}$$

Ist die Energie des Teilchens sehr viel größer als seine Ruheenergie m_0c^2, so kann man in der relativistischen Beziehung zwischen Energie und Impuls $E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4$ das zweite Glied vernachlässigen, so daß

$$E = pc \tag{319,2}$$

ist.

Es folgt also aus der Größe $pc = 300\, e\mathfrak{H}\varrho$ für ein Teilchen, dessen Geschwindigkeit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegt („relativistische" Teilchen), unmittelbar seine Energie.

Eine andere Möglichkeit, die WILSON-Kammer zur Bestimmung der Geschwindigkeit eines schnellen geladenen Teilchens zu benutzen, besteht in der Untersuchung der durch dieses hervorgerufenen Ionisation. Da jedes Ion, das längs der Teilchenbahn entsteht, als Kondensationskern für den Dampf dient, mit dem die Kammer gefüllt ist, so ist die Dichte der Tröpfchen entlang der Bahn ein Maß für die Ionisationsfähigkeit des Teilchens. Unter der spezifischen Ionisation d versteht man die Zahl der Ionenpaare, die von einem geladenen Teilchen pro Weglängeneinheit gebildet werden. Um den Wert der spezifischen Ionisation zu erhalten, ist es infolgedessen notwendig, die Zahl der Tröpfchen längs der Teilchenbahn zu zählen. Teilen wir diese Zahl durch die Länge der beobachteten Teilchenspur, so erhalten wir einen Mittelwert für die Zahl der Ionen, die von dem Teilchen pro Einheit der Weglänge erzeugt wurden, d. h. also die spezifische Ionisation. Es ist bekannt, daß die Größe der Energie w, die im Mittel von einem schnellen geladenen Teilchen zur Erzeugung eines Ionenpaares aufgewendet wird, nicht von der Geschwindigkeit und der Art des ionisierenden

Teilchens abhängt. Daher ist die in der WILSON-Kammer gemessene spezifische Ionisation d proportional der Energie $\left(\frac{dE}{dx}\right)_j$, die das ionisierende Teilchen für die Ionisation pro Einheit seiner Weglänge verliert. Der Wert w ist für verschiedene Gase, die meistens zur Kammerfüllung benutzt werden, in Tabelle LXX angegeben.

Tabelle LXX
Mittelwert der Energie, die von einem Teilchen zur Erzeugung eines Ionenpaares aufgewendet wird (w in eV)

Gas	w	Gas	w
H_2	33,0	O_2	32,3
He	27,8	Ne	27,4
N_2	35,0	Ar	25,4

Um die Größe $\left(\frac{dE}{dx}\right)_j$ aus der Messung der spezifischen Ionisation in der WILSON-Kammer zu erhalten, ist die spezifische Ionisation d mit der Größe der Energie w, die zur Erzeugung eines Ionenpaares aufzuwenden ist, zu multiplizieren:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_j = -d \cdot w.$$

Kennt man den Energieverlust bei der Ionisation $\left(\frac{dE}{dx}\right)_j$, so kann man nach Formel (318,1), die $\left(\frac{dE}{dx}\right)_j$ mit der Teilchengeschwindigkeit verknüpft, letztere bestimmen.

Aus Abb. 433 ist ersichtlich, daß sich von dem Impuls $p = 10^9$ eV/c ab die Ionisation die durch Teilchen mit der Masse 200 m_e hervorgerufen wird, um nicht mehr als 15 bis 20% von derjenigen unterscheidet, die durch Elektronen oder Protonen mit demselben Impuls entsteht. Die Genauigkeit der Bestimmung der spezifischen Ionisation in der WILSON-Kammer bei gleichzeitiger Messung des Krümmungsradius geht auch nicht über 15 bis 20% hinaus, und es ist daher praktisch unmöglich, die von einem Elektron mit einem Impuls größer als 10^9 eV/c erzeugte Ionisation von der Ionisation durch ein Proton oder ein Teilchen geringerer Masse zu unterscheiden. Man kann also sagen, daß alle sehr schnellen Teilchen, deren Geschwindigkeit größer als 0,96 c ist, das Gas in der WILSON-Kammer praktisch in gleicher Weise ionisieren und daß somit die WILSON-Kammer-Methode zu ungenau für die Untersuchung der durch relativistische Teilchen verschiedener Masse erzeugten Ionisation ist. Mit abnehmender Teilchengeschwindigkeit jedoch wird die Situation günstiger, und aus Abb. 433 sehen wir, daß z. B. ein Proton, dessen Geschwindigkeit sich im Impulsbereich 10^8—10^9 eV/c schon beträchtlich von der Lichtgeschwindigkeit unterscheidet, eine Ionisation hervorruft, die viel größer als diejenige ist, welche durch Elektronen und Teilchen mit einer Masse von 200 m_e erzeugt wird, obwohl man in diesem Bereich noch nicht sicher die Ionisation durch diese Teilchen voneinander unterscheiden kann. Gehen wir zu dem Gebiet der Impulse über, die kleiner als 10^8 eV/c sind, so sehen wir, daß für solche Impulse die Ionisationen durch alle drei Teilchen in der WILSON-Kammer mit Sicherheit unterschieden werden können.

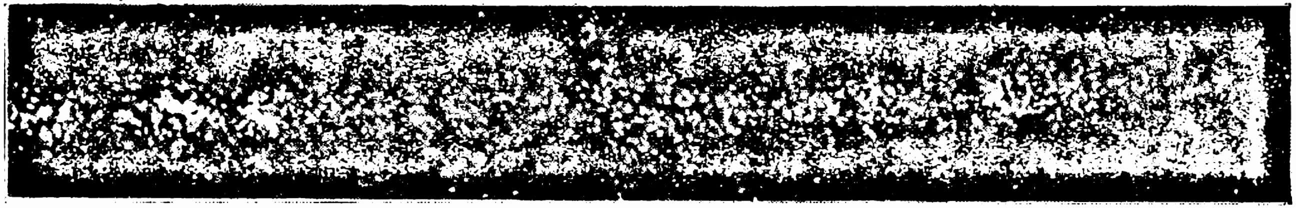


Abb. 434. Spur eines schnellen (relativistischen) Teilchens in der Wilson-Kammer

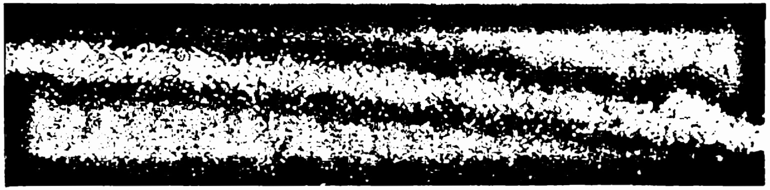


Abb. 435. Vergrößerte, in einer Wilson-Kammer im Magnetfeld photographierte Spur eines langsamen Mesons, die es ermöglicht, die Zahl der Ionenpaare zu zählen und den Krümmungsradius zu messen. Nach dieser Photographie kann die Masse des Teilchens abgeschätzt werden

Als Beispiel betrachten wir zwei Photographien vom Durchgang geladener Teilchen durch eine WILSON-Kammer (Abb. 434 und 435). Eine davon zeigt die typische Spur eines einfach geladenen, relativistischen Teilchens, dessen Ionisationsverluste nahe beim Minimum liegen. Auf der anderen Photographie ist die Spur eines langsamen und demzufolge stark ionisierenden Teilchens festgehalten worden: Die Tröpfchendichte ist in dieser Spur sechsmal so groß wie in der oberen Aufnahme. Da die spezifische Ionisation dem Quadrat der Teilchengeschwindigkeit umgekehrt proportional ist, folgt daraus, daß sich dieses Teilchen mit einer Geschwindigkeit von

$$v = \frac{c}{\sqrt{6}} \cong 0{,}4\, c$$

bewegt hat. Der Impuls des Teilchens hängt wie folgt von seiner Masse und Geschwindigkeit ab:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Danach kann man die Masse des Teilchens berechnen, wenn man aus der Größe der spezifischen Ionisation die Teilchengeschwindigkeit und aus der Ablenkung im Magnetfeld seinen Impuls bestimmt hat. Der aus der Photographie der Abb. 435 ermittelte Impuls des Teilchens ist gleich $4{,}5 \cdot 10^7$ eV/c. Die gemessenen Werte des Impulses und der Geschwindigkeit ergeben, wie man leicht sieht, für die Größe $m_0 c^2$ einen Wert, der etwa 10^8 eV beträgt, was einer Teilchenmasse von 200 Elektronenmassen entspricht. Somit ist das in Abb. 435 festgehaltene Teilchen als Meson identifiziert.

Leider ist es aus rein experimentellen Gründen unmöglich, gleichzeitig Teilchenimpuls und spezifische Ionisation mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Um den Krümmungsradius genau messen zu können, ist es wünschenswert, eine scharfe, nicht verwaschene Spur zu erhalten. Andererseits muß aber die Spur verwaschen sein, d. h., die Tröpfchen müssen sich in einem gewissen Abstand voneinander befinden, damit man eine einwandfreie Tröpfchenzählung vornehmen kann.

Außer dem Impuls und der spezifischen Ionisation kann man aus WILSON-Kammer-Untersuchungen die Reichweite R des Teilchens bestimmen. Wir wollen zeigen, daß die Werte des Impulses und der Reichweite ebenfalls eine Möglichkeit zur Bestimmung der Teilchenmasse bieten. Die Reichweite des Teilchens hängt von seiner Geschwindigkeit und seiner Masse ab. Um dies zu beweisen, beschränken wir unsere Betrachtung auf nicht zu schnelle Teilchen, für die $\frac{v}{c}$ merklich kleiner als 1 ist. Für solche Teilchen kann man das logarithmische Glied in dem Ausdruck (318,1) für den Energieverlust vernachlässigen und setzen

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_i = \frac{K}{v^2}, \tag{319,3}$$

wobei K eine von der Teilchenmasse unabhängige und nur durch die Eigenschaften des Mediums bestimmte Konstante ist. Die Gesamtreichweite ist gegeben durch

$$R = \int_0^R dx$$

oder, da nach (319,3)

$$dx = -\frac{v^2\,dE}{K} = -kv^2\,dE$$

$\left(k = \frac{1}{K}\right)$ ist, erhalten wir unter Beachtung, daß den Grenzen 0 und R die Energie E_0 und 0 entspricht,

$$R = k\int\limits_0^{E_0} v^2\,dE\,.$$

Da es sich um ein nichtrelativistisches Teilchen handelt, ist $E = \frac{1}{2}\,Mv^2$ und $dE = Mv\,dv$, und damit

$$R = kM\int\limits_0^{v_0} v^3\,dv = \frac{1}{4}\,kMv_0^4\,. \tag{319,4}$$

Die Reichweite des Teilchens hängt somit also von seiner Masse und seiner Geschwindigkeit ab. Bei gegebener Geschwindigkeit ist die Reichweite um so größer, je größer die Teilchenmasse ist. Daher erhält man bei Kenntnis des Impulses und der Reichweite des Teilchens zwei Gleichungen, aus denen man die Geschwindigkeit eliminieren und seine Masse bestimmen kann.

Diese zweite Methode zur Bestimmung der Teilchenmasse in der Wilson-Kammer ist um so genauer, je größer die Reichweite des Teilchens ist. Die Genauigkeit der Massenbestimmung nach dieser Methode ist dann am geringsten, wenn die Teilchenenergie so klein ist, daß die Reichweite in der Wilson-Kammer Platz findet. In diesem Falle entstellt die Streuung, die das Teilchen an den Kernen des Füllgases erleidet, die Bahnspur stark und führt zu beträchtlichen Fehlern bei der Bestimmung ihres Krümmungsradius. Um sich vom Einfluß der Streuung freizumachen, muß man bei der Massenbestimmung zu Teilchen mit wesentlicher größerer Energie übergehen, die nur wenig gestreut werden. Zur Bestimmung der Reichweite solcher Teilchen sind in der Wilson-Kammer eine möglichst große Anzahl Platten aus einer festen Substanz anzubringen, was zu einer Genauigkeit in der Reichweitebestimmung, die gleich der halben Dicke einer einzelnen Platte ist, führt.

Wie leicht zu sehen ist, ermöglicht die Kenntnis der spezifischen Ionisation d und der Reichweite R ebenfalls die Bestimmung der Teilchenmasse. Aus der spezifischen Ionisation folgt die Teilchengeschwindigkeit. Kennt man diese, so ergibt sich aus der Reichweiteformel (319,4) auch die Teilchenmasse. Diese Art der Massenbestimmung hat vor den beiden anderen beschriebenen den Vorteil, daß sie ohne ein Magnetfeld möglich ist. Sie wird häufig dann benutzt, wenn man die Massen von Teilchen aus Spuren bestimmt, die sie in photographischen Platten hinterlassen haben.

Heute findet neben der Wilson-Kammer die Methode der dickschichtigen Photoplatten eine weit verbreitete Anwendung. Das Wesen dieser Methode, die zuerst von L. W. Mysowski zur Registrierung langsamer Höhenstrahlenteilchen angewendet und dann von A. P. Shdanow weiter entwickelt wurde, ist früher (siehe § 252) dargelegt worden. Bis in die jüngste Zeit erwies sie sich jedoch nur als qualitative Methode. Dafür gab es zwei Gründe. Der erste war der, daß sich die Reichweite der Teilchen nur mit einer Genauigkeit, die durch

den mittleren Abstand zwischen den Silberhalogenidkriställchen gegeben war, bestimmen ließ. Dieser war in den verwendeten Platten ziemlich groß, so daß sich nur ungenaue Energiewerte bestimmen ließen. Die zweite Ursache lag in der unzureichenden Empfindlichkeit der Platten, die nur sehr langsame, stark ionisierende Teilchen zu erkennen gaben. Die Photoplattenmethode erfuhr erst in den letzten Jahren eine besondere Erweiterung, nachdem es gelang, außerordentlich empfindliche Schichten mit sehr feinem Bromsilberkorn und kleinen Abständen zwischen den Körnern herzustellen. Dies erlaubte erstens, die Photoplattenmethode zum Studium schneller Teilchen anzuwenden, deren Geschwindigkeit größer ist als die der α-Teilchen und Protonen (z. B. schneller Mesonen), und zweitens, Energiemessungen mit größter Genauigkeit durchzuführen. So ermöglichen z. B. heute Photoplatten, die Energie eines Protons von 10 bis 12 MeV mit einer Genauigkeit von 0,3% zu bestimmen. Wenn bis 1948 nach der Photoplattenmethode nur Spuren verhältnismäßig langsamer Teilchen (die Spuren von Mesonen waren beispielsweise nur bei kleineren Energien als 10 MeV sichtbar, die schnellen relativistischen und halbrelativistischen Teilchen hingegen wurden überhaupt nicht registriert) aufzufinden waren, so hat sich die Situation dank dem ununterbrochenen Fortschritt in der Technik der Herstellung und Entwicklung von Photoplatten grundlegend geändert. Die jetzt verwendeten Photoplatten ermöglichen nicht nur die Registrierung der Spuren relativistischer Teilchen, die eine minimale Ionisation hervorrufen, sondern ließen auch noch eine fünf- bis zehnmal geringere Ionisation erkennen.

Der Hauptvorteil der Photoplatten gegenüber der Wilson-Kammer besteht darin, daß diese eine immer wirksame Anordnung darstellen, während die Wilson-Kammer nur während eines Tausendstels des Zeitintervalls zwischen zwei Expansionen wirkt. Die Photoplatte hingegen kann über Wochen, ja Monate hinweg der Höhenstrahlung ausgesetzt werden und ist darum zur Beobachtung äußerst seltener Erscheinungen, die für die Höhenstrahlung charakteristisch sind, sehr gut geeignet.

Ähnlich wie die Anzahl der Tröpfchen in der Spur, die ein Teilchen in der Wilson-Kammer hinterläßt, als Maß seiner Geschwindigkeit dient, ist die Anzahl der entwickelten Bromsilberkörner pro Wegeinheit oder, anders ausgedrückt, der mittlere Abstand zwischen den Körnern in der Photoplatte, ein Maß für die Teilchengeschwindigkeit. Ein schnelles Teilchen ruft nur eine schwache Ionisation hervor, und daher ist längst nicht jedes Silberhalogenidkriställchen, das es auf seinem Wege streift, entwickelbar, während ein langsames und demzufolge stark ionisierendes Teilchen eine weitaus dichtere Spur hinterläßt.

Am Ende der Teilchenspur, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens geringer wird, ionisiert es stark, so daß die Teilchenspur in der Emulsion an ihrem Ende eine große Kornzahl pro Längeneinheit aufweist. So kann man die Bewegungsrichtung des Teilchens bestimmen, wenn es sich am Ende der Flugbahn in der Photoplatte befand.

In den Jahren 1947 bis 1949 wurde eine neue Methode zur Bestimmung des Impulses schneller Teilchen, die von der Photoplatte registriert werden, ausgearbeitet. Diese ist auf dem Studium der Streuung schneller Teilchen durch die elektrischen Felder der Atomkerne begründet. Auf Grund dieser Streuung zeigt die bei starker Vergrößerung betrachtete Spur eines schnellen Teilchens merkliche Abweichungen von einer Geraden. Durch Messung des mittleren Streuwinkels ist es möglich, die Größe $p\beta = \frac{p \cdot v}{c}$ für ein schnelles Teilchen zu bestimmen. Kennt man die Teilchengeschwindigkeit aus der gemessenen Korndichte, so kann man somit seinen Impuls bestimmen. Diese Methode zur Impulsbestimmung fand ungeachtet ihrer nicht allzu großen Genauigkeit weite Verbreitung.

§ 320. Die Entdeckung des Positrons

Wir haben die physikalischen Messungen, die mit der WILSON-Kammer und Photoplatten ausgeführt werden, behandelt. Im Folgenden werden wir viele Beispiele für die Anwendung der betrachteten Meßmethoden finden. Als erstes Beispiel betrachten wir die Entdeckung des Positrons, das von ANDERSON 1932 in der Höhenstrahlung gefunden wurde (siehe § 281). Wir sahen oben, daß schon die ersten Photographien von Spuren, die geladene Teilchen der Höhenstrahlung in der WILSON-Kammer hinterließen, darauf hindeuteten, daß in der Höhenstrahlung zu etwa gleichen Teilen positiv und negativ geladene Teilchen vorkommen. Da andere geladene Teilchen nicht bekannt waren, nahm man zunächst an, daß die negativ geladenen Teilchen Elektronen, die positiv geladenen Protonen seien. Bei genauerer Betrachtung der den positiv geladenen Teilchen zuzuschreibenden Spuren mußte man in der überwiegenden Zahl der Fälle feststellen, daß diese nicht von Protonen stammen können. Um uns das klar zu machen, sehen wir uns die von ANDERSON 1932 aufgenommene Photographie (Abb. 436) an. Auf ihr sind zwei Spuren zu erkennen, die aller Wahrscheinlichkeit nach einen gemeinsamen Ausgangspunkt besitzen. Die Teilchenspur, die nach links abgelenkt wird, gehört zu einem Elektron, dessen Energie 27 MeV beträgt. Fliegt das nach rechts abgelenkte Teilchen in derselben Richtung wie das Elektron, so muß es positiv geladen sein. Auf der Photographie ist zu erkennen, daß dieses Teilchen nur wenig durch das Magnetfeld abgelenkt wird, was auf einen großen Impuls zurückzuführen ist. Tatsächlich folgt aus der Messung des Krümmungsradius der Bahn für das nach rechts abgelenkte Teilchen ein Impuls von $p = 450$ MeV/c. Ein Proton mit einem solchen

Abb. 436. Magnetfeld von 12000 Oersted. Das Elektron mit der Energie von 27 MeV wird nach links abgelenkt, das Positron mit der Energie 450 MeV nach rechts. Beide Teilchen gehen anscheinend von einem Punkt aus

Impuls besäße jedoch eine Geschwindigkeit von $v = 0{,}45\,c$ und müßte daher viermal so stark wie das schnelle Elektron ionisieren. Man kann aber auch bei aufmerksamster Betrachtung der Aufnahme keinen Unterschied der von beiden Teilchen erzeugten spezifischen Ionisation entdecken. Daraus folgt, daß die Masse des positiv geladenen Teilchens wesentlich kleiner als die Protonenmasse sein muß.

Die zweite Photographie, die einen Beweis für die Existenz leichter, positiv geladener Teilchen darstellt, wurde von ANDERSON durch Anordnung von 6 mm dicken Bleiplatten in der WILSON-Kammer gewonnen. Auf Abb. 437 ist die dabei erhaltene Aufnahme vom

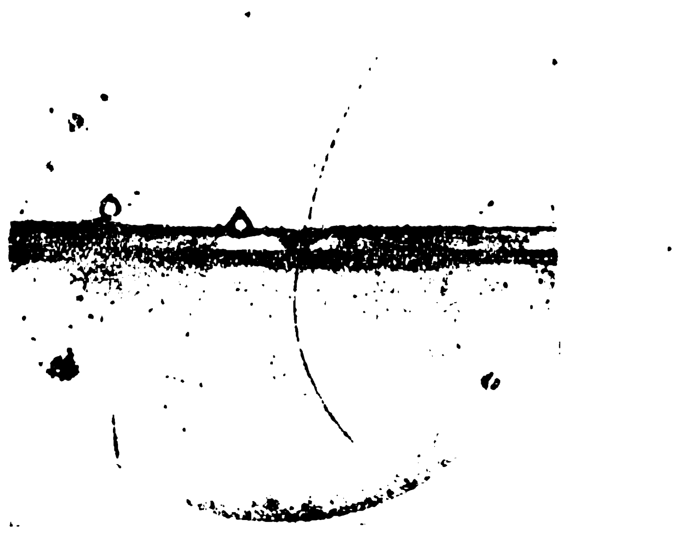


Abb. 437. Die Spur eines Positrons in der Wilson-Kammer, die in einem Magnetfeld aufgestellt war

Durchgang eines geladenen Teilchens durch die Platte wiedergegeben. Die Messung der Bahnkrümmung zeigt, daß der Impuls des Teilchens vor dem Eintritt in die Platte 63 MeV/c betrug. Beim Durchgang durch die Platte verlor das Teilchen einen beträchtlichen Teil seiner Energie, und sein Impuls betrug danach nur noch 23 MeV/c. Die abgebildete Photographie beantwortet eindeutig die Frage nach der Bewegungsrichtung des Teilchens in der Kammer; das Teilchen flog von oben nach unten und nicht umgekehrt, da der Durchgang des Teilchens durch die Bleischicht eine Abnahme seiner Energie verursachen muß. Die Richtung der Ablenkung des Teilchens entspricht einer positiven Ladung. Es ist unmöglich, diese Photographie mit der Annahme zu deuten, daß das Teilchen ein Proton ist. Im Gas der Kammer würde ein Proton mit dem Impuls $p = 63$ MeV/c eine Reichweite haben, die mindestens zehnmal geringer wäre als diejenige, die auf der Photographie zu sehen ist. Außerdem ist es nicht möglich, irgendwelche Unterschiede in der spezifischen Ionisation, die durch das Teilchen vor und nach dem Eintritt in die Platte erzeugt wird, zu entdecken. Dies deutet darauf hin, daß sich in beiden Fällen die Geschwindigkeit des Teilchens nicht wesentlich geändert hat, d. h., daß es sich um ein leichtes „relativistisches" Teilchen handelt.

Alle diese Beweise gaben zu der Vermutung Anlaß, daß die betrachtete Bahn einem Teilchen, das eine Masse nahe der Elektronenmasse und eine positive Ladung besitzt, d. h. also einem Positron zuzuschreiben ist. Die Eigenschaften des Positrons lernten wir schon früher (siehe §§ 281 bis 283) kennen.

§ 321. Schauer

Unter den sekundären Effekten, die beim Durchgang der Höhenstrahlung durch Substanzen ausgelöst werden, ist die sogenannte Schauerbildung am bemerkenswertesten. D. W. Skobelzin war der erste Physiker, der in den Jahren 1929 bis 1931 entdeckte, daß auf Wilson-Kammer-Photographien häufig mehrere kosmische Teilchen auf einmal erscheinen. Blackett und Occhialini photographierten 1932 unter Benutzung einer von zwei Zählrohren automatisch gesteuerten Wilson-Kammer Ströme, die aus 15 bis 20 Teilchen bestanden. Diese Ströme nannten sie Schauer. Durch die Anwendung einer gesteuerten Wilson-Kammer gelang es, ausgezeichnete Photographien solcher Schauer, von denen wir zwei Beispiele in den Abb. 438 und 439 wiedergeben, zu erhalten. Diese Abbildungen zeigen mit großer Deutlichkeit, daß die Schauer eine annähernd gleiche Anzahl von Positronen und Elektronen enthalten.

Abb. 438. Schauer aus 14 Teilchen

In den Jahren 1933 bis 1936 wurde von vielen Forschern die Erscheinung der Schauerbildung aufs Genaueste untersucht; es ergaben sich folgende Resultate:

1. Rund 80% aller Kammeraufnahmen enthalten Bahnen von einzelnen Teilchen, und auf 20% sind Teilchenschauer zu sehen.

2. Sowohl unter den einzelnen Teilchen als auch unter den in Schauern auftretenden sind positiv und negativ geladene Teilchen in etwa gleicher Anzahl vertreten.

3. Die Teilchen, die in den Schauern auftreten, lösen beim Durchgang durch Bleischichten, die in der Kammer angebracht sind, häufig neue Schauer aus (siehe Abb. 445).

4. Häufig wurde beobachtet, daß aus den in der Kammer angebrachten Bleiplatten Teilchenschauer austreten, während der Eintritt eines Teilchens in die Platte nicht festgestellt werden konnte. Offensichtlich gibt es in den Schauern eine nicht ionisierende Komponente, die ebenfalls Schauer auslöst (Abb. 439a).

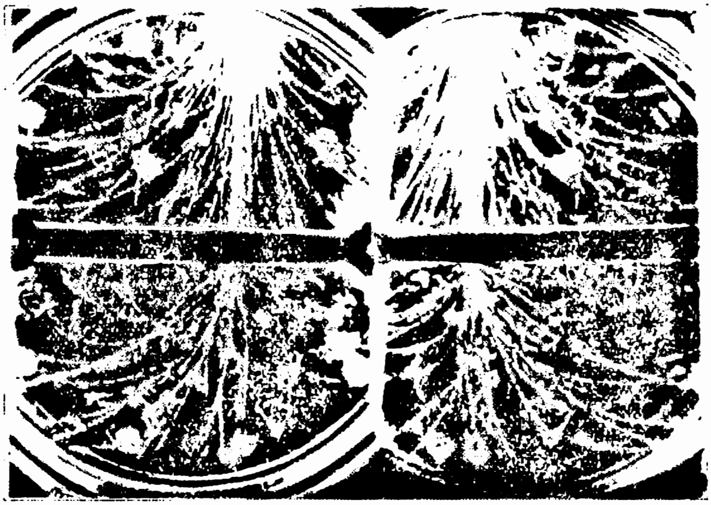


Abb. 439. Dichter Schauer energiereicher Elektronen, der in vertikaler Richtung auf eine 1 cm dicke Platinplatte fällt

Abb. 439a. Nichtionisierendes Teilchen, wahrscheinlich ein Photon (Spur über der Platte fehlt), das in der Platte einen aus 10 Elektronen bestehenden Schauer auslöst

Die Erscheinung der Schauer wurde seit 1933 unabhängig von der WILSON-Kammer-Methode auch mit GEIGER-MÜLLER-Zählrohren in Koinzidenzschaltung studiert.

Stellen wir uns vor, daß die Zählrohre 1, 2, 3 auf Abb. 440a oder 1, 2, 3, 4 auf Abb. 440b nach einem Koinzidenzschema geschaltet sind. Damit die Registrieranlage arbeitet, müssen durch diese Zähler gleichzeitig mindestens zwei bis drei verschiedene Teilchen hindurchgehen, wie es in Abb. 440b gezeigt wird. Ein derartiges System wird also einzelne Teilchen, die, wie oben erwähnt, rund 80% aller die WILSON-Kammer passierenden Teilchen betragen, nicht registrieren und nur auf Schauer von Höhenstrahlenteilchen ansprechen.

Man fand, daß die Anzahl der Koinzidenzen, die von einer derartigen „Schauer-Registriereinrichtung“ gezählt werden, anwächst, wenn man darüber immer größere Stoffschichten anbringt, durch ein Maximum geht und danach beim Übergang zu noch dickeren Schichten langsam abnimmt.

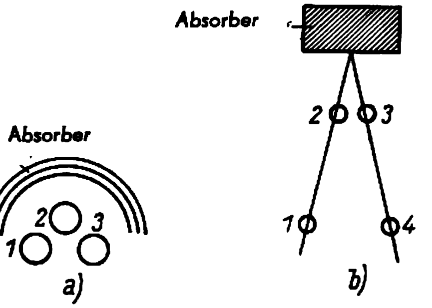


Abb. 440

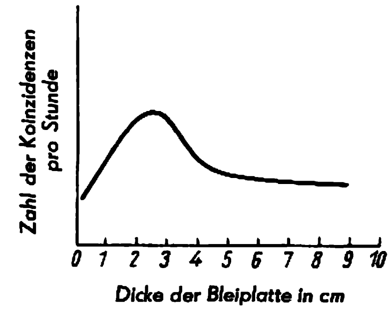


Abb. 441. ROSSI-Kurve

In Abb. 441 ist eine Kurve zu sehen, die die Abhängigkeit der von der „Schauer-Registriereinrichtung“ gezählten Koinzidenzen von der Dicke des Absorbers über dem Gerät wiedergibt. Diese typische Kurve trägt die Bezeichnung „Übergangskurve“ oder „ROSSI-Kurve“.

Wählt man als Absorbermaterial Blei, so liegt das Kurvenmaximum bei 2 cm Bleischicht, der starke Abfall bei 3 bis 5 cm. Danach fällt die Kurve sehr langsam. Die Betrachtung der ROSSI-Kurve führt zu dem Schluß, daß die Schauer, die unter den Stoffschichten zu beobachten sind, durch zwei Komponenten der Höhenstrahlung, die sich in ihren Eigenschaften stark unterscheiden, hervorgerufen werden. Der flache Teil der Kurve (der „Schwanz“) rührt von einer Strahlung her, in der Teilchen, die nur sehr schwach in Blei absorbiert werden, vorkommen (1 Meter Blei schwächt sie nur zur Hälfte), während der Anstieg, das Maximum und der schnelle Abfall der Kurve Teilchen zuzuschreiben ist, die stark in Blei absorbiert werden.

Weitere Schaueruntersuchungen mit Hilfe von Anlagen, ähnlich den in Abb. 440 skizzierten, dienten der Feststellung, wie sich die ROSSI-Kurve in Abhängigkeit von der Atomnummer des Absorbermaterials über den Zählrohren ändert. Es ist klar, daß der Abfall der Kurve bei geringen Stoffschichten über der Anlage proportional der Wahrscheinlichkeit sein wird, daß Schauer durch auf den Absorber auftreffende Primärteilchen ausgelöst werden. Derartige Messungen, die in vielen Laboratorien durchgeführt wurden, zeigten, daß

die Schauerbildungswahrscheinlichkeit am Anfang der Rossi-Kurve, berechnet auf 1 Atom des Absorbermaterials, dem Quadrat der Atomnummer des Stoffs Z^2, proportional ist.

Dies sind in großen Zügen die experimentellen Befunde zur Schauerbildung.

Der Mechanismus der Schauerauslösung, der eine ganz eigentümliche Erscheinung ist und kein Analogon in anderen Gebieten der Physik besitzt, war ziemlich lange ein Rätsel. Weiter unten wird gezeigt, daß alle Eigenschaften der Schauer durch die Kaskadentheorie der Schauer eine einfache Erklärung fanden. Wir müssen jedoch zunächst die Frage der Wechselwirkung schneller geladener Teilchen mit Substanzen etwas eingehender behandeln.

§ 322. Die Wechselwirkung schneller Teilchen mit Substanzen

Beim Durchgang durch Substanzen ionisieren schnelle geladene Teilchen die Atome des Stoffes. Aus Formel (318,1) folgt, daß die Größe der Energieverluste bei der Ionisation schnell mit zunehmender Teilchengeschwindigkeit abnimmt. Auf Abb. 442 ist die Kurve dieser Verluste als Funktion der Teilchengeschwindigkeit aufgetragen. Wir sehen, daß bei sehr großen Teilchenenergien die Energieverluste durch Ionisation ganz unwesentlich sind. Danach würde es den Anschein haben, daß sehr schnelle Elektronen (oder Positronen) ungeheuere Stoffschichten ohne merklichen Geschwindigkeitsverlust durchdringen könnten.

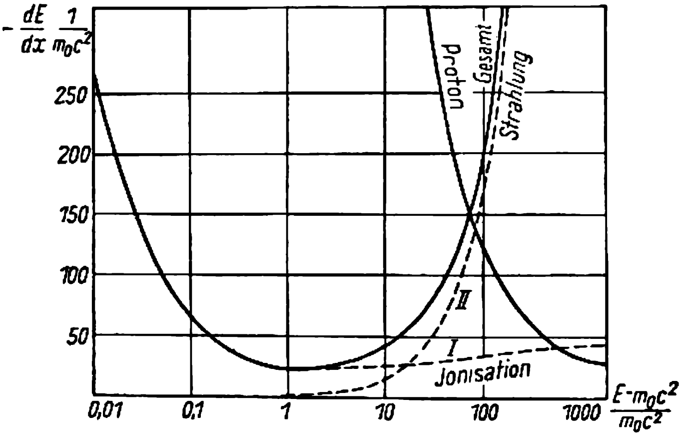


Abb. 442. Energieverluste durch Ionisation und Strahlung

Aus der Tabelle LXIX folgt, daß z. B. ein schnelles Teilchen, das sich in Blei bewegt, bei der Ionisation $1{,}1 \cdot 10^7$ eV pro Zentimeter Weglänge abgibt. Gäbe also ein schnelles Elektron nur durch Ionisation Energie ab, so hätte ein Elektron der Energie 10^9 eV eine Reichweite von etwa 90 cm in Blei. Es zeigt sich jedoch, daß es außer dem Energieverlust durch die Ionisation noch andere, weit größere Energieverluste für Elektronen gibt, die die Reichweite des Elektrons herabsetzen. Diese zusätzlichen Energieverluste führen in dem von uns betrachteten Beispiel eines Elektrons der Energie 10^9 eV dazu, daß seine Reichweite zehnmal geringer ist, so daß sie in Blei also nur 9 cm beträgt. Um uns über die Art dieses zusätzlichen Energieverlusts Klarheit zu verschaffen, stellen wir uns ein Elektron vor, daß mit sehr großer Geschwindigkeit das elektrische Feld eines Atomkerns der Ladung

$+Ze$ durchfliegt. Auf Grund der starken Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kern ändert das Elektron seine Geschwindigkeit, d. h., es erfährt eine gewisse Beschleunigung. Aus der Strahlungstheorie ist aber bekannt, daß eine beschleunigt bewegte Ladung Energie ausstrahlt. Daher beginnt das Elektron beim Durchfliegen der Substanz zu strahlen. Diese Erscheinung trägt die Bezeichnung Bremsstrahlung. Die Rechnung zeigt, daß

1. die Größe der ausgestrahlten Energie dem Quadrat der Atomnummer der Substanz, die das geladene Teilchen durchquert, proportional ist,

2. die ausgestrahlte Energie dem Quadrat der Masse des geladenen Teilchens umgekehrt proportional ist,

3. bei der Wechselwirkung des Elektrons mit einem Kern mit größter Wahrscheinlichkeit ein Photon entsteht.

Daraus folgt, daß schwere Teilchen durch Strahlung sehr wenig Energie verlieren [ein Proton z. B. $(1840)^2 = 34 \cdot 10^5$-mal weniger als ein Elektron]. Da die Energieverluste durch Strahlung Z^2 proportional sind, sind die Energieverluste in schweren Substanzen (z. B. Blei) weitaus größer als in leichten (Luft oder Aluminium). In Abb. 442 sind die Energieverluste

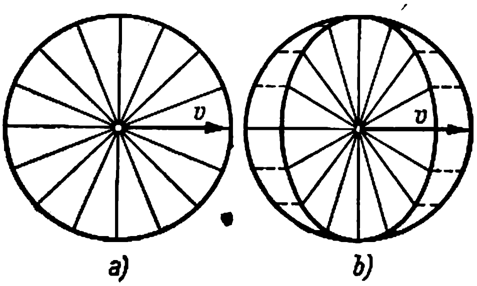


Abb. 443. Elektrisches Feld: a) einer ruhenden oder sich langsam bewegenden Ladung, b) einer sich schnell bewegenden Ladung

dargestellt, die ein Elektron in Blei erleidet. Wir sehen, daß bei kleinen Energien die Energieverluste durch Ionisation die vorherrschende Rolle spielen, während die Verluste durch Strahlung sehr klein bleiben, so daß sie gegenüber den ersteren vernachlässigt werden können. Bei einer bestimmten kritischen Energie jedoch, die für den betreffenden Stoff charakteristisch ist (für Blei z. B., für das in Abb. 442 die Kurven angegeben sind, beträgt die kritische Energie $E_k = 6{,}4$ MeV), schneiden sich die Kurven der Energieverluste durch Ionisation und durch Strahlung. Bei Energien, die über der kritischen liegen, beginnen die Energieverluste durch Strahlung die Hauptrolle zu spielen, und die Verluste durch Ionisation können vernachlässigt werden. Zum Vergleich ist auf derselben Abb. 442 die Energieverlustkurve eines Protons dargestellt.

Den Grund für das Anwachsen der Verluste durch Strahlung bei Annäherung der Elektronengeschwindigkeit an die Lichtgeschwindigkeit kann man sich qualitativ wie folgt klar machen. Ein ruhendes oder sich langsam bewegendes Elektron besitzt ein sphärisch symmetrisches elektrisches Feld. Die Kraftlinien verlaufen nach allen Richtungen in gleicher Dichte (Abb. 443a). Mit zunehmender Annäherung der Elektronengeschwindigkeit an die Lichtgeschwindigkeit erfolgt, wie in der Relativitätstheorie gezeigt wird, eine Deformation des Feldes. Es verdichtet sich, indem es sich vorzugsweise auf äquatoriale Bereiche konzentriert (Abb. 443b). Wir stellen uns jetzt vor, daß ein solches schnelles Elektron an einem

Kern + Ze vorbeifliegt (Abb. 444). Das Feld des Elektrons ist auf einen gewissen Bereich begrenzt, der um so schmaler ist, je weniger sich die Elektronengeschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit unterscheidet. Daher verringert sich die Zeit der Wechselwirkung mit dem Kern bei zunehmender Geschwindigkeit des Elektrons. Dabei bleibt, wie die Relativitätstheorie zeigt, der Kraftimpuls (d. h. das Produkt aus Kraft und Zeit), den das Elektron infolge dieser Wechselwirkung erlangt, unverändert. Die Kraft, die auf das Elektron wirkt, wächst also, und demzufolge nimmt die Beschleunigung zu. Aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung ist aber bekannt, daß die Ausstrahlung eines geladenen Teilchens dem Quadrat seiner Beschleunigung proportional ist (siehe Teil I, § 63). Darin liegt der Grund für das starke Anwachsen der Bremsstrahlung bei Vergrößerung der Elektronengeschwindigkeit.

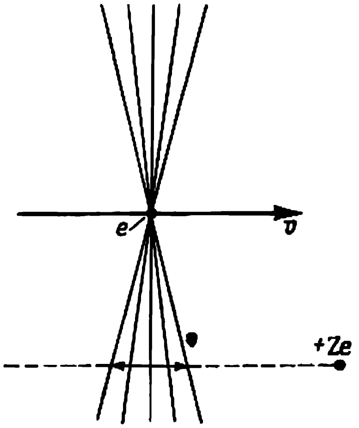


Abb. 444. Zur Wechselwirkung einer sich schnell bewegenden Ladung mit einem Kern

Die Bremsstrahlung führt dazu, daß sehr schnelle Elektronen in Substanzen stark zu strahlen beginnen, und somit schnell ihre Energie verlieren. Ein Elektron mit einer Energie von 10 MeV z. B. verliert in einer 4 mm dicken Bleiplatte die Hälfte seiner anfänglichen Energie. Daher können selbst sehr schnelle Elektronen dickere Stoffschichten nicht durchdringen.

Die Theorie zeigt, daß ein Elektron, das große Energie besitzt, bei einer Bremsung γ-Quanten ausstahlt, deren Energie von derselben Größenordnung ist, wie die des Elektrons selbst. Die Energie eines ausgestrahlten γ-Quants ist in grober Abschätzung etwa gleich der halben Energie des strahlenden Elektrons. Ferner fällt die Flugrichtung des Photons fast mit der des Elektrons zusammen, d. h., das γ-Quant wird vorwiegend nach vorn ausgestrahlt.

§ 323. Die Bildung von Kaskadenschauern

Wir betrachten jetzt ein in die Schicht irgendeiner Substanz eingedrungenes, sehr schnelles Elektron, mit einer Energie, die viel größer als die kritische ist. Aus dem oben Gesagten geht hervor, daß das Elektron dank der Wechselwirkung mit den Kernen der Substanz nach dem Durchlaufen einer bestimmten Weglänge unbedingt ein γ-Quant ausstrahlt, dessen Energie von der gleichen Größenordnung wie die des Elektrons ist und dessen Flugrichtung mit der des Elektrons nahezu zusammenfällt. Das ausgesandte γ-Quant besitzt

also eine Energie, die $2\ m_0c^2$ beträchtlich übersteigt, und wird daher bei seiner Bewegung durch die Substanz früher oder später unbedingt ein Elektron-Positron-Paar bilden (§ 283). Beide Teilchen des Paares werden eine Energie besitzen, die etwa gleich der halben Energie des γ-Quants ist, d. h. wieder eine Energie, die wesentlich größer als die kritische ist. Die Flugrichtungen des Elektrons und des Positrons sind fast dieselben wie die des Photons.

So erscheinen außer dem Elektron, das in die Substanz eindringt, als Ergebnis der beschriebenen Prozesse ein Elektron und ein Positron, die in derselben Richtung fliegen wie das erste Elektron, und eine große Energie besitzen, die um ein Vielfaches die kritische übertrifft. Da die Energie des Elektrons und Positrons noch sehr groß ist, strahlt jedes von ihnen je ein γ-Quant aus. Diese γ-Quanten erzeugen ihrerseits neue Paare usw. Wir sehen, daß auf diese Art so etwas wie eine Teilchenlawine entsteht, die sich annähernd in der Flugrichtung des ursprünglichen Elektrons entwickelt. Die Zahl der Teilchen in der Lawine muß schnell anwachsen und der Bruchteil der Energie, der auf ein Teilchen kommt, in den aufeinanderfolgenden Akten der Bremsstrahlungs-Emission und Paarbildung abnehmen.

Eine derartige Erscheinung ist die Schauerbildung. Die Gesamtheit aller so entstandenen Teilchen bildet einen sogenannten Kaskadenschauer. Da die Energie, die auf jedes Teilchen im Schauer entfällt (dabei wollen wir unter Teilchen auch Photonen verstehen), immer geringer wird, entstehen schließlich im Schauer Elektronen und Photonen mit einer Energie, die unter der kritischen liegt. Solche Elektronen werden praktisch nicht mehr strahlen, sondern die Energie durch Ionisation verlieren und letzten Endes abgebremst werden. Genauso werden auch die γ-Quanten, deren Energie unter der kritischen liegt, ihre Energie durch den Compton-Effekt verlieren und absorbiert werden. So hört im Lauf der Zeit die Bildung neuer Teilchen auf, die Lawine wächst nicht mehr an und wird schnell absorbiert.

Ganz analoge Kaskadenschauer müssen auch γ-Quanten von äußerst hohen Energien erzeugen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß die γ-Quanten im ersten Akt Paare bilden und die Teilchen des Paars ihrerseits Schauer. Die Zahl der Teilchen im Schauer hängt von der Anfangsenergie des einfallenden Teilchens und von der Dicke der durchquerten Schicht ab. Die Höchstzahl von Schauerteilchen wird offensichtlich dann vorhanden sein, wenn auf jedes Teilchen oder Photon eine Energie entfällt, die im Mittel gleich der kritischen ist. Diese Zahl kann aus dem Verhältnis $\frac{E_0}{E_k}$ abgeschätzt werden, worin E_0 die ursprüngliche Energie des einfallenden Teilchens und E_k die kritische Energie im jeweiligen Material ist (wir setzen voraus, daß $E_0 > E_k$ ist). Ist die Anfangsenergie des Teilchens hinreichend groß, so wird die Zahl der Teilchen im Schauer ebenfalls sehr groß sein, d. h. einige zehn oder sogar hundert Teilchen betragen.

Die Bildung von Kaskadenschauern hängt stark von der Substanz ab. Die Bremsstrahlung (und ebenso auch die Paarbildung, wie die Theorie zeigt) wächst mit zunehmender Atomnummer entsprechend Z^2. Außerdem ist die kritische Energie, bei der eine merkliche Bremsstrahlung eintritt, in schweren Stoffen wesentlich niedriger als in leichten (z. B. ist die kritische Energie in Blei gleich $6{,}4 \cdot 10^6$ eV, in Luft $7{,}2 \cdot 10^7$ eV). Daher muß die Schauerbildung in Blei bei kleineren Energien einsetzen als in Luft. Außerdem muß die mittlere Teilchenzahl eines Schauers in Blei größer sein als bei einem Schauer in Luft.

Stellen wir uns also vor, daß auf eine Bleiplatte, die im Innern einer Wilson-Kammer angebracht ist, ein Höhenstrahlenteilchen auftrifft. Dabei ist es gleichgültig, ob es sich um ein primäres oder sekundäres Teilchen handelt, wenn es nur über eine ausreichend große Energie zur Schauerbildung im Blei ($E \geqq 10^7$ eV) verfügt. Ein derartiges Teilchen löst einen

Schauer aus, und an Stelle des einen in das Blei eingetretenen fliegen mehrere Teilchen heraus. Alle Schauerteilchen entstehen auf einem verhältnismäßig kleinen Wegstück. Daher erscheint es dem Beobachter so, als ob alle diese Teilchen aus einem Punkt der Bleiplatte kommen.

Die ersten Schauer, die man 1933 beobachtete, wurden folgendermaßen gedeutet. Bis 1937 versuchten die Wissenschaftler, die Schauer als Ergebnis eines einzigen Akts gleichzeitiger Entstehung mehrerer Teilchen an einem bestimmten Ort der Substanz auszulegen. Eine solche Bildung mehrerer neuer Teilchen schien recht verwunderlich, da nach der Quantenmechanik eine gleichzeitige Entstehung mehrerer Teilchen (ähnlich wie die gleichzeitige Ausstrahlung mehrerer Photonen) ein überaus unwahrscheinliches Ereignis ist. Das häufige Auftreten von Schauern sah man daher als Beweis für die Unanwendbarkeit der Quantentheorie auf Teilchen mit so großen Energien an. Dieser Irrtum wurde durch die oben beschriebene Lawinentheorie der Schauer aufgeklärt, denn die stufenweise Entstehung von Schauerteilchen in Form einer Lawine geht unmittelbar aus der Quantenmechanik hervor.

Eine überzeugende Bestätigung der Richtigkeit der Lawinentheorie der Schauer, die ganz anschaulich zeigt, daß ein Schauer nicht aus einem Akt hervorgeht, sondern stufenweise zustande kommt, bilden Photographien, die in der WILSON-Kammer, in der nicht wie üblich nur eine Bleischicht, sondern mehrere untereinander angebracht sind, aufgenommen wurden. Kosmische Teilchen, die durch alle Platten hindurchtreten, ergeben ein typisches Bild der Kaskadenschauer, so wie es auf Abb. 445 wiedergegeben ist. Hier vervierfacht sich das von oben einfallende Teilchen in der ersten Platte (Dicke: 6 mm), dann vervierfacht es sich wieder in der zweiten (dieselbe Dicke). Die aus der zweiten Platte austretenden 16 Teilchen werden danach in der dritten Platte (0,7 mm) nur etwas gestreut. Diese sukzessive Vergrößerung der Teilchenzahl entspricht ganz der Kaskadentheorie, wenn man für das erste Teilchen eine Energie von etwa $2 \cdot 10^9$ eV annimmt.

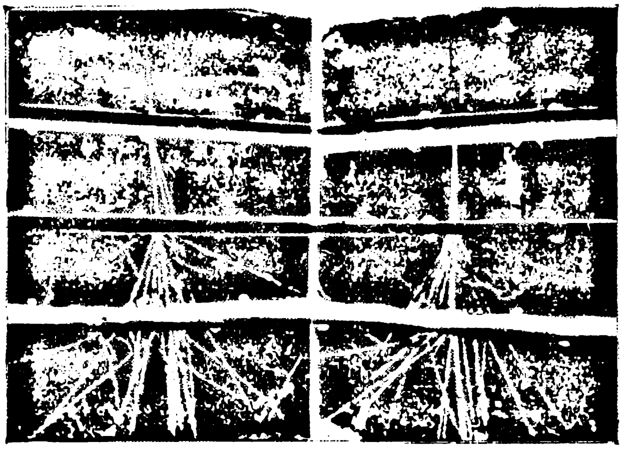


Abb. 445. Bildung eines Kaskadenschauers

Die Zahl der Teilchen im Schauer hängt, wie wir schon sagten, von der Anfangsenergie des lawinenbildenden Teilchens ab.

In Abb. 446 sehen wir eine Photographie von der Entwicklung eines kleinen Kaskadenschauers. Diese Photographie ist dadurch interessant, daß im Zwischenraum zwischen der ersten und der zweiten Platte (von oben) keine Spur eines ionisierenden Teilchens zu sehen ist. Das bedeutet, daß diesen Zwischenraum ein γ-Quant, das durch Bremsung in der oberen Platte entstanden ist, durchquert hat.

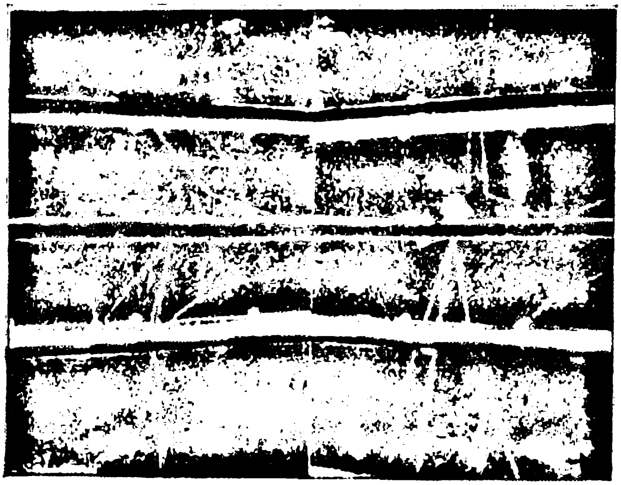


Abb. 446. Ausbildung eines kleinen Kaskadenschauers

Wir sehen, daß der anfänglich so rätselhafte Prozeß der Bildung von Kaskadenschauern eine einfache und erschöpfende Deutung gefunden hat. Die experimentelle und theoretische Erforschung dieser Schauer ermöglichte die Entwicklung der Kaskadentheorie vom Durchgang schneller geladener Teilchen und γ-Quanten durch Substanzen. Diese Theorie spielte eine große Rolle für das Verständnis der Eigenschaften der Höhenstrahlung. Sie erklärte das Verhalten des Hauptteils der weichen Komponente und erlaubte experimentell alle Erscheinungen, die mit der Wechselwirkung der Höhenstrahlung mit den elektrischen Feldern der Atomkerne und Atomhüllen verbunden sind, von spezifischen Kernprozessen, auf welche sich später die Aufmerksamkeit der Wissenschaftler konzentrierte, zu trennen. Zu der theoretischen Erforschung der Kaskadenschauer trugen die Arbeiten von L. D. Landau, J. E. Tamm und S. S. Belenki wesentlich bei.

§ 324. Die weiche und die harte Komponente

Nach den Darlegungen der vorangehenden Paragraphen müssen die Elektronen, Positronen und harten γ-Quanten der Höhenstrahlung Schauer auslösen und schnell absorbiert werden, wenn sie auf Blei fallen. Bestände die Höhenstrahlung nur aus solchen Teilchen, so müßte sie bei Teilchenenergien von etwa $3 \cdot 10^9$ eV (ihrer mittleren Energie in Meereshöhe) in einer Bleischicht von der Dicke einiger Dezimeter fast vollständig absorbiert werden. Wir wissen aber schon, daß dies nicht der Fall ist: Die Höhenstrahlung besteht aus zwei Komponenten, einer weichen und einer harten. Die weiche Komponente wird tatsächlich in einer

10 bis 15 cm dicken Bleischicht fast ganz absorbiert, die harte dagegen besitzt ein sehr großes Durchdringungsvermögen.

Die Frage des Intensitätsverhältnisses zwischen der harten und der weichen Komponente in verschiedenen Höhen wurde bereits in § 316 behandelt. Wir zeigten, daß in Meereshöhe die weiche Komponente rund ein Drittel der Höhenstrahlung ausmacht. Weiter sahen wir in § 321, daß etwa 20% aller geladenen Teilchen, die auf Meeresniveau in der WILSON-Kammer registriert werden, Schauer erzeugen und in 10 bis 15 cm Blei absorbiert werden. Daher kann man den Schauer auslösenden Teil der Höhenstrahlung, wenigstens in Meereshöhe, mit der weichen Komponente identifizieren. Die Richtigkeit dieses Schlusses wird auch durch die Messung der Absorption der Höhenstrahlung in leichten und schweren Stoffen bestätigt.

In § 322 wurde gezeigt, daß Elektronen und Positronen großer Energie durch Zusammenstöße mit den Kernen des Stoffs schnell ihre Energie durch Strahlung verlieren. Harte γ-Quanten bilden im Feld des Kerns mit großer Wahrscheinlichkeit Paare, die aus einem Elektron und einem Positron bestehen. Beide Prozesse führen zur Aufteilung der großen Energie des primären Elektrons oder γ-Quants auf eine große Zahl sekundärer Teilchen, Elektronen, Positronen und γ-Quanten, die den Schauer bilden. Der Wirkungsquerschnitt ist für beide Prozesse, die Paarbildung und die Bremsstrahlung, bezogen auf ein Atom, proportional Z^2.

In § 318 betrachteten wir eine andere Form der Wechselwirkung schneller Teilchen mit Substanzen: Die Ionisation der Atome des Mediums. Wir zeigten, daß die Energieverluste durch Ionisation, bezogen auf ein Atom, der Zahl der Elektronen in der Atomhülle, d. h. also Z proportional sind.

So würde die Feststellung der Abhängigkeit der Absorptionskoeffizienten für die weiche und die harte Komponente von der Atomnummer des absorbierenden Elements ermöglichen, den Charakter der Wechselwirkung beider Komponenten mit Substanzen und damit die physikalische Natur der Teilchen, die diese Komponenten bilden, aufzufinden. Derartige Messungen wurden mit großer Sorgfalt durchgeführt. Sie ergaben, daß die weiche Komponente weitaus stärker in schweren Elementen absorbiert wird als in leichten. Bei gleicher Zahl von Atomen in der absorbierenden Schicht ist die Absorption der weichen Komponente proportional Z^2. Wir sehen also, daß die weiche Komponente in leichten und schweren Elementen nach dem gleichen Gesetz wie schnelle Elektronen absorbiert wird. Daraus können wir schließen, daß die weiche Komponente aus schnellen Elektronen und Positronen besteht. Eine ganz andere Abhängigkeit von der Atomnummer Z des absorbierenden Elements zeigt der Absorptionskoeffizient der harten Komponente. Die Absorption der harten Komponente hängt nur von der Zahl der Elektronen in der absorbierenden Schicht ab: Zwei Elemente mit verschiedenem Z absorbieren die harte Komponente der Höhenstrahlung in gleicher Weise, wenn die Zahl der Elektronen in beiden absorbierenden Schichten gleich ist. Das heißt, im Unterschied zur weichen Komponente verliert die harte Komponente beim Durchgang durch Substanzen ihrer Energie hauptsächlich nur durch Ionisation der Atome des Stoffs.

Die Frage nach der Natur der Teilchen, die die harte Komponente bilden, war bis 1936/1937 ungeklärt. Dann konnte nach sehr exakten Untersuchungen der Teilcheneigenschaften der harten Komponente gezeigt werden, daß die harte Komponente aus einer neuen Art von Elementarteilchen bestehen muß, die bis zu dieser Zeit unbekannt war. Diese Teilchen wurden später Mesotronen oder Mesonen genannt.

§ 325. Die Mesonen

In den Paragraphen 246 und 250 sahen wir, daß die Existenz von Mesonen, d. h. von Teilchen mit einer Masse zwischen der Elektronen- und Protonenmasse, von YUKAWA vorausgesagt wurde. Experimentell wurde die Existenz derartiger Teilchen 1936 von ANDERSON und NEDDERMEYER durch systematische Untersuchung der Energieverluste der kosmischen Teilchen beim Durchgang durch Substanzen festgestellt. Zu diesem Zweck brachten sie in der WILSON-Kammer eine Platte stark absorbierender Substanz (Blei oder Platin) an und maßen die Krümmung der Teilchenspur vor und nach dem Durchgang durch die Platte. Kannten sie den Krümmungsradius ϱ und die Feldstärke H, so war aus der Beziehung $pc = 300\, eH\varrho$ (siehe § 319) der Impuls p und damit die Teilchenenergie bekannt.

Diese Messungen zeigten, daß man in voller Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Analyse der Absorptionskurve für die Höhenstrahlung alle Teilchen, welche die Platte durchquerten, in zwei Gruppen einteilen kann, deren Eigenschaften denen der weichen und der harten Komponente analog sind. Die Teilchen der ersten Gruppe erleiden, wie zu erwarten war, bei ihrem Durchgang durch die Platte große Energieverluste. Nach ihrem Austritt aus der Platte sind die Bahnen einiger der Teilchen dieser Gruppe durch das Magnetfeld nach der Seite abgelenkt, die einer negativen Ladung entspricht, die andere nach der entgegengesetzten Seite, was auf eine positive Ladung schließen läßt.

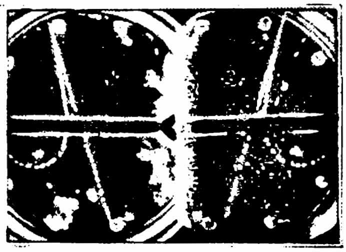


Abb. 447. Ein kosmisches Teilchen erlitt beim Durchgang durch eine 1 cm dicke Platinplatte einen großen Energieverlust. (Daneben ist die Spur eines Teilchens zu sehen, das beim Durchgang durch dieselbe Schicht fast keine Energie verloren hat)

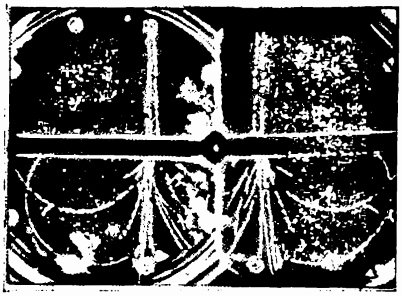


Abb. 448
Stark absorbierte Teilchen erzeugen Schauer in Platin

In Abb. 447 sehen wir als Beispiel die Spur eines solchen Teilchens. Es handelt sich hier um ein positiv geladenes Teilchen mit einer Energie von $1{,}9 \cdot 10^8$ eV, das beim Durchgang durch eine 1 cm starke Platinschicht den größten Teil seiner Energie verliert und mit einer Energie von $5 \cdot 10^6$ eV austritt. Daher ist seine Bahn stark durch das Magnetfeld gekrümmt. Unter geeigneten Bedingungen (ausreichende Anfangsenergie und passende Schichtdicke) bilden solche stark absorbierten Teilchen den Anfang von Schauern. Abb. 448 ist als Beispiel dafür anzusehen. Es ist darauf eine Gruppe von drei Schauerteilchen mit Energien größer als je $5 \cdot 10^8$ eV zu erkennen. Beim Durchgang durch die Platinplatte lösen diese Teilchen einen Schauer aus Elektronen und Positronen aus. Ein derartiges Verhalten der Teilchen der ersten Gruppe läßt zu, sie als Elektronen und Positronen, die sehr viel Energie durch

Strahlung beim Durchgang durch Substanzen verlieren müssen und Schauer hervorrufen, zu deuten.

Somit ergaben die Untersuchungen, daß in der ersten Gruppe genau dieselben Teilchen vertreten sind, die auch die weiche Komponente der Absorptionskurve bilden. Die Teilchen dieser Gruppe sind, wenn man sie in einer auf Schauer ansprechenden Anlage registriert, für den Anstieg, das Maximum und den scharfen Abfall der Rossi-Kurve verantwortlich.

Die zweite Gruppe, die ebenfalls Teilchen beiderlei Vorzeichens enthält, zeigte beim Durchgang durch eine Platte keinen merklichen Energieverlust, so daß sich die Krümmungen ihrer Bahnen nach dem Austritt aus der Platte gar nicht geändert hatten. Diese Teilchengruppe stellt offensichtlich die harte Komponente der Höhenstrahlung mit einem kleinen Absorptionskoeffizienten, von der oben die Rede war, dar.

Abb. 449. Beispiel eines schwach absorbierten kosmischen Teilchens. Das Teilchen mit einer Energie von $1{,}8 \cdot 10^8$ eV verliert beim Durchgang durch eine 1 cm starke Platinschicht nur ein Drittel seiner Energie

Auf Abb. 449 ist die Spur eines solchen Teilchens zu sehen. Dieses Teilchen besaß bis zu seinem Eintritt in die 1 cm dicke Platinschicht eine Energie von $1{,}8 \cdot 10^8$ eV, nach seinem Austritt nur noch $1{,}2 \cdot 10^8$ eV, d. h., es verlor ein Drittel seiner Energie beim Durchgang durch die dicke, gewöhnliche Elektronen stark absorbierende Schicht. Außerdem zeigt der Vergleich mit den vorigen Photographien, daß seine Spur dichter ist, als es bei einem gewöhnlichen Elektron der Fall ist, aber dünner als bei einem Proton.

Ein anderes Beispiel ist auf Abb. 450 wiedergegeben. Hier ist die Bahn eines Teilchens photographiert, das nach dem Durchgang durch eine dicke Bleiplatte überhaupt keine Ablenkung aufweist, obwohl sich die Wilson-Kammer in einem Magnetfeld befand.

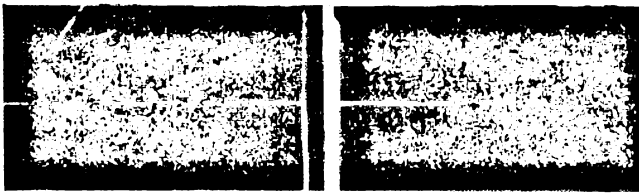


Abb. 450. Ein weiteres Beispiel für ein schwach absorbiertes Teilchen: Das Teilchen hat nach seinem Durchgang durch eine dicke Bleischicht keinen feststellbaren Geschwindigkeitsverlust erlitten

Wir sehen, daß zwei verschiedene Untersuchungsmethoden, das Studium der Absorption der Höhenstrahlen mit Hilfe eines Systems aus GEIGER-MÜLLER-Zählern und das Studium des Energieverlusts, den einzelne Teilchen beim Durchgang durch in einer WILSON-Kammer angeordnete Stoffschichten erleiden, in vollständiger Übereinstimmung zur Feststellung von zwei Komponenten der Höhenstrahlung, einer weichen und einer harten, führten. Die Natur der weichen Komponente ist geklärt; es sind schnelle Elektronen, Positronen und γ-Quanten. Sie lösen bei ihrer Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld von Atomkernen Schauer aus.

Was können wir nun über die Teilchen sagen, die die harte Komponente bilden? Wir wissen vorläufig nur, daß sie eine große Energie besitzen und ihre Energie hauptsächlich durch Ionisation verlieren. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik müssen jedoch alle leichten Teilchen (Elektronen und Positronen) beim Durchgang durch Substanzen mit hoher Atomnummer einen großen Teil ihrer Energie als Strahlung abgeben. Daher kann man auf Grund des Verhaltens der Teilchen der zweiten Gruppe zwei Annahmen machen:

1. Die Gesetze der Quantenmechanik sind aus irgendwelchen Gründen auf Teilchen mit hohen Energien, wie sie in der Höhenstrahlung vorkommen, nicht anwendbar, und

2. die Teilchen der zweiten Gruppe, die die harte Komponente der Höhenstrahlung bilden, sind keine Elektronen und Positronen, sondern irgendwelche anderen Teilchen mit größerer Masse. Da die Wahrscheinlichkeit des Energieverlusts durch Strahlung dem Quadrat der Teilchenmasse umgekehrt proportional ist, strahlen schwere Teilchen (z. B. Protonen) praktisch nicht.

Die erste dieser Annahmen ist als in direktem Widerspruch zum Experiment stehend zu verwerfen, ganz abgesehen von den mit ihr verbundenen prinzipiellen Schwierigkeiten. Wir haben in den Paragraphen 322 und 323 gesehen, daß die Quantenmechanik auf jeden Fall für Teilchen mit Energien in der Größenordnung von $10^9 - 10^{10}$ eV, die die gewöhnlichen Kaskadenschauer bilden, Gültigkeit besitzt. Energiemessungen an Teilchen der zweiten Gruppe zeigten, daß ihre mittlere Energie in Meereshöhe $\sim 3 \cdot 10^9$ eV beträgt. Zur zweiten Annahme ist zu sagen, daß die Hypothese nahe liegt, die Teilchen dieser Gruppe als Protonen zu betrachten. Ganz abgesehen aber davon, daß Protonen positiv geladen sind, in der zweiten Gruppe aber positiv und negativ geladene Teilchen in etwa gleicher Anzahl vorkommen, müßten Protonen mit einer Energie, die kleiner als 10^9 eV ist, auf Grund ihrer großen Masse eine wesentlich stärkere Ionisation hervorrufen als die, welche der Dichte der in der WILSON-Kammer beobachteten Spuren von Teilchen der durchdringenden Gruppe entspricht. Messungen der Spuren der durchdringenden Teilchen zeigten, daß sie von einer Ionisation herrühren, die zwischen der eines Protons und der eines Elektrons liegt.

Mißt man Ionisation, Reichweite und Impuls der durchdringenden Teilchen in der WILSON-Kammer, so kann man, wie dies ausführlich in § 319 gezeigt wurde, ihre Masse abschätzen, wenn man zwei beliebige dieser drei Größen kennt. Es zeigte sich, daß die meisten der Teilchen der durchdringenden Komponente eine Masse besitzen, deren Größe zwischen der Elektronen- und Protonenmasse liegt. Die genauesten Messungen der letzten Jahre ergaben für die Masse dieser Teilchen etwa 200 Elektronenmassen.

So erwiesen sich also die Teilchen der durchdringenden Gruppe als eine ganz neue Teilchenart, die bis dahin bei keiner der bekannten Naturerscheinungen beobachtet worden war. Diese neuen Teilchen wurden Mesonen genannt. Die Mesonenladung ist gleich der eines Elektrons.

Weitere Forschungen deckten eine ganze Familie von Mesonen mit verschiedenen Massen und Eigenschaften in der Höhenstrahlung auf. Seit 1948 heißen die Mesonen mit einer Masse von rund 200 m_e, die den Hauptteil der harten Komponente der Höhenstrahlung bilden, *μ-Mesonen*, um sie von den anderen Mesonenarten zu unterscheiden.

§ 326. Die Eigenschaften der μ-Mesonen

a) *Die Masse des μ-Mesons.*

Die ersten Massenbestimmungen für μ-Mesonen wurden an langsamen Mesonen, die im Füllgas der WILSON-Kammer gebremst werden, angestellt. Es wurde schon auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die auftreten, wenn man versucht, die Masse des Mensons mit der WILSON-Kammer-Methode zu bestimmen.

Bei allen Arten der Massenbestimmung (siehe § 319) muß man zwei der folgenden drei Größen kennen: Impuls, spezifische Ionisation und Reichweite. Die Messung der beiden ersten Größen für ein langsames Teilchen ist mit großen Schwierigkeiten verbunden. Ein langsames Teilchen wird stark an den Atomkernen des Füllgases gestreut. Daher unterscheidet sich der auf der Photographie gemessene Krümmungsradius seiner Bahn wesentlich vom Radius der Bahn, die es im luftleeren Raum beschreiben würde. Die von einem langsamen, d. h. stark ionisierenden Teilchen längs seiner Bahn hervorgerufene Ionisation mehr oder weniger genau zu bestimmen, ist ebenfalls äußerst schwierig. Daher ist die von vielen Wissenschaftlern durchgeführte Massenbestimmung für langsame Mesonen mehr als eine rohe Schätzung und weniger als genaue physikalische Messung anzusehen. Nach dieser Schätzung liegt die Mesonenmasse (in Meereshöhe gemessen) zwischen 100 und 400 Elektronenmassen.

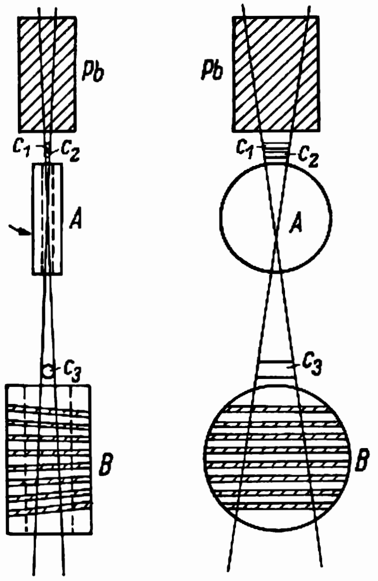


Abb. 451

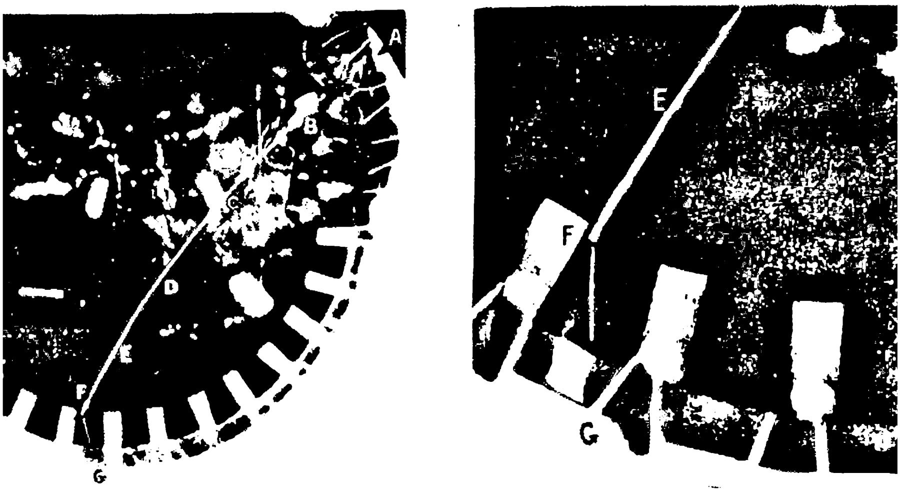
Um mit der WILSON-Kammer die Mesonenmasse genau bestimmen zu können, muß ı
ir die Messungen schnelle Mesonen, für die der Bahnradius nur sehr wenig durch Streu
erfälscht ist, heranziehen. Die schnellen Mesonen jedoch werden in der geringen Menge
üllgases nicht absorbiert. Man muß also in der WILSON-Kammer Schichten dichter S
tanzen, z. B. aus Blei oder Gold, anbringen, um die Reichweite eines schnellen Teilchens
estimmen. Das Ergebnis wird genauer, wenn man statt einer dicken Platte mehrere dü
erwendet. Die sichersten Messungen dieser Art wurden mit der in Abb. 451 dargestellten
rdnung ausgeführt. Sie besteht aus zwei WILSON-Kammern A und B, deren Expans
urch ein Teleskop aus GEIGER-MÜLLERschen Zählrohren C_1, C_2, C_3 gesteuert wird. Die e
VILSON-Kammer A befindet sich in einem starken Magnetfeld (5300 Oersted). Sie dient a
chließlich zur Bestimmung des Mesonenimpulses aus der Größe $H\varrho$ (siehe § 319). In der zwei
Kammer sind 8 Bleiplatten von je 1,2 cm Stärke angebracht. Damit läßt sich die Reichw
es Mesons in Blei bis auf 6 mm Genauigkeit feststellen. Die Messungen werden in Mee
öhe durchgeführt. Um Elektronen auszuschließen und nur Mesonen aus dem intensive
'eil des Spektrums zu erfassen, ist die ganze Anlage mit 30 cm Blei von oben abgeschir

Mit der beschriebenen Anlage wurden insgesamt 26 Mesonenmassenbestimmungen a
eführt. Der Mittelwert für die Mesonenmasse aus diesen Messungen ergab sich zu 202

b) *Der Zerfall der μ-Mesonen.*

Die experimentellen Untersuchungen der Beschaffenheit der μ-Mesonen zeigen, daß d
'eilchen instabil sind und unter Aussendung von β-Teilchen und Neutrinos zerfallen.

Dieser Zerfall wurde erstmalig 1940 von WILLIAMS und ROBERTS auf der Photogra
iner Mesonenbahn in der WILSON-Kammer festgehalten. Diese Photographie ist
bb. 452 wiedergegeben. Wir sehen hier die Teilchenspur $ABCDEF$, deren Ionisationsdic
ehr groß ist. Im Punkt F kommt das Meson zum Stillstand, und es entsteht eine neue S
G, mit einer wesentlich geringeren Tröpfchendichte, die von einem anderen Teilchen l



a) *b)*

Abb. 452. Zerfall eines μ-Mesons in der WILSON-Kammer: a) Photographie des Zerfalls, b) Ausschnittsvergrößerung vom Ende der Mesonenspur

rührt. Die Analyse dieser Photographie führte zu dem Schluß, daß das erste Teilchen ein positives Meson ist, das in der WILSON-Kammer abgebremst wird, zerfällt und sich in ein Positron umwandelt. Der Impuls des Zerfallspositrons beträgt grob geschätzt 50 MeV/c,und aus seiner spezifischen Ionisation kann man folgern, daß seine Geschwindigkeit nahe bei der Lichtgeschwindigkeit liegt. Daher kann man seine kinetische Energie einfach zu pc (siehe § 319), d. h. im vorliegenden Falle zu 50 MeV, annehmen. Da die Gesamtenergie, die der Ruhemasse eines μ-Mesons, d. h. 200 m_e, entspricht, 100 MeV (der Masse m_e entspricht 0,5 MeV) beträgt, so hat das Positron die Hälfte der gesamten Energie übernommen. Auf Grund des Impulserhaltungssatzes muß man danach annehmen, daß das μ-Meson in zwei Teilchen zerfällt, an die es je eine Hälfte seines Impulses und seiner Energie abgibt. Da die Spur des zweiten Teilchens auf der Photographie nicht zu sehen ist, muß dieses ein Neutrino sein.

Weitere Untersuchungen, die die Tatsache des Zerfalls eines μ-Mesons mit Bildung eines Positrons oder Elektrons bestätigten, brachten gewisse Präzisierungen in diese Vorstellungen. Es zeigte sich, daß Impuls und Energie der Zerfallselektronen (oder Positronen) nicht konstant sind, so daß die Annahme des Zerfalls in zwei Teilchen, in ein Elektron (Positron) und ein Neutrino, unrichtig ist.

Eine Untersuchung des Energiespektrums der Elektronen, die beim Mesonenzerfall entstehen, wurde von G. B. SHDANOW und A. A. CHAIDAROW nach der Absorptionsmethode durchgeführt. Sie zeigten, daß die Zerfallselektronen in Graphit schneller absorbiert werden, als dies für Elektronen mit einer Energie von 50 MeV, der halben Ruheenergie eines μ-Mesons, der Fall sein sollte. Daraus folgerten sie, daß offensichtlich das Elektron und Neutrino nicht die einzigen beim μ-Mesonenzerfall entstehenden Teilchen sind. Zu demselben Schluß kamen auch andere Autoren, die die Absorption der Elektronen des μ-Mesonenzerfalls maßen.

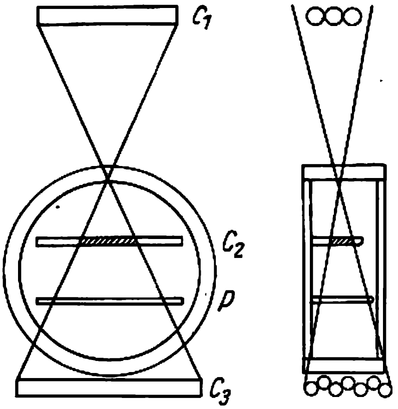


Abb. 453. Versuchsanordnungen zur Bestimmung des Energiespektrums von Zerfallsteilchen

Die direkte Messung des Energiespektrums der Teilchen, die beim μ-Mesonenzerfall entstehen, und die eine Aufstellung ihres Zerfallsschemas ermöglichte, wurde von ANDERSON und anderen mit der in Abb. 453 schematisch gezeichneten Anlage vorgenommen. Die WILSON-Kammer war zwischen den Polen eines Elektromagneten, der ein Magnetfeld von 7250 Oersted erzeugte, angeordnet. Die Expansion der Kammer fand dann statt, wenn eine Koinzidenz in den Zählern C_1 und C_2 (das Zählrohr C_2 befand sich in der Kammer) nicht von einer Entladung in einer Reihe von Zählrohren C_3 begleitet war. Es ist klar, daß eine

auf diese Weise dirigierte WILSON-Kammer jedes langsame Meson registrierte, das in der in der Kammer angebrachten Kohlenstoffplatte P mit der Dicke von 2 g/cm² stecken blieb. Mit dieser Anordnung gelang es, 75 Fälle zu erfassen, in denen nach Absorption eines Mesons in der Platte P aus dieser ein Zerfallsteilchen austrat, dessen Energie man bestimmen konnte.

Einer dieser Fälle ist auf Abb. 454 zu sehen. Ein positiv geladenes Meson gelangt von oben in die Kammer, passiert das Zählrohr C_2 und wird in der Platte P absorbiert. Aus dem Punkt, wo das Meson absorbiert wurde, tritt in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung ein Zerfallsteilchen aus. Seine Energie errechnete sich nach einer durch den Energieverlust in der Platte P angebrachten Korrektur zu $37 \pm 1{,}5$ MeV.

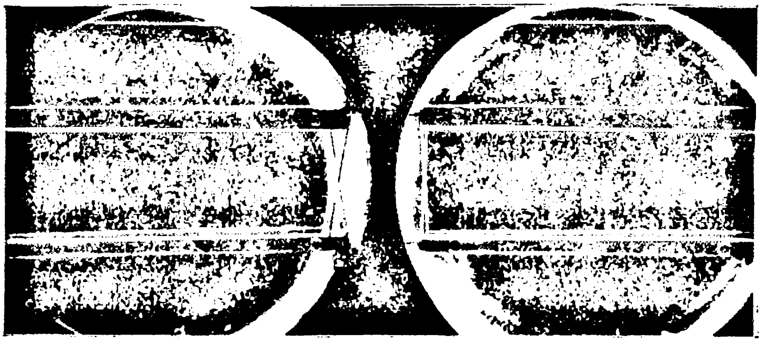


Abb. 454. Ein positiv geladenes μ-Meson wird in einer Kohlenstoffplatte, die unter einem GEIGER-MÜLLER-Zähler angeordnet ist, absorbiert. Aus der Platte tritt ein positiv geladenes Zerfallsteilchen mit einer Energie von $37 \pm 1{,}5$ MeV aus

Auf Abb. 455 ist das Energiespektrum, wie es für alle 75 Zerfallsbeobachtungen erhalten wurde, dargestellt (auf der Abszisse ist die Teilchenenergie, auf der Ordinate die Teilchenzahl aufgetragen).

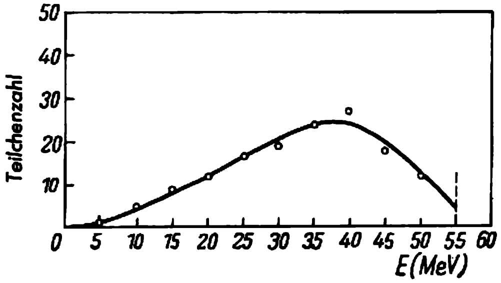


Abb. 455. Energiespektrum der Zerfallsteilchen

Aus der Betrachtung dieser Kurve (die auf Meeresniveau erhalten wurde) folgt zunächst, daß die beim Mesonenzerfall entstehenden Teilchen ein kontinuierliches Energiespektrum besitzen. Erinnern wir uns daran, daß μ-Mesonen eine Masse von rund 200 m_e haben, dann wird uns klar, daß die Annahme, ein μ-Meson zerfalle in ein Elektron und ein Neutrino,

nicht gerechtfertigt ist. Wir erhielten dann für die Zerfallsteilchen in allen 75 Fällen ein und dieselbe Energie von 50 MeV. Die mittlere Energie der Zerfallselektronen ist nach dem Spektrum der Abb. 455 gleich 35 MeV. Daher legt das beobachtete kontinuierliche Energiespektrum die Annahme nahe, daß ein μ-Meson in ein Elektron und zwei neutrale Teilchen (wahrscheinlich Neutrinos), die auf Wilson-Kammer-Aufnahmen nicht festgestellt werden können, zerfällt. Das Zerfallsschema wäre das folgende:

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \nu \,.$$

Bei einem derartigen Zerfall muß die Summe der Impulse aller drei Teilchen gleich Null sein; der Impuls und die Energie teilen sich jedoch unter die einzelnen Teilchen beliebig auf, ganz so, wie dies beim β-Zerfall der Fall ist. Daher ist das Energiespektrum kontinuierlich. Im Mittel kommt jedem Teilchen ein Drittel der Ruheenergie eines μ-Mesons, d. h. rund 35 MeV, zu. Wir erwähnen noch, daß ein derartiges Zerfallsschema auch den Spin des μ-Mesons liefert. Der Spin des Elektrons ist $\frac{1}{2}$, und der Spin zweier Neutrinos kann entweder 0 oder 1 sein. Daraus folgt, daß der Spin des μ-Mesons gleich $\frac{1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{3}{2}\right)$ sein muß.

§ 327. Die Messung der Lebensdauer von μ-Mesonen

Wir wollen nun die experimentellen Methoden zur Bestimmung der Lebensdauer von μ-Mesonen behandeln. Diese Methoden können in zwei Gruppen eingeteilt werden:

a) direkte Messung der Halbwertszeit der μ-Mesonen nach dem gleichen Prinzip wie bei radioaktiven Stoffen,

b) Messung des Absorptionsunterschieds in dichten und dünnen Medien, wie er sich aus dem Zerfall von μ-Mesonen innerhalb der Medien ergibt.

Die zweite Gruppe von Versuchen ist darum besonders interessant, weil sie zeigt, daß der Hauptteil der harten Komponente aus μ-Mesonen besteht.

a) *Direkte Messung der Halbwertszeit von μ-Mesonen.*

Die Lebensdauer eines ruhenden oder langsamen μ-Mesons, dessen Geschwindigkeit wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, beträgt das Millionstel einer Sekunde. Die modernen Methoden der Hochfrequenztechnik gestatten eine einfache und sehr genaue Messung derartiger Zeiten. Die Versuche, in denen nach diesen Methoden die Lebensdauer eines individuellen Mesons direkt gemessen wird, gehören zweifellos zu den elegantesten und feinsten Untersuchungen auf dem Gebiet der Höhenstrahlung, wenn nicht gar der Kernphysik überhaupt. Sie liefern einen überzeugenden Beweis für die Instabilität der Mesonen und erlauben, die Zerfallskurve eines Mesons direkt zu messen, ganz wie dies bei einer beliebigen radioaktiven Substanz geschieht. Der Grundgedanke dieser Versuche wird aus Abb. 456 deutlich. Hierin ist P eine Platte aus festem Stoff, z. B. Blei, die das Meson absorbiert. A und B sind parallel geschaltete Zählrohrreihen, die über und unter dem Absorber angeordnet sind. C stellt eine Mesonenbahn dar, die im Absorber P endet. F ist die Bahn eines Zerfallselektrons oder -positrons. Es kommt darauf an, das Zeitintervall zwischen dem Eintritt des Mesons in die Platte P und dem Austritt des Zerfallsprodukts aus der Platte zu messen. Zur Feststellung dieses Zeitraums dienen die Zählrohrreihen A und B. Ein Meson, das durch die Reihe A hindurchtritt, erzeugt einen Impuls, der eine uhrenähnliche Hochfrequenzanlage, z. B. einen Erzeuger sinusförmiger Schwingungen, einschaltet. Der Durchgang des

Zerfallsteilchen durch die Zählrohrreihe B hält die „Uhr" an. Die Zahl der Schwingungen zwischen den beiden Zeitpunkten gibt uns die gesuchte Lebensdauer des Mesons in der Schicht.

Eine andere Methode zur Messung der Lebensdauer eines Mesons, das in der Schicht P absorbiert wird, besteht darin, daß nach der durch den Mesonendurchgang hervorgerufenen Entladung in den Zählrohren A die Aufladung eines Kondensators durch einen Strom konstanter Stärke einsetzt. Die Aufladung bricht ab, nachdem das Zerfallselektron in den Zählern B eine Entladung ausgelöst hat. Kennt man die Kapazität des Kondensators, so kann man aus der Spannung, bis zu der er sich aufgeladen hat, die Zeit zwischen den Entladungen in den Zählern A und B bestimmen. Diese Zeit ist gleich der Lebensdauer des Mesons in der Platte P. Aus einer großen Zahl derartiger Messungen erhält man die Zerfallskurve des Mesons und kann daraus seine Halbwertszeit bestimmen.

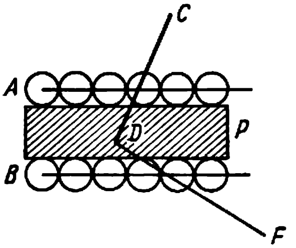


Abb. 456. Registrierung des Zerfalls eines ruhenden Mesons mit der Hochfrequenzuhr

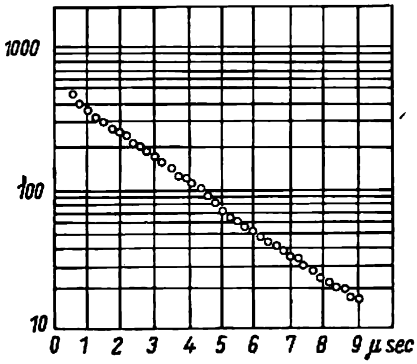


Abb. 457. Mesonen-Zerfallskurve

In Abb. 457 sehen wir eine Zerfallskurve für μ-Mesonen, die sich aus derartigen Messungen ergibt. Die Kurve ist in halblogarithmischen Koordinaten gezeichnet: Auf der Ordinatenachse ist der Logarithmus der Teilchenzahl, auf der Abszisse die Zeit in Mikrosekunden aufgetragen. Wir sehen, daß in der halblogarithmischen Darstellung die Abnahme der Teilchenzahl linear mit der Zeit erfolgt, das Zerfallsgesetz für Mesonen also ein Exponentialgesetz ist, ähnlich dem für den Zerfall radioaktiver Stoffe. Die Neigung der Kurve in Abb. 457 bestimmt die mittlere Lebensdauer. Aus den experimentellen Daten folgt, daß

$$\tau_0 = (2{,}15 \pm 0{,}07)\ \mu\,\text{sec}$$

ist.

b) *Unterschiede in der Absorption von μ-Mesonen in dünnen und dichten Medien.*

Es wurde bereits seit langem bemerkt, daß die harte Komponente in Luft stärker absorbiert wird als in einer hinsichtlich der Masse äquivalenten Schicht fester Substanz („anormale Absorption" der harten Komponente). Diese gut bekannte Tatsache fand in der Instabilität des Mesons ihre Erklärung. Wir wollen jetzt etwas eingehender untersuchen, worin diese anormale Mesonenabsorption in Luft besteht, wie sie zu messen ist und wie man auf Grund dieser Messungen die Halbwertszeit der Mesonen bestimmen kann. Wir nehmen an, daß die Intensität der harten Komponente mit zwei Zählrohren A und B, zwischen denen ein Bleiblock der Stärke

10 bis 15 cm angeordnet ist, gemessen wird. Dieser Bleiblock soll die weiche Komponente aussschalten. Die Intensität der harten Komponente auf Meeresniveau sei gleich I Koinzidenzen in der Minute (Versuch Nr. 1 in Abb. 458). Danach werde unser System in eine Höhe

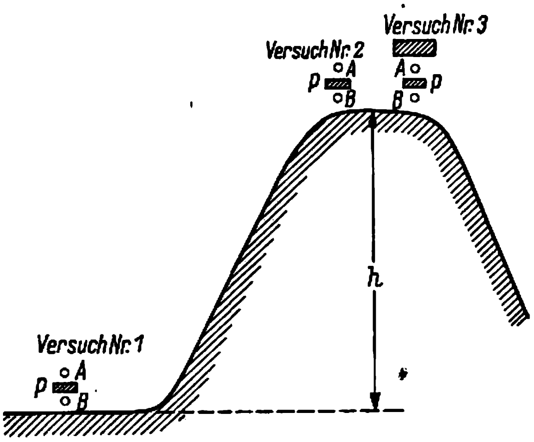


Abb. 458. τ_0-Bestimmung aus der anormalen Mesonenabsorption

von h Metern gebracht. Die Zahl der in dieser Höhe registrierten Koinzidenzen wird größer als I sein, da ein Teil der Mesonen auf der Strecke h absorbiert wird (Versuch Nr. 2 in Abb. 458). Die Differenz

$$I_h - I$$

gibt uns die Zahl der Mesonen, die in der h Meter dicken Luftschicht in der Minute absorbiert werden. Wir führen jetzt einen dritten Versuch durch: Über unserem System aus Zählrohren AB und dem Absorber P bringen wir einen Absorber aus fester Substanz an, der so berechnet ist, daß in ihm die gleiche Elektronendichte wie in einer Luftschicht der Höhe h herrscht (Versuch Nr. 3 in Abb. 458). In § 324 haben wir gezeigt, daß solche Schichten in ihrem Absorptionsvermögen äquivalent sind. Wir müssen also erwarten, daß sich die Intensität der harten Komponente unter diesen Bedingungen nicht von derjenigen in Meereshöhe unterscheidet. Dies stimmt jedoch nicht mit den Tatsachen überein. Im Versuch 3 registrierte das System eine größere Zahl Koinzidenzen als im Versuch Nr. 1.

Worin liegt die Ursache dafür, daß die Mesonen in diesen äquivalenten Schichten fester und gasförmiger Stoffe unterschiedlich absorbiert werden? Der einzige Unterschied zwischen beiden Schichten besteht darin, daß ein Meson in dem gasförmigen Absorber einen wesentlichen längeren Weg zurücklegt, also längere Zeit unterwegs ist, als in dem festen und in dieser Zeit zerfallen kann. Genauer ausgedrückt besteht der Mesonenabsorptionskoeffizient für ein dünnes Medium aus einer Summe von zwei Koeffizienten μ_{Ionis} und μ_{Zerfall}:

$$\mu = \mu_{\text{Ionis}} + \mu_{\text{Zerfall}},$$

von denen μ_{Ionis} der Absorptionskoeffizient ist, der durch die Energieverluste bei der Ionisation, und μ_{Zerfall} der Absorptionskoeffizient ist, der durch den Mesonenzerfall bedingt wird. Die feste Substanz durchläuft das Meson in sehr kurzer Zeit, und die Wahrscheinlichkeit,

daß es während dieser Zeit zerfällt, ist sehr klein (in fester Substanz ist $\mu_{\text{Zerfall}} = 0$). Aus den früher beschriebenen Versuchen ist uns bekannt, daß die mittlere Lebensdauer eines μ-Mesons

$$\tau_0 = 2{,}15\,\mu\text{sec}$$

ist. Die Geschwindigkeit des Mesons möge in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegen,

$$v \approx c\,,$$

und der Höhenunterschied h 2 km betragen. Diese Entfernung durchläuft das Meson in der Zeit

$$t = \frac{S}{v} = \frac{2 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10}} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-5}\,\text{sec} \approx 7\,\mu\text{sec}\,,$$

die dreimal größer als seine Halbwertszeit ist. Die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls während dieser Zeit ist also sehr groß.

Hierzu ist allerdings folgende wichtige Tatsache zu erwähnen. Ein Meson, das sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die praktisch gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, unterliegt den Gesetzen der Relativitätstheorie. Diese zeigt, daß sich die Dauer von Prozessen in einem bewegten System im Vergleich zu denen in einem ruhenden verändert. Nach der LORENTZ-Transformation vergrößert sich die Zeiteinheit in einem bewegten System gegenüber derjenigen eines ruhenden um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Ist also in einem System, in dem das Meson ruht, seine Halbwertszeit gleich τ_0, so muß sie in einem Laboratoriumssystem gleich

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{327,1}$$

sein. Es ist klar, daß für die Reichweite des Mesons nicht die Halbwertszeit τ_0, sondern die von der Geschwindigkeit abhängende Halbwertszeit τ in Frage kommt. Diese Überlegung ist sehr wichtig, da eine Vernachlässigung der relativistischen Zeitänderung zu krassen Widersprüchen mit den elementaren experimentellen Tatsachen führt. Tatsächlich erhalten wir für ein Meson, dessen Geschwindigkeit zu $v \approx c$ angenommen wird, für $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ sec eine mittlere Reichweite von

$$3 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^4\,\text{cm} = 600\,\text{m}\,.$$

Eine so kleine Reichweite entspricht natürlich in keinem Falle den Tatsachen.

Berücksichtigt man den relativistischen Effekt, so verringert sich die Zerfallswahrscheinlichkeit beträchtlich, wird aber immer noch groß genug sein, um eine anormale Absorption in einem dünnen Medium zu verursachen. Multiplizieren wir Zähler und Nenner von (327,1)

mit m_0c^2, so erhalten wir

$$\tau = \tau_0 \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \tau_0 \frac{E}{m_0 c^2}. \qquad (327{,}2)$$

Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Längeneinheit ist für ein relativistisches Meson ($E = pc$; $v \sim c$) gegeben durch

$$w = \frac{1}{v\tau} = \frac{1}{v\tau_0} \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{1}{c\tau_0} \frac{m_0 c^2}{pc}. \qquad (327{,}3)$$

Als Beispiel wollen wir die Zerfallswahrscheinlichkeit für ein Meson mit einem Impuls von $p = 3 \cdot 10^9$ eV/c und einer Masse von 200 m_e ($m_0c^2 = 10^8$ eV) für einen Weg von 2 km ausrechnen:

$$\omega = \frac{1}{3 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}15 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{10^8}{3 \cdot 10^9} \cdot 2 \cdot 10^5 \approx \frac{1}{9}.$$

Das bedeutet, daß von 9 Mesonen mit einer Energie von $3 \cdot 10^9$ eV eins auf der 2 km langen Strecke zerfällt. Das Verschwinden jedes neunten Mesons aus dem Strahlenbündel infolge seines Zerfalls wird als zusätzliche Absorption, die zu einer zusätzlichen 10%igen Schwächung der Intensität führt, wahrgenommen.

Das Studium der anomalen Mesonenabsorption nach den in Abb. 458 skizzierten Versuchen ermöglicht die Bestimmung der Zerfallswahrscheinlichkeit w pro Längeneinheit. Daraus kann man nach Formel (327,3) die mittlere Lebensdauer eines Mesons τ_0 bestimmen, wenn man seinen Impuls und seine Masse kennt. Derartige Versuche wurden von zahlreichen Wissenschaftlern, speziell von Rossi und seinen Mitarbeitern, durchgeführt. Sie stellten ihre Beobachtungen in 3250 m und 1620 m Höhe an, der Höhenunterschied betrug 1630 m. Unter der Annahme einer Mesonenmasse von 200 m_e erhielten sie als mittlere Lebensdauer eines μ-Mesons den Wert

$$\tau_0 = (2{,}8 \pm 0{,}2)\,\mu\text{sec}.$$

Dieser Wert liegt, wie wir sehen, ziemlich nahe bei dem Wert $\tau_0 = (2{,}15 + 0{,}07)\,\mu$sec — der mittleren Lebensdauer eines ruhenden Mesons.

Zum Abschluß dieses Paragraphen erwähnen wir, daß die anormale Absorption der harten Komponente in Luft, die auf dem Zerfall beruht, die Ursache vieler Erscheinungen ist, die eine Beobachtung des Mesonenzerfalls und eine Abschätzung der Größe τ_0 ermöglichen, wenn die Mesonenmasse bekannt ist.

Wir weisen nur auf zwei derartige Erscheinungen hin, den barometrischen und den Temperatureffekt der harten Komponente. Diese Effekte äußern sich darin, daß die Intensität der harten Komponente, die in Meereshöhe gemessen wird, vom Luftdruck und der Temperatur am Beobachtungsort abhängig ist. Das Wesen dieser Effekte ist leicht zu verstehen, wenn man sich daran erinnert, daß die Mesonen keine Primärteilchen sind, sondern erst in den hohen Atmosphärenschichten entstehen. Eine Druck- oder Temperaturänderung ändert die Höhe des Gebiets, in der sich die Entstehung der Mesonen vollzieht. Dadurch wird eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Weglänge, welche die Mesonen vom Ort ihrer Entstehung bis zu dem ihrer Registrierung durchlaufen, hervorgerufen und damit auch ein Unterschied in der anormalen Absorption. Barometrische und Temperatureffekte ändern nicht nur die Höhe der Mesonenursprungsgebiete, sondern auch die Verteilung der Luft-

masse über dem Beobachtungsort. E. L. FEINBERG wies darauf hin, daß diese Erscheinung ebenfalls die Größe der anormalen Absorption beeinflußt.

Historisch gab die anomale Absorption der Mesonen den ersten Hinweis auf ihre Instabilität. Die Messungen von τ_0, die auf der Grundlage der verschiedenen mit der anormalen Absorption verknüpften Erscheinungen durchgeführt wurden, sind nicht genau. Dies erklärt sich daraus, daß eine genaue Messung der Intensitätsunterschiede der Höhenstrahlung in verschiedenen Höhen durchaus nicht leicht ist. Außerdem muß bei fast allen Versuchen dieser Art beachtet werden, daß sich die Entstehung von Mesonen allem Anschein nach nicht nur in gleich hohen Schichten der Atmosphäre vollzieht, sondern, wenn auch mit geringerer Intensität, in ihrer ganzen Längenausdehnung. Diese Entstehung neuer Mesonen wird in derartigen Versuchen nicht berücksichtigt und kann daher den Wert von τ_0 vergrößern. Wir sahen, daß die Bestimmung von τ_0 aus der Größe der anomalen Mesonenabsorption zwischen 3250 und 1620 m Höhe den Wert

$$\tau_0 = (2{,}8 \pm 0{,}2)\,\mu\text{sec}$$

ergab. Andererseits erhalten wir aus direkten Messungen die Lebensdauer ruhender Mesonen in Meereshöhe zu

$$\tau_0 = (2{,}15 \pm 0{,}07)\,\mu\text{sec}\,.$$

Daß die Versuche zur Bestimmung von τ_0 aus der anomalen Absorption von Mesonen einen höheren Wert geben können, ist leicht zu verstehen. Entstehen tatsächlich zwischen den Höhen h_1 und h_2 Mesonen, so muß dies zu einer Vergrößerung von τ_0 führen. So ist zweifellos der τ_0-Wert, der für das ruhende μ-Meson bestimmt wurde, der zuverlässigste. Man nimmt also als mittlere Lebensdauer eines μ-Mesons den Wert

$$\tau_0 = (2{,}15 \pm 0{,}07)\,\mu\text{sec}$$

an. Dieser Wert wird durch Versuche mit μ-Mesonen, die in Beschleunigern erzeugt wurden, bestätigt.

§ 328. Die Wechselwirkung zwischen Mesonen und Kernen

Wir erwähnten schon, daß das Mesonenproblem eng mit dem der Kernkräfte verbunden ist. Nach den heutigen theoretischen Vorstellungen besteht zwischen Kernkräften und Mesonen etwa die gleiche Beziehung wie zwischen den elektromagnetischen Wechselwirkungskräften elektrischer Ladungen und den durch diese ausgesandten Photonen (siehe § 250). Weiter entstehen nach der Theorie (wir werden weiter unten sehen, daß diese vollauf durch das Experiment bestätigt wird) Mesonen bei der Wechselwirkung zwischen Kernteilchen, Protonen und Neutronen (Nukleonen). Ist diese Annahme richtig, so folgt daraus, daß die Mesonen ihrerseits mit den Kernbausteinen und den Atomkernen Wechselwirkungen ausüben müssen.

Diese Wechselwirkung muß *stark* sein, wenn die Kernkräfte tatsächlich durch Wechselwirkung mittels Mesonen zustande kommen. Die Versuche, die in den Jahren 1946 bis 1947 von einer Reihe von Forschern unternommen wurden, zeigten jedoch, daß die zu dieser Zeit allein bekannten μ-Mesonen mit den Kernen wider Erwarten nur in *ganz schwacher* Wechselwirkung stehen. Diese Versuche beruhten auf den folgenden Überlegungen: μ-Mesonen sind instabile Teilchen; ihre mittlere Lebensdauer ist gleich 2,15 μsec. Ist andererseits die Wechselwirkung mit den Kernen stark, so müssen sie auch wegen der Absorption durch die Kerne verschwinden. Man muß also erwarten, daß Mesonen, die in Substanzen gebremst werden, aus zweierlei

Gründen verschwinden, die einen durch ihren Zerfall in Elektronen und Neutrinos, die anderen durch Absorption durch die Kerne. Das Schicksal *positiver* und *negativer* Mesonen muß bei solch einer Abbremsung in dichten Stoffen grundverschieden sein. Wie eine theoretische Berechnung zeigt, muß für ein negatives Meson die Wahrscheinlichkeit, von den Kernen absorbiert zu werden, um ein Vielfaches größer sein als die Wahrscheinlichkeit des radioaktiven Zerfalls. Umgekehrt wäre für ein positives Meson die Zerfallswahrscheinlichkeit wesentlich größer als die Wahrscheinlichkeit der Absorption durch die Kerne, und zwar deshalb, weil die COULOMBsche Abstoßung des positiv geladenen Kerns ein positives Meson daran hindert, sich dem Kern bis auf einen Abstand zu nähern, in dem sich die Wirkung der Kernkräfte geltend macht. Daher wird ein langsames positives Meson in der überwiegenden Zahl der Fälle so lange durch die Substanz diffundieren, bis es zerfällt. U. a. folgt daraus, daß die Elektronen, die bei den Versuchen zur Bestimmung der Lebensdauer langsamer Mesonen auftreten (§ 327), *positive* Elektronen, also Positronen, sind.

Die geschilderte Vorstellung vom unterschiedlichen Verhalten positiver und negativer Mesonen wurde der experimentellen Nachprüfung unterzogen. Das Wesen der Versuche bestand darin, daß man entweder positive und negative Mesonen durch ein entsprechendes Magnetfeld getrennt in einem bestimmten Absorber ablenkte und ihr Verschwinden untersuchte, oder daß man aus der Ablenkung im Magnetfeld das Vorzeichen der Ladung des zerfallenden Mesons bestimmte. Einen der Versuche vom zweiten Typ wollen wir hier beschreiben.

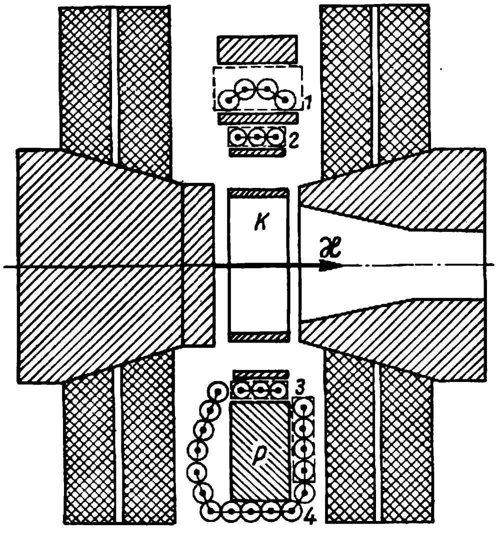


Abb. 459. Schema einer Anordnung zur experimentellen Bestimmung der Lebensdauer positiv und negativ geladener Mesonen

Das Schema dieses Versuchs ist in Abb. 459 wiedergegeben. Eine von vier Zählrohrreihen 1, 2, 3, 4 gesteuerte WILSON-Kammer *K* ist zwischen den Polen eines starken Elektromagneten angeordnet. Zwischen den Zählrohrreihen 3 und 4 befindet sich die Substanz, in der man die Mesonenabsorption beobachtet. Die Schaltung, die die Expansion der Kammer auslöst, ist

derart angelegt, daß die Kammer nur dann expandiert wird, wenn eine Entladung in Reihe 4 nicht weniger als 1μsec nach dem Durchgang des Mesons durch die Reihen 1, 2, 3 erfolgt. Da eine derart verzögerte Entladung nur dadurch stattfinden kann, daß ein μ-Meson eine endliche Lebensdauer hinsichtlich seines Zerfalls besitzt, so registriert diese Anlage nur solche Mesonen, die im Absorber P radioaktiven Zerfall erleiden. Da außerdem die durch das Magnetfeld gekrümmte Spur des zerfallenden Mesons in der Wilson-Kammer photographiert wird, kann aus der Richtung der Ablenkung auf das Vorzeichen des Mesons geschlossen werden. Unter Verwendung verschiedener Absorber P konnte gezeigt werden, daß in Blei, Eisen und Messing tatsächlich nur der Zerfall positiv geladener μ-Mesonen erfolgt. Negativ geladene μ-Mesonen zerfallen in diesen Absorbern nicht; wie zu erwarten war, werden sie von den Kernen absorbiert.

Bei Verwendung eines Absorbermaterials niedrigerer Atomzahl Z erhielt man ein unerwartetes Resultat: In solchen Stoffen (Kohlenstoff, Beryllium und Wasser) beobachtete man den radioaktiven Zerfall sowohl positiver als auch negativer Mesonen. Das bedeutet, daß in einem Stoff mit kleinem Z die Einfangwahrscheinlichkeit für ein langsames negatives Meson mit der Zerfallswahrscheinlichkeit vergleichbar oder sogar noch geringer als diese ist. Ein negativ geladenes Meson zerfällt in diesen Stoffen lange bevor es von einem Kern absorbiert wird. Die Tatsache, daß in solchen Stoffen wie Eisen, der Zerfall negativer μ-Mesonen nicht zu beobachten ist, während er in Kohlenstoff oder Beryllium vorkommt, ist dadurch zu erklären, daß die Einfangwahrscheinlichkeit für ein negatives μ-Meson schnell mit zunehmendem Z (proportional Z^4) anwächst. Das Erstaunlichste dieser Resultate ist jedoch, daß es möglich war, den Zerfall langsamer, negativer μ-Mesonen, die in der Substanz abgebremst wurden, zu beobachten. Erstaunlich war diese Tatsache darum, weil die nach der Theorie der Kernkräfte durchgeführte Rechnung ergab, daß die Zeit, die vergeht, bis ein Meson von einem Kohlenstoffkern eingefangen wird, von der Größenordnung 10^{-18} sec ist, während die Halbwertszeit eines μ-Mesons etwa 10^{-6} sec beträgt. Mit anderen Worten: die Absorptionswahrscheinlichkeit für ein Meson muß nach dieser theoretischen Schätzung 10^{12}mal größer als die Wahrscheinlichkeit des Verschwindens durch radioaktiven Zerfall sein. Unterdessen haben die beschriebenen und andere Versuche ergeben, daß im Gegensatz zu den Erwartungen, die auf der Bedeutung beruhen, die den μ-Mesonen bei dem Entstehen der Kernkräfte zugeschrieben wird, die Wechselwirkung der μ-Mesonen mit den Kernen außerordentlich schwach ist.

Dafür sprechen auch andere Tatsachen, die aus den Beobachtungen der Höhenstrahlung bekannt sind. Die bedeutendste davon ist das außerordentlich hohe Durchdringungsvermögen der Mesonenkomponente der Höhenstrahlung. Dies spricht dafür, daß schnelle μ-Mesonen keine Energieverluste durch Zusammenstöße mit Kernen erleiden. Alle diese Tatsachen stellten die Rolle der μ-Mesonen, die sie bei der Entstehung der Kernkräfte angeblich spielen, und die Hypothese, daß es sich bei den μ-Mesonen um eine Sekundärstrahlung handelt, die durch Wechselwirkung der Primärstrahlung mit den Kernen entsteht, in Zweifel.

§ 329. Die Entdeckung der π-Mesonen

Seit 1947 sind die Eigenschaften langsamer Mesonen nach der Photoplattenmethode, mit der es zu dieser Zeit gelang, die Spuren langsamer Mesonen zu erfassen, besonders erfolgreich untersucht worden. Diese Untersuchungen zeigten, daß außer den μ-Mesonen in der Höhenstrahlung noch schwerere und ebenfalls instabile Teilchen existieren. Sie wurden π-Mesonen genannt. Das Studium der Erscheinungen, die sich bei der Bremsung der π-Mesonen in der Photoemulsion zeigen, deutet darauf hin, daß die π-Mesonen im Gegensatz zu den μ-Mesonen

sehr stark mit den Atomkernen in Wechselwirkung treten. Weiter wurde gefunden, daß die Absorption eines π-Mesons durch den Kern zum Ausstoß von schnellen Teilchen aus dem Kern führt. Diesen wird die Anregungsenergie, die der Kern von dem π-Meson erhält, übertragen („Sterne"). In solchen Sternen entstehen häufig neue π-Mesonen. Damit wurde offenbar, daß die π-Mesonen jene sekundäre kosmische Strahlung darstellen, die von der Primärstrahlung erzeugt wird, und die μ-Mesonen, die beim Zerfall dieser π-Mesonen entstehen, nicht sekundärer, sondern sogar tertiärer Herkunft sind.

Wir wollen jetzt die Versuche beschreiben, die zu dieser Schlußfolgerung führten. Bei der Untersuchung der Spuren, die langsame Mesonen in Photoplatten hinterließen, fanden Powell und Occhialini, daß etwa 10% dieser Mesonen am Ende ihrer Bahn ein neues Teilchen aussenden. Bemerkenswert ist dabei folgendes: Die Flugrichtung dieses Sekundärteilchens ist beliebig, seine Reichweite in der Emulsion ist jedoch in allen Fällen fast genau die gleiche (ungefähr 600 μ Photoemulsion). Diese Konstanz der Reichweite ist ein überzeugender Beweis dafür, daß ein primäres Meson, das π-Meson genannt wurde, immer in *zwei* Teilchen zerfällt. Nach dem Impulserhaltungssatz müssen diese beiden Teilchen ihrer Größe nach gleiche und ihrer Richtung nach verschiedene Impulse haben, und die ganze Energie, die der Ruhemasse des π-Mesons äquivalent ist, muß sich unter sie aufteilen. Eines dieser Zerfallsprodukte muß dieselbe Ladung wie das π-Meson haben, das andere dagegen ein neutrales Teilchen sein, da auf keiner Photographie seine Spur gefunden werden konnte.

Eine Betrachtung der Reichweite und Korndichte der Spuren der primären und sekundären Teilchen führte zu dem Schluß, daß eines der Zerfallsprodukte das bereits bekannte μ-Meson mit einer Masse von etwa 200 m_e ist. Das primäre oder π-Meson muß daher eine größere Masse haben; das Massenverhältnis wurde auf 1,65 geschätzt, d. h., die Masse des π-Mesons mußte ungefähr 300 m_e betragen. Für das neutrale Teilchen führten Überlegungen auf der Grundlage des Energie- und Impulserhaltungssatzes zu der Annahme, daß dieses aller Wahrscheinlichkeit nach ein Neutrino ist.

Nachdem die Herstellung von Photoplatten gelungen war, die für schnelle Elektronen empfindlich sind, ließ sich die Richtigkeit der gegebenen Interpretation leicht nachprüfen: Ist das Teilchen, das beim Verschwinden eines π-Mesons entsteht, tatsächlich ein μ-Meson, so muß am Ende seiner Bahn ein schnelles Zerfallselektron zu beobachten sein. In Abb. 460 sind die Photographien von vier Fällen eines π-Mesonen-Zerfalls wiedergegeben (rund 250fache Vergrößerung). Auf allen Photographien ist unten deutlich die Spur des primären π-Mesons zu erkennen. Die allmähliche Abnahme des mittleren Abstandes zwischen den Körnern und die Zunahme der Windungen der Spur bei Annäherung an das Ende der Reichweite zeigt uns die Bewegungsrichtung des π-Mesons an. Auf den ersten drei Photographien fliegt es von rechts nach links, auf der letzten in entgegengesetzter Richtung. Der Ort des π-Mesonenzerfalls ist durch *a* gekennzeichnet. In diesem Punkt beginnt die Spur des μ-Mesons, das bei dem Zerfall entsteht. Man sieht leicht, daß diese in allen vier Fällen etwa gleich lang ist. Am Ende der Bahn des μ-Mesons entsteht die Spur eines schnellen geladenen Teilchens. Der mittlere Kornabstand in dieser Spur ist groß und entspricht der Korndichte einer Spur eines relativistischen Teilchens. Messungen der Energie dieses Teilchens ergaben, daß diese nie über 50 MeV hinausgeht. Daraus folgt, daß diese Spur einem beim μ-Mesonenzerfall entstehenden Elektron zuzuschreiben ist. Somit beweisen also diese Photographien, daß ein π-Meson in ein μ-Meson und ein leichtes, neutrales Teilchen, ein Neutrino, zerfällt:

$$\pi \to \mu + \nu. \qquad (329,1)$$

Das μ-Meson wiederum zerfällt in der bereits bekannten Weise:

$$\mu \to e + \nu + \nu .$$

Aus dem Zerfallsschema (329,1) folgt unmittelbar die Größe des Spins des π-Mesons. Da der Spin des μ-Mesons und des Neutrinos gleich $\frac{1}{2}$ ist, muß der des π-Mesons 0 oder 1 sein.

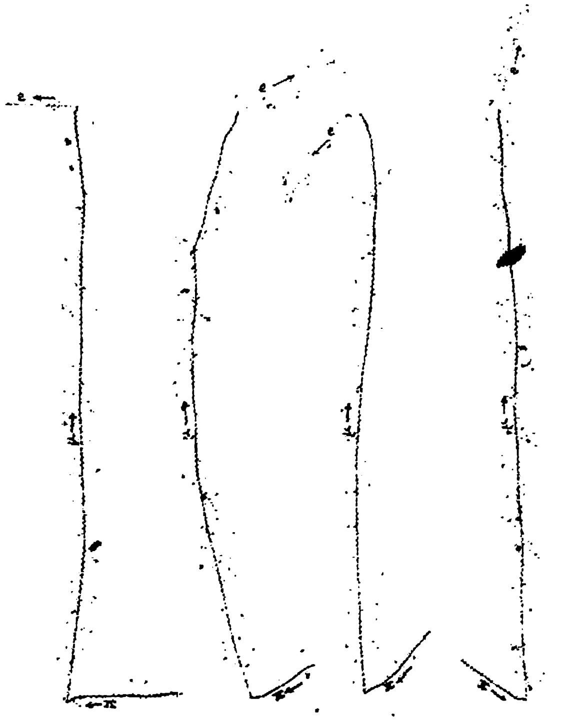


Abb. 460. Vier vergrößerte Mikrophotographien des $\pi \to \mu \to e$-Zerfalls. In allen vier Fällen hat das beim π-Mesonenzerfall entstehende μ-Meson eine Reichweite in der Photoplatte von rund 400 Mikron, was einer Energie von etwa 4 MeV entspricht. Am Ende der μ-Mesonen-Spur sieht man die Spur des Zerfallselektrons

Außer dem betrachteten $\pi \to \mu \to e$-Zerfall fand man, daß langsame, negativ geladene π-Mesonen, die in Kerne eindringen, eine Kernspaltung hervorrufen können. Es gelang schließlich, in der Photoplatte auch solche Kernexplosionen aufzufinden, bei denen aus dem Kern neben Protonen und Neutronen π-Mesonen herausfliegen. Explosionen, die durch das Eindringen eines negativ geladenen Mesons in den Kern hervorgerufen werden, und die Entstehung neuer Mesonen bei einer derartigen Explosion beobachteten P. J. LUKIRSKI und

N. A. PERFILOW in Photoplatten. In einigen Fällen werden sekundäre π-Mesonen wieder von Kernen eingefangen und erzeugen neue Kernexplosionen. In Abb. 461 zeigen wir eine solche Photographie. Bei P findet eine Kernexplosion statt. Wir sehen auf der Platte die Spuren von wenigstens zehn Teilchen, die einen „Stern" um den Punkt P bilden. Eines

Abb. 461. Mikrophotographie zweier miteinander verbundener Kernexplosionen. Bei der ersten, die sich bei P vollzieht, verläßt ein Meson (σ) den Kern, das von einem anderen Kern im Punkt S eingefangen wird und eine neue Explosion hervorruft

der herausfliegenden Teilchen, dessen Spur auf der Photographie durch einen kleinen Pfeil und den Buchstaben σ gekennzeichnet ist, ist zweifellos ein Meson. Dafür spricht auch die Tatsache, daß der mittlere Kornabstand am Beginn der Bahn bei P groß ist und mit An-

näherung an ihr Ende in S schnell abnimmt. Im Punkt S wird das Meson σ, das bei der ersten Explosion entstand, von einem Kern eingefangen, wodurch die Explosion dieses Kerns hervorgerufen wird.

So hat also das Studium der Spuren langsamer Mesonen in Photoplatten ergeben, daß in der Höhenstrahlung zwei Arten von Mesonen vorhanden sind, π- und μ-Mesonen. Es wurde ein neuer Zerfallstyp entdeckt, der $\pi-\mu$-Zerfall, der in einer Umwandlung eines schweren π-Mesons in ein leichteres μ-Meson unter gleichzeitiger Emission eines neutralen Teilchens besteht. Diese Untersuchungen zeigten, daß π-Mesonen Kernspaltungen hervorrufen und daß sie sich bei Kernspaltungen bilden, während μ-Mesonen beim π-Mesonenzerfall entstehen und selbst nur schwach mit Kernen wechselwirken.

§ 330. Die künstliche Erzeugung von π-Mesonen unter Laboratoriumsbedingungen

Das Studium positiver und negativer π-Mesonen in festen Substanzen hat gezeigt, daß sich sowohl die einen als auch die anderen so verhalten, wie man es von Teilchen, die mit Atomkernen in starker Wechselwirkung stehen, erwarten mußte. Die positiven π-Mesonen werden wegen der Coulombschen Abstoßung nicht von Kernen eingefangen. Bleiben sie in der Substanz stecken, so zerfallen sie in ein μ^+-Meson und ein Neutrino. Das μ^+-Meson seinerseits zerfällt in ein Positron und zwei Neutrinos, so daß die Zerfallselektronen, die auf den Photographien der Abb. 460 zu sehen sind, in Wirklichkeit positive Elektronen, also Positronen, sind. Negative π-Mesonen zerfallen im Unterschied zu μ-Mesonen in fester Substanz niemals; ihr Zerfall wurde nur in Luft beobachtet. Dies ist ein Hinweis darauf, daß π^--Mesonen mit großer Wahrscheinlichkeit von den Kernen eingefangen werden, wie auch zu erwarten war. Den Mechanismus dieses Einfangs hat man sich so vorzustellen, daß in einem dichten Medium das π^--Meson seine kinetische Energie schnell (in einer Zeit von der Größenordnung 10^{-12} sec) abgibt und so stark abgebremst wird, daß es von einem Kern auf die diesem nächstliegende Bahn, die der K-Bahn eines Elektrons analog ist, eingefangen werden kann. Der Radius dieser Bahn errechnet sich aus der Formel

$$a_\pi = \frac{h^2}{4\pi^2 m_\pi Z e^2},$$

die sich von der Formel für den ersten Bohrschen Radius a_1 nur dadurch unterscheidet, daß im Nenner statt der Elektronenmasse m_e die Mesonenmasse m_π steht. Daher ist der Radius a_π gerade $\frac{m_\pi}{m_e}$ mal kleiner als der Bohrsche Radius (für das gleiche Z), das heißt also etwa 300 mal kleiner. Das auf die „K-Schale" eingefangene π^--Meson kann entweder zerfallen oder vom Kern absorbiert werden, wobei sich eines von dessen Protonen in ein Neutron umwandelt (ein dem K-Einfang analoger Prozeß). Aus der Tatsache, daß der Zerfall von π^--Mesonen in dichter Substanz nicht beobachtet wird, folgt, daß die Einfangwahrscheinlichkeit durch den Kern wesentlich größer als die Zerfallswahrscheinlichkeit ist, d. h., daß die Wechselwirkung der π^--Mesonen mit den Kernen stark ist. Aus statistischen Überlegungen folgt, daß dann auch die Wahrscheinlichkeit der π^--Mesonenbildung beim Zusammenstoß schwerer Kerne groß sein muß. Tatsächlich sind der Einfang von π^--Mesonen durch Nukleonen und die Bildung von π^--Mesonen beim Zusammenstoß von Nukleonen reziproke Prozesse. Nach dem statistischen Prinzip der mikroskopischen Reversibilität müssen ihre Wahrscheinlichkeiten einander gleich sein.

Kurze Zeit nach der Entdeckung der π-Mesonen in der Höhenstrahlung gelang es, den Umkehrprozeß zum π-Mesoneneinfang, d. h. also die „Geburt" von π-Mesonen, im Laboratorium zu verwirklichen.

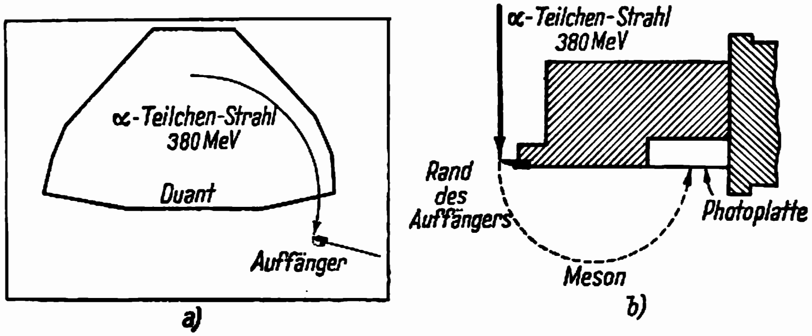


Abb. 462.

1948 erhielt man π-Mesonen zum ersten Mal durch Beschuß fester Substanzen mit α-Teilchen oder Protonen sehr hoher Energie oder auch durch Bestrahlung mit hinreichend harten γ-Strahlen, α-Teilchen und Neutronen.

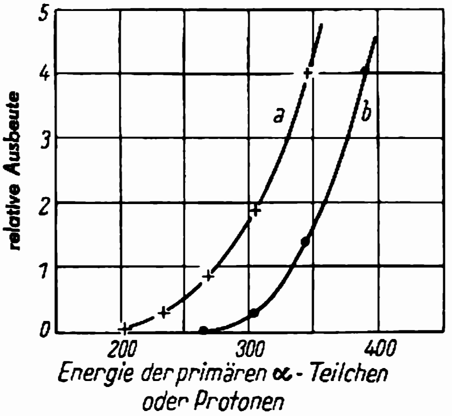


Abb. 463. Ausbeute an π-Mesonen in Abhängigkeit von der Energie der zum Beschuß benutzten Teilchen (MeV). Kurve *a* für Protonen, Kurve *b* für α-Teilchen

Das Schema des ersten Versuchs ist in Abb. 462 wiedergegeben. Ein α-Teilchen-Strahl, der aus einem Duanten eines Phasotrons austritt, trifft auf den äußersten Rand einer kleinen Auffangscheibe. Die Halterung des Auffängers und dessen Anordnung hinsichtlich des α-Teilchen-Strahls sind in Abb. 462b herausgezeichnet. Die Teilchen, die durch den α-Teilchen-Beschuß in dem Auffangplättchen entstehen, werden durch das Magnetfeld desselben Beschleunigers auf eine Photoplatte fokussiert.

Es zeigte sich, daß die Mesonenbildung nach Überschreiten eines gewissen Schwellenwertes E_π der kinetischen Energie der Beschußteilchen unabhängig vom Material des Auffängers zu beobachten ist. Bei weiterer Vergrößerung der Teilchenenergie erfolgt ein scharfes Anwachsen des π-Mesonenaustritts aus dem Auffänger. Das wird aus Abb. 463 ersichtlich, wo die Abhängigkeit der π-Mesonenausbeute von der Energie der schnellen Teilchen, die auf den Auffänger auftreffen, dargestellt ist. Die künstliche Erzeugung von π-Mesonen ermöglichte ein genaues Studium ihrer Eigenschaften. Man kann unter Laboratoriumsbedingungen sehr intensive und ausgerichtete Strahlen von π-Mesonen mit einer ziemlich großen kinetischen Energie von 70 bis 90 MeV herstellen.

§ 331. Masse und Lebensdauer geladener π-Mesonen

Massenbestimmungen wurden nach vielen Methoden sowohl an den π-Mesonen der Höhenstrahlung als auch an den in Beschleunigern erhaltenen angestellt. Die genauesten Werte erhielt man für künstlich erzeugte π-Mesonen. Die Gleichheit der Massen der künstlich erzeugten π-Mesonen und derjenigen, die aus der Höhenstrahlung stammen, ist ein Beweis für die Identität beider Teilchen.

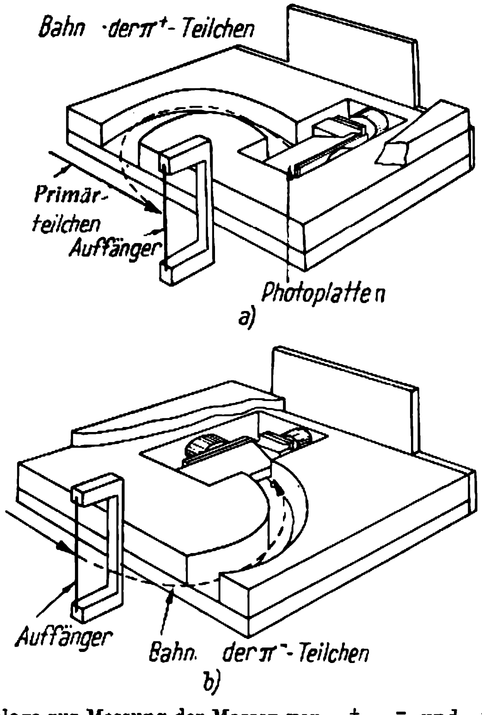


Abb. 464. Versuchsanlage zur Messung der Massen von π^+-, π^-- und μ^+-Mesonen, die im Phasotron erzeugt wurden. Die Anordnung ist in der Vakuumkammer des Phasotrons untergebracht und befindet sich im Magnetfeld des Phasotron-Elektromagneten. Der Auffänger in Form eines dünnen Fadens sendet π-Mesonen und μ-Mesonen (die im Auffänger durch den Zerfall von π-Mesonen entstehen) in allen Richtungen aus. Die Mesonen, deren Bahnen nahezu gleiche Krümmungsradien haben, bewegen sich in Kanälen

Wir wollen auf eine Methode zur Massebestimmung des π-Mesons, die auf einer gleichzeitigen Messung seines Impulses und seiner Reichweite beruht, näher eingehen. Die Versuchsanordnung ergibt sich aus Abb. 464, wo die in der Vakuumkammer des Phasotrons in der Nähe des Auffängers, der hier die Form eines dünnen Fadens hat, untergebrachte Anlage zu sehen ist. Die in Abb. 464a und b gezeigten Anordnungen werden zur jeweiligen Bestimmung der Masse positiv und negativ geladener π-Mesonen benutzt. Die π-Mesonen, die in dem dünnen Auffänger entstehen, bewegen sich im Magnetfeld des Phasotrons auf Kreisbahnen, denen aus dem Metall ausgeschnittene Kanäle entsprechen, und fallen dann auf eine Photoplatte. Kennt man den Krümmungsradius der Bahnen der π-Mesonen, der gleich demjenigen des ausgesparten Kanals im Metall ist, und außerdem ihre Reichweite in der Photoplatte, so läßt sich daraus die Masse des π-Mesons bestimmen. Die mittlere Masse eines negativ geladenen π-Mesons ist nach diesen Messungen gleich $(280 \pm 6)\, m_e$. Für die Masse der positiv geladenen π- und μ-Mesonen ergaben sich die Werte $(278 \pm 8)\, m_e$ und $(212 \pm 6)\, m_e$.

Die neuesten experimentellen Ergebnisse zeigen also, daß positiv und negativ geladene π-Mesonen ein und dieselbe Masse besitzen. Die genauesten Messungen ergeben für die Masse des π-Mesons den Wert

$$m_\pi = (276 \pm 6)\, m_e\,,$$

und für die Masse des μ-Mesons

$$m_\mu = (212 \pm 6)\, m_e\,.$$

Die Abschätzung der Lebensdauer der in der Höhenstrahlung auftretenden π-Mesonen ergab eine Größenordnung von 10^{-8} sec. Die genauesten Messungen wurden an künstlich erzeugten π-Mesonen durchgeführt. Wir wollen hier kurz zwei Methoden dafür schildern.

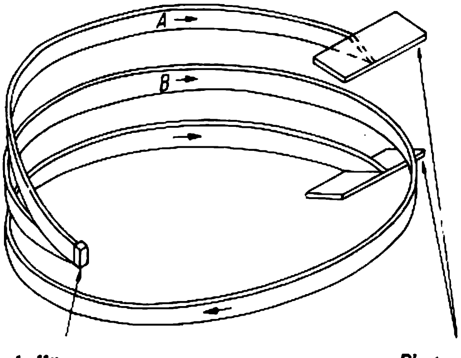


Abb. 465. Schema der Apparatur zur Messung der mittleren Lebensdauer von π-Mesonen, die im Phasotron erzeugt wurden

Die erste ist im Prinzip der Methode der Lebensdauermessung aus der anormalen Absorption analog, die eine Folge des Zerfalls der Mesonen ist (siehe § 327). Das Versuchsschema sehen wir in Abb. 465. Ein Metallblock, in dem zwei spiralförmige Kanäle ausgeschnitten sind, ist in der Vakuumkammer des Phasotrons angebracht. Die Mesonen, die in dem Auffänger erzeugt werden, fliegen in den Kanälen A und B dahin. Kanal A ist eine

halbe, Kanal B anderthalb Windungen lang. Am Ende der Kanäle befinden sich Photoplatten. Wenn die π-Mesonen auf ihrem Weg in den Kanälen nicht zerfallen, würde die Anzahl der π-Mesonen pro Flächeneinheit beider Platten nur durch den Grad der Fokussierung der π-Mesonen durch das Magnetfeld und die geometrischen Abmessungen des Systems, d. h. die Weglänge der π-Mesonen in beiden Kanälen, bestimmt sein. Das Vorhandensein eines Zerfalls jedoch erzeugt eine „anormale Absorption" der π-Mesonen, aus deren Größe man ihre mittlere Lebensdauer bestimmen kann. Diese ist durch die Zahl der Mesonen, die aus der Gruppe B beim Durchlaufen der zusätzlichen Spiralwindung verschwunden sind, gegeben.

Die andere Methode, nach der man die Lebensdauer der π-Mesonen mißt, ist im Prinzip der Halbwertszeitmessung eines ruhenden μ-Mesons (siehe § 327) analog. Da die Lebensdauer der π-Mesonen von der Größenordnung 10^{-8} sec ist, kann man für die Registrierung ihres Zerfalls keine GEIGER-MÜLLER-Zählrohre verwenden, bei denen der Zeitraum zwischen dem Durchgang des geladenen Teilchens und der Auslösung des Spannungsimpulses von derselben oder sogar noch höheren Größenordnung ist. Benutzt man dagegen zur Registrierung der π-Mesonen und der bei ihrem Zerfall entstehenden μ-Mesonen weitaus weniger träge Szintillationsstoffe, deren Abklingdauer 10^{-9} sec beträgt, und Sekundärelektronenvervielfacher, so ist es möglich, die Zerfallskurve der π-Mesonen wie bei den μ-Mesonen aufzunehmen.

Die Genauigkeit der bis jetzt ausgeführten Messungen ist noch nicht groß genug, um feststellen zu können, ob π- und μ-Mesonen dieselbe oder eine verschiedene Lebensdauer besitzen. Aus den angestellten Messungen ergibt sich, daß die mittlere Lebensdauer der π-Mesonen zwischen $(2 - 3)\ 10^{-8}$ sec liegt.

§ 332. Neutrale Mesonen

Im Jahre 1950 entdeckten BJORKLUND und andere, daß bei der Bestrahlung des Auffängers mit schnellen Protonen einer Energie $>$ 200 MeV, die in einem Phasotron beschleunigt wurden, der Auffänger zur Quelle einer intensiven γ-Strahlung wird. Ihre Intensität wächst stark mit zunehmender Protonenenergie, ähnlich wie die π-Mesonenausbeute bei Bestrahlung des Auffängers mit schnellen Protonen oder α-Teilchen anwächst (siehe Abb. 463). Es konnte gezeigt werden, daß irgendwelche bekannten Prozesse, z. B. die Anregung der Atomkerne des Auffängermaterials durch schnelle Protonen oder die Bremsstrahlung der schnellen Protonen, die auf den Auffänger aufschlagen, oder endlich auch die Strahlung, die beim Austausch der Ladungen zwischen den schnellen Protonen und den Neutronen des Auffängers entsteht, nicht zu einer derartigen γ-Strahlung führen können. Es gelang, die Energie der aus dem Auffänger austretenden γ-Quanten zu bestimmen, indem man das Energiespektrum der Elektron-Positron-Paare, die sich beim Auftreffen der γ-Quanten auf eine Bleiplatte bilden, ausmaß. Die Messung der Winkelverteilung der γ-Quanten zeigte, daß die Verteilung der γ-Quanten in einem Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt des schnellen Protons und des Empfängernukleons (mit dem dieses Proton zusammenstößt) liegt, isotrop ist. Die Energie dieser γ-Quanten ergab sich zu annähernd 70 MeV. Alle diese Ergebnisse lassen die Vermutung berechtigt erscheinen, daß sich im vorliegenden Falle die „Geburt" von neutralen Mesonen, die nach dem Schema

$$\text{neutrales Meson} \rightarrow h\nu + h\nu$$

in zwei γ-Quanten zerfallen, im Auffänger vollzieht.

In diesen Versuchen überstieg die Energie der schnellen Protonen nur wenig den Schwellenwert der Energie, die für die Entstehung neutraler Mesonen notwendig ist, so daß deren kinetische Energie nicht groß war. Daher ist die Energie von 70 MeV der γ-Quanten ungefähr gleich der halben Ruheenergie des neutralen Mesons, woraus sich für dieses eine Masse von etwa 280 m_e ergibt. Die Masse des neutralen Mesons ist also etwa so groß wie die des π-Mesons. Aus obigem Zerfallsschema des neutralen Mesons folgt, daß sein Spin gleich 0 ist.

Die Richtigkeit einer solchen Interpretation der Natur der γ-Strahlung, die beim Bombardement des Auffängermaterials mit schnellen Protonen entsteht, wurde durch weitere Versuche bestätigt. Hierbei wurde eine Methode der Konzidenz von γ-Strahlen in zwei Detektoren angewandt und gezeigt, daß in dem Auffänger gleichzeitig zwei γ-Quanten entstehen.

Die Ergebnisse bezüglich der Ausbeute von π^0-Mesonen, die in einem Beschleuniger erzeugt wurden, sprechen dafür, daß der Querschnitt für die π^0-Mesonenbildung von derselben Größenordnung wie der für die Entstehung geladener $\pi^\pm$-Mesonen ist. Daraus folgt unmittelbar, daß neutrale Mesonen auch in der Höhenstrahlung vorhanden sein müssen, da geladene $\pi^\pm$-Mesonen darin entstehen. Tatsächlich wurde 1950 auch der Beweis dafür erbracht, daß die primäre kosmische Strahlung in den höchsten Atmosphärenschichten neben geladenen auch neutrale π^0-Mesonen erzeugt. Da diese eine sehr kurze Lebensdauer haben, zerfallen sie, ehe sie sich weit von ihrem Bildungsort entfernt haben. Die bei diesem Zerfall entstehenden harten γ-Quanten stellen, wie jetzt verständlich ist, die Hauptquelle der weichen Komponente der Höhenstrahlung dar. Diese γ-Quanten erzeugen in einer Photoplatte, auf die sie auftreffen, Paare von Elektronen und Positronen. Durch die Untersuchung des Energiespektrums dieser Paar-Elektronen und -Positronen mit Hilfe elektronenempfindlicher Photoplatten wurde es möglich, das Spektrum der beim Zerfall neutraler Mesonen entstehenden γ-Strahlen zu bestimmen. Die Form dieses Spektrums ließ auf die Masse des neutralen Mesons schließen, die sich zu $(295 \pm 20)\ m_e$ ergab, einem Wert, der die oben erwähnte Schätzung (280 m_e) bestätigt.

Es gelang auch, auf folgende Weise die Lebensdauer des neutralen Mesons abzuschätzen. Auf „belichteten" Photoplatten sind häufig Sterne und in einem gewissen Abstand davon ein Elektron-Positron-Paar zu sehen. Dieses muß sich offenbar beim Zerfall eines im Stern entstandenen neutralen Mesons gebildet haben. In Abb. 466 ist ein solcher Fall skizziert. Wir sehen bei A einen Stern und in einem gewissen Abstand davon die Spuren eines Elektron-Positron-Paares. Durch die dicke Punktierung ist die vermutliche Bahn des neutralen Mesons, das im Punkte B in zwei γ-Quanten zerfällt, gekennzeichnet. Der Winkel zwischen den Spuren des Elektronen- und Positronenpaares ist sehr klein — von der Größenordnung 0,1°. Verlängern wir die Mittellinie dieses Winkels nach rückwärts, dann finden wir die Flugrichtung eines der γ-Quanten, die beim π^0-Mesonenzerfall entstanden sind mit derselben Genauigkeit, also 0,1°. Die Gerade r ist der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Sterns und dieser Richtung. Es ist klar, daß die Lebensdauer τ_{π^0} des neutralen Mesons um so größer ist, je größer dieser Abstand r ist. Um die Lebensdauer τ_{π^0} be-

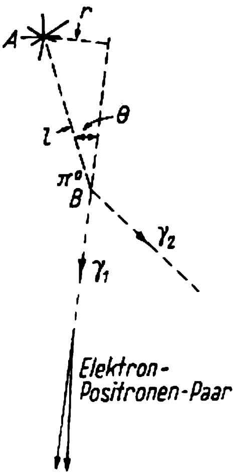


Abb. 466. Methode zur Bestimmung der Lebensdauer von neutralen Mesonen

stimmen zu können, muß man diesen Abstand für eine große Anzahl von Sternen und die Geschwindigkeit der neutralen Mesonen kennen.

Aus derartigen Messungen ergibt sich die Lebensdauer des neutralen Mesons zu ungefähr $2{,}5 \cdot 10^{-14}$ sec.

§ 333. Mesonen anderen Typs

Wir haben gesehen, daß bei der Wechselwirkung schneller Teilchen mit Nukleonen π-Mesonen (π^+, π^- und π^0) entstehen. Da ein π-Mesonenaustausch unter den Nukleonen die Natur der Kernkräfte erklären soll, ist es für die Mesonentheorie und die Physik überhaupt außerordentlich wichtig, zu wissen, ob in der Natur noch andere Mesonen auftreten.

In den letzten Jahren erhielt man tatsächlich Beweise für die Existenz anderer Mesonen, die schwerer als die π-Mesonen sind. Diese Mesonen sind nur in der Höhenstrahlung zu beobachten, da die Energie schneller Teilchen, die in Beschleunigern erhalten werden, entweder zur Erzeugung derartiger Mesonen nicht ausreicht oder nahe beim Schwellenwert der entsprechenden Energie liegt. Wir wollen in diesem Zusammenhang hier nur auf einige Arbeiten hinweisen.

Die Versuche von A. J. Alichanjan und seinen Mitarbeitern ließen darauf schließen, daß Mesonen mit einer Masse zwischen 600 und 1000 m_e existieren, wobei es möglich ist, daß in diesem Intervall zwei Mesonenmassen vorkommen. Rochester und Buttler und nach ihnen Anderson und seine Mitarbeiter konnten zeigen, daß es wahrscheinlich eine neue Triade von Mesonen (neutrale, positive und negative) mit einer Masse zwischen 600 und 1000 m_e gibt. Die Lebensdauer dieser Mesonen liegt in der Größenordnung von 10^{-9} bis 10^{-11} sec. Durch ihren Zerfall entstehen wahrscheinlich π- und μ-Mesonen.

Die intensive Erforschung der Eigenschaften der schweren Mesonen der Höhenstrahlung und die schnelle Entwicklung der Beschleunigungsanlagen, die gestatten geladene Teilchen sehr großer Energie zu erzeugen, gibt uns die berechtigte Hoffnung, in den nächsten Jahren Endgültiges über die Verschiedenartigkeit der schweren Mesonen zu hören. Damit wird dann die Schaffung einer experimentellen Grundlage für eine Mesonentheorie der Kernkräfte abgeschlossen sein.

§ 334. Erscheinungen bei Wechselwirkungen zwischen primären Höhenstrahlen und Atomkernen

Bei ihrem Eindringen in die Erdatmosphäre stoßen die primären Höhenstrahlungsteilchen mit Kernen zusammen. Wir wollen hier einige Erscheinungen, die bei derartigen Zusammenstößen auftreten, betrachten. Zunächst sei erwähnt, daß die Primärstrahlung fast vollständig in den höchsten Atmosphärenschichten auf einer Strecke von einigen Hundert Gramm Luftmasse absorbiert wird. Die Absorption schneller Protonen erfolgt z. B. nach einem $e^{-\frac{x}{150}}$-Gesetz (wo x der Druck in g/cm² ist), d. h., daß in einer Höhe, in welcher der Druck gleich 150 g/cm² ist, die Zahl der primären Protonen um den Faktor e abgenommen hat. Noch schneller werden schwerere Kerne absorbiert. Für Kerne mit $Z > 12$ ist das Absorptionsgesetz $\sim e^{-\frac{x}{20}}$. Die Zusammenstöße der Primärstrahlung mit den Kernen rufen Kernspaltungen hervor, die das Auftreten neuer Teilchen wie Protonen, Neutronen, schwererer Kernteilchen (Deuteronen, Tritonen, α-Teilchen), π-Mesonen (geladene und neutrale) und einer wesentlich kleineren Anzahl von Mesonen, die schwerer als π-Mesonen sind, zur Folge haben. Die klarste Vorstellung von diesen Prozessen erhält man heute durch eine genaue Untersuchung von Photoplatten, die in den höchsten Atmosphärenschichten „be-

lichtet" wurden. Sehen wir uns als Beispiel dafür die Abbildung 467 an. Darauf erkennen wir einen Stern, der durch den Zusammenstoß eines schnellen Protons mit einer Energie von etwa 5 BeV mit einem der leichten Kerne der Emulsion entstanden ist. Die Spur *A* stammt von dem schnellen primären Proton. Von der Mitte des Sterns gehen drei Spuren stark ionisierender Teilchen nach verschiedenen Richtungen aus. Es sind dies Protonen verhältnismäßig geringer Energie. Außerdem sind auf der Aufnahme neun Spuren schneller Teilchen mit minimalem Ionisationsvermögen (relativistischer Teilchen) zu erkennen. Davon halten acht die Bewegungsrichtung des primären Protons ein. Das Studium der Streuung, die dieses Teilchen in der Emulsion erfahren hat, erlaubt die Feststellung, daß ein Teil dieser Spuren π-Mesonen, ein anderer schnellen Protonen zuzuschreiben ist. Viele solcher in den letzten Jahren erhaltenen Photographien zeigen, daß in solchen Sternen Gruppen schneller Teilchen entstehen, π-Mesonen, Protonen und Neutronen (die Spuren der letzteren sind natürlich nicht auf Photoplatten sichtbar), deren Bewegungsrichtung mit derjenigen des primären Teilchens zusammenfällt, sowie eine Gruppe langsamer Protonen, Neutronen und anderer Kernteilchen, die ihren Richtungen nach mehr oder weniger isotrop verteilt sind. Es ist anzunehmen, daß die Aussendung der ersten Teilchengruppe fast unmittelbar nach dem Zusammenstoß während einer Zeit von etwa 10^{-23} sec erfolgt. Danach findet eine „Erwärmung" des Kerns statt. Die Energie aller oder eines Teils der in ihm vorhandenen Nukleonen erhöht sich und kann ausreichen, um einen vollkommenen oder teilweisen Zerfall des Kerns zu bewirken, wobei die Nukleonen oder schwerere langsame Teilchen nach verschiedenen Seiten aus dem Kern herausfliegen. Dabei besitzt jedes dieser Teilchen eine Energie von einigen 10 MeV.

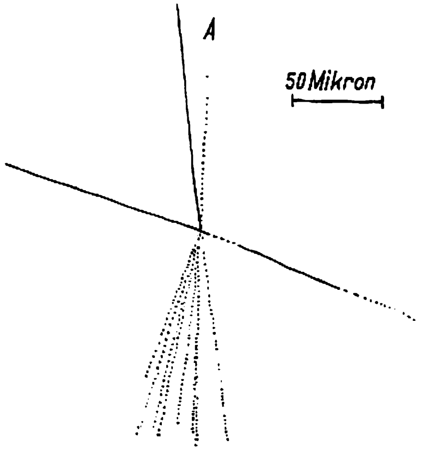


Abb. 467. Ein von einem schnellen Proton mit einer Energie von rd. 5 BeV erzeugter Stern. Aus dem Kern fliegen neun durchdringende Teilchen mit sehr geringem Ionisationsvermögen (schnelle Protonen und π-Mesonen) und drei langsame Protonen heraus. Die erste Teilchengruppe folgt der Flugrichtung des primären Protons, die zweite Gruppe ist gleichmäßig im Raum verteilt

Lange bevor der technische Fortschritt durch die Herstellung empfindlicher Photoplatten die Beobachtung solcher Sterne ermöglichte, stießen mehrere Forscher auf eine Erscheinung, die die Bezeichnung „durchdringende Schauer" erhielt.

Man stellte mit einem System aus GEIGER-MÜLLERschen Zählrohren, das durch mehrere Dezimeter dicke Schichten Blei abgeschirmt war, um die Möglichkeit der Elektronenregistrierung auszuschließen, fest, daß trotzdem Schauer angezeigt wurden, denen also ein stärkeres Durchdringungsvermögen zugeschrieben werden mußte. Eine derartige Erscheinung kann nicht von Elektronen großer Energie herrühren. Man nahm an, daß die durchdringenden Schauer durch energiereiche Protonen und Mesonen gebildet werden. Diese sollten von Sternen, die von schnellen Teilchen in dem Abschirmmaterial erzeugt wurden, stammen. Diese Vermutung hat sich als zutreffend erwiesen. Entstünde der in Abb. 467 gezeigte Stern nicht in einer Photoplatte, sondern in der das Zählrohrsystem abschirmenden Substanz, so würde er wegen des hohen Durchdringungsvermögens der schnellen Protonen und Mesonen als durchdringender Schauer registriert werden. In derartigen durchdringenden Schauern ist auch eine weiche Komponente beobachtbar, die aus Elektronen, Positronen und Photonen besteht. Der Entstehungsmechanismus der weichen Komponente der durchdringenden Schauer ist heute verständlich. Wir haben gesehen, daß neben der Entstehung geladener $\pi^{\pm}$-Mesonen auch die Bildung neutraler π^0-Mesonen stattfindet, die nach einer Zeit von der Größenordnung 10^{-14} sec in je zwei γ-Quanten zerfallen. Diese energiereichen γ-Quanten erzeugen eine Elektronen-Photonen-Lawine, die weiche „Begleitung" der durchdringenden Schauer. Die Eigenschaften solcher „Elektronen-Kern-Schauer" wurden von D.W. SKOBELZIN, N.A. DOBROTIN, G.T. SAZEPIN und ihren Mitarbeitern eingehend untersucht.

Es versteht sich, daß derartige Zusammenstöße schneller Teilchen mit Kernen nicht immer zur Emission einer großen Zahl von Teilchen aus dem Kern führen müssen. Je größer jedoch im Mittel die Energie des primären Teilchens ist, um so mächtiger wird auch der Stern sein, den es bildet. Dabei kann es vorkommen, daß die ausgeschleuderten Nukleonen oder Mesonen noch über eine so große Energie verfügen, daß sie eine neue Kernexplosion hervorrufen können. So erzeugt ein Primärteilchen ausreichend großer Energie aufeinanderfolgende Kernexplosionen. Wir haben damit einen neuen Typ eines Kaskadenprozesses, der nicht elektromagnetischer Natur ist, sondern ausgesprochenen Kerncharakter trägt, und sich in der Atmosphäre abspielt.

Die Arbeiten D. W. SKOBELZINS, N. A. DOBROTINS und G. T. SAZEPINS ergaben, daß mit dem Eindringen der Elektronen-Kern-Schauer in die Atmosphäre eine Abnahme der Anzahl der Kernteilchen in diesen Schauern verbunden ist. Diese beruht auf der Absorption durch die Kerne der Luftatome, der Ionisation und dem π-Mesonenzerfall. Gleichzeitig verstärkt sich durch die Kaskadenvervielfachung die Elektronen-Photonen-Komponente des Elektronen-Kern-Schauers. Dieses Bild ließ die Deutung einer Reihe von Gesetzmäßigkeiten in den durchdringenden Schauern und die Betrachtung der verschiedenartigen Schauer von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zu. Speziell erklärte es die unter der Bezeichnung AUGER-Schauer bekannte Erscheinung vollkommen. AUGER fand, daß die Anzahl der Entladungskoinzidenzen in zwei Zählrohren, die in einer horizontalen Ebene in großem Abstand voneinander angeordnet sind, die zu erwartende Anzahl zufälliger Koinzidenzen wesentlich übertrifft und bei zunehmender Entfernung zwischen den Zählern langsam abnimmt. Die Anzahl der Koinzidenzen ändert sich bei einer Vergrößerung der Entfernung zwischen den Zählrohren von 10 bis auf 100 m nur um den Faktor 5.

G. T. SAZEPIN und W. W. MILLER konnten zeigen, daß sogar bei einem Abstand von einem Kilometer zwischen den Zählrohren die Anzahl der Koinzidenzen das Untergrundrauschen um das Dreifache übertrifft. Diese Befunde zeigen, daß in der Luft Ströme von Teilchen existieren, die ihrem Ursprung nach zusammengehören und große Flächen von Zehn-, ja Hunderttausenden von Quadratmetern überdecken.

Kennt man die Teilchendichte in einem AUGER-Schauer, die mittlere Energie jedes Teilchens und die vom Schauer bedeckte Fläche, so kann man die Energie des Primärteilchens, das einen derartigen Schauer auslöste, berechnen. Es zeigt sich, daß diese Energie zuweilen sehr große Werte, 10^{16} — 10^{17}V, erreicht.

Bis vor kurzem hatte es den Anschein, als seien die AUGER-Schauer gleicher Natur wie die Kaskadenschauer, d. h., daß sie das Endresultat einer Kaskadenvervielfachung in der Luft durch Elektronen sehr großer Energie, die aus dem Weltraum stammen, oder sich in den obersten Atmosphärenschichten gebildet haben, darstellen.

Wir wissen aber schon, daß in der primären kosmischen Strahlung keine Elektronen vorkommen. Außerdem ergaben die Forschungen von D. W. SKOBELZIN, G. T. SAZEPIN und ihren Mitarbeitern, daß man die AUGER-Schauer nicht nur ausschließlich durch eine Kaskadenvervielfachung von Elektronen deuten kann. Sie erwiesen sich als eine Art von Elektronen-Kern-Schauer, die von primären Kernteilchen sehr hoher Energie erzeugt werden und in denen die Elektronen und Photonen wesentlich vorherrschen, trotzdem aber auch noch eine gewisse Menge Kernteilchen vorhanden ist.

Abschließend wollen wir das allgemeine Bild der Entstehung der beiden Komponenten der Höhenstrahlung betrachten. Die Primärstrahlung erzeugt beim Zusammenstoß mit den Luftatomen geladene und neutrale π-Mesonen und schwerere Mesonen. Wegen ihrer kurzen Lebensdauer (10^{-8} sec) zerfallen die geladenen π-Mesonen hoher Energie in einem Abstand von etwa 100 m vom Ort ihrer Entstehung. Als Zerfallsprodukte treten μ-Mesonen auf, die den Hauptbestandteil der harten Komponente ausmachen.

Die weiche Komponente wird von γ-Quanten, die beim Zerfall neutraler Mesonen entstehen, und Elektronen des μ-Mesonenzerfalls gebildet. Die Zahl der neutralen Mesonen ist ungefähr gleich der Zahl der geladenen, ihre Energiespektren sind einander gleich. Daraus erklärt sich, daß in der weichen und in der harten Komponente annähernd die gleiche Energiemenge enthalten ist.

Wahrscheinlich spielen die schwereren Mesonen bei der Bildung der beiden Höhenstrahlungskomponenten eine wesentliche Rolle, doch ist diese vorerst qualitativ nur schwierig zu erfassen.

Außer den Elektronen, Positronen, γ-Strahlen und Mesonen sind in beiden Komponenten in allen Höhen Protonen und Neutronen vorhanden. So folgt z. B. aus Versuchen von ALICHANJAN und seinen Mitarbeitern, daß in einer Höhe von 3250 m ungefähr 10% der Gesamtintensität der Höhenstrahlung von Protonen stammt, die etwa zu einer Hälfte in der harten, zur anderen Hälfte in der weichen Komponente auftreten. Auf Meeresniveau ist die Zahl der Protonen nur klein, sie wächst jedoch in Höhen $>$ 3250 m schnell an. Diese Protonen stammen nicht aus der Primärstrahlung, die bis in diese Höhen eingedrungen ist, sondern sind sekundären Charakters. Sie gehen ebenso wie auch die Neutronen aus Kaskaden-Kernprozessen hervor.

§ 335. Der Ursprung der Höhenstrahlung

Die Frage nach der Herkunft der Höhenstrahlung stellt zweifellos den schwierigsten und am wenigsten erforschten Teil des ganzen Höhenstrahlungsproblems dar. Wo im All befinden sich die Quellen, aus denen sie stammt, welcher Art ist der Beschleunigungsmechanismus, der den Primärteilchen ihre ungeheuren Energien erteilt, wie bekommt die Höhenst ahlung die für sie so charakteristische Isotropie im Raum, welche Prozesse spielen sich mit der Primärstrahlung ab, bevor sie die Lufthülle der Erde erreicht — das sind noch weitaus

nicht alle Fragen, die im Zusammenhang mit dem Problem der Herkunft der Höhenstrahlung auftauchen. Eine erschöpfende Antwort darauf gibt es bis heute nicht. Alles, was wir vorläufig besitzen, sind mehr oder weniger begründete Hypothesen und eine immer umfassendere Anhäufung experimenteller Befunde, die eine sichere Grundlage zur Enträtselung des Ursprungs der Höhenstrahlung darstellen werden. Betrachtet man die Höhenstrahlung im Maßstab unseres Milchstraßensystems, so muß man sich darüber klar sein, daß sie eine ungeheuer große Energie in sich birgt, die alle in anderer Form auftretenden Energieansammlungen mit Ausnahme derjenigen natürlich, die der Ruhemasse der Stern- und interstellaren Materie entspricht, weit übertrifft. Bei Zusammenstößen mit Protonen der interstellaren Materie verlieren die Höhenstrahlen einen Teil ihrer Energie durch Mesonenbildung genauso, wie sie bei den verschiedenen Kernspaltungsprozessen in der Lufthülle der Erde Energie verlieren. Obwohl die Dichte des interstellaren Mediums, das im wesentlichen aus Wasserstoff besteht, außerordentlich gering ist und etwa nur 10^{-24} g/cm^3, was einem Proton pro Kubikzentimeter entspricht, beträgt, würden diese Verluste doch dazu führen, daß die Höhenstrahlung nach 50 Millionen Lichtjahren ihre ganze Energie verloren hätten, wenn diese nicht aus irgendeiner starken Quelle ergänzt würde. Rechnungen zeigen, daß unter der Annahme, die Höhenstrahlung sei nur auf unser Sternsystem begrenzt und hierin in überall gleicher Dichte verteilt, zur Erhaltung ihrer Intensität ein ganz beachtlicher Teil, etwa $^1/_{10000}$, der von allen Sternen erzeugten Energie aufgewendet werden müßte. Jede Entstehungstheorie der kosmischen Strahlung muß darüber Auskunft geben, welcher Art der Mechanismus ist, der in diesem Ausmaß die Energie des Sterninnern in die der kosmischen Primärstrahlung umwandelt.

Einige Physiker sprachen die Vermutung aus, daß die Höhenstrahlung nicht die ganze Galaxis erfüllt, sondern im wesentlichen nur innerhalb der Grenze des Sonnensystems anzutreffen ist, da sie der Sonne entstammt. Wäre das zutreffend, so fielen die Schwierigkeiten bei der Erklärung der Herkunft der Höhenstrahlung und der schnellen Ergänzung ihrer Energie wahrscheinlich fort, aber es entstünde eine andere: Wie wäre dann die gleichmäßige Verteilung über den ganzen Raum und die Unabhängigkeit ihrer Intensität von den Sonnenzeiten zu deuten? Um dies zu erklären, kam man zu sehr unreellen Annahmen von der Existenz eines sich über das ganze Sonnensystem erstreckenden schwachen Magnetfelds, das jedoch angeblich auch wieder stark genug ist, um die Höhenstrahlung durch Mehrfachablenkungen in den Grenzen des Systems zu halten und ihr die beobachtete Gleichverteilung zu geben. Die in der jüngsten Zeit (1950) durch Photoplattenaufstiege erhaltenen Daten sprechen dafür, daß wahrscheinlich die Intensität eines kleinen Anteils der Primärstrahlung stark von den Sonnenzeiten abhängt: Die schweren Kerne mit einer Ladung größer als 10 ($Z > 10$) sind am Tage einige Male häufiger als nachts. Wenn sich diese Tatsache bestätigt, so muß sie ebenfalls in einer Theorie des Ursprungs der Höhenstrahlung ihre Erklärung finden.

Alle Hypothesen, die eine Erklärung des Ursprungs der Höhenstrahlung zum Ziel haben, können in zwei Kategorien eingeteilt werden. Zur ersten gehören die Hypothesen, die versuchen, die Bildung der Höhenstrahlung aus der Zerstrahlung der Materie, die sich z.B. im Innern der Sterne vollzieht, herzuleiten. Hypothesen dieser Art haben aber heute sicherlich nur noch historisches Interesse. Wir erwähnten, daß in der Höhenstrahlung Teilchen mit Energien zu 10^{17} eV vorkommen, während die Zerstrahlung des schwersten Kerns keine Energie größer als $2 \cdot 10^{11}$ eV ergeben kann. Außerdem ist vollkommen unverständlich, wie sich diese Energie auf ein Proton oder einen Kern konzentrieren kann.

In der zweiten Gruppe der Hypothesen, die im Lichte bekannter Tatsachen über die Natur der Primärstrahlung am überzeugendsten erscheinen, wird angenommen, daß die

Höhenstrahlung durch Beschleunigung von Protonen und vollständig ionisierten Kernen in elektromagnetischen Feldern, die im Weltraum vorhanden sind, entsteht. Auf eine der möglichen und sicher die wahrscheinlichste Quelle elektromagnetischer Felder, die den kosmischen Teilchen ihre großen Energien erteilen kann, wurde von J. P. Terletzki hingewiesen. Er machte darauf aufmerksam, daß die Existenz „magnetischer Sterne", die eine wohlbekannte Tatsache ist, die Entstehung der Höhenstrahlung erklären könnte. Bei der Drehung derartiger Sterne oder bei einer zeitlichen Änderung der mit ihnen verbundenen Magnetfelder entsteht ein induziertes elektrisches Feld. Ist das magnetische Feld auf der Sternoberfläche und die Ausdehnung des Sterns hinreichend groß, so können, wie Rechnungen zeigen, geladene Teilchen auf beträchtliche Energien beschleunigt werden. Ein derartiger Beschleunigungsmechanismus gleicht im Prinzip dem der Beschleunigung von Teilchen im Betatron. Eine hinreichende Zahl solcher im All verstreuter Induktionsbeschleuniger könnte sowohl die beobachtete Intensität der primären kosmischen Strahlung als auch deren räumliche Isotropie erklären.

Fermi wies auf einen anderen Beschleunigungsmechanismus hin, der ebenfalls die Entstehung der Höhenstrahlung zu erklären vermag. Man hat Beweise dafür, daß die sehr dünne interstellare Materie den Raum nicht gleichmäßig ausfüllt, sondern eine Art „Wolken" von der Ausdehnung einiger zehn Lichtjahre bildet. Die „Wolken" des interstellaren Mediums bewegen sich mit einer Geschwindigkeit in der Größenordnung von einigen zehn Kilometern in der Sekunde. Mit jeder dieser Wolken ist ein gewisses Magnetfeld von etwa 10^{-5} Gauß verknüpft. Existieren im interstellaren Raum schnelle Protonen ausreichend hoher Energie, so wird sich bei jedem Zusammenstoß eines solchen Protons mit einer sich bewegenden „Wolke" die Energie des Protons vergrößern. Das Wesen dieser Erscheinung wird aus der folgenden Analogie leicht verständlich. Wir stellen uns irgendein „Gas" vor, das aus massiven, sich schnell bewegenden Teilchen besteht, und betrachten die Einstellung des thermischen Gleichgewichts zwischen diesem Gas und beispielsweise einem Proton. Zur Einstellung des Gleichgewichts darf das Proton nicht von den „Molekülen" dieses Gases absorbiert werden. Bei jedem Zusammenstoß wird sich die Protonenenergie vergrößern. Hat sich das Gleichgewicht eingestellt, so ist die Energie des Protons gleich der mittleren Energie der Moleküle, die sehr groß sein kann. Nach der Hypothese von Fermi sind die sich dahinbewegenden „Wolken", die Magnetfelder besitzen, die Analoga zu den „Gasmolekülen", die die Protonen der Höhenstrahlung beschleunigen. Obwohl die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes zwischen einem Proton und einer „Wolke" klein ist, können nach astronomischen Zeiten die Protonen doch auf solche Energien beschleunigt werden, wie sie in der Höhenstrahlung auftreten.

Es ist möglich, daß die beiden betrachteten Beschleunigungsmechanismen gleichzeitig wirken. Durch die elektromagnetische Induktion werden den Teilchen Energien erteilt, die dazu ausreichen, um den zweiten Beschleunigungsmechanismus wirksam werden zu lassen.

ANHANG

VII. Berechnung einiger Integrale

1. Das Integral

$$I_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx$$

für beliebige ganze k ist leicht durch Differentiation nach dem Parameter zu bestimmen. Das Integral

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ist bekannt. Danach erhalten wir durch Differentiation nach a

$$-\frac{dI_0}{da} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = I_2\,,$$

$$-\frac{dI_2}{da} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}} = I_4$$

. . . .

und allgemein

$$I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}}\,. \qquad \text{(VII,1)}$$

2. Auch das Integral

$$I_k = \int_0^{\infty} x^k e^{-ax} dx$$

ist leicht durch Differentiation nach seinem Parameter auszurechnen. Die direkte Rechnung ergibt zunächst

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}\,;$$

durch nachfolgende Differentiation nach a erhalten wir

$$-\frac{dI_0}{da} = \int_0^\infty x e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^2} = I_1,$$

$$-\frac{dI_1}{da} = \int_0^\infty x^2 e^{-ax}\,dx = \frac{1\cdot 2}{a^3} = I_2,$$

$$-\frac{dI_2}{da} = \int_0^\infty x^3 e^{-ax}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^4} = I_3$$

. . . .

allgemein

$$I_k = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}{a^{k+1}} \equiv \frac{k!}{a^{k+1}}. \qquad \text{(VII,2)}$$

VIII. Die elektrostatische Wechselwirkungsenergie zweier Ladungen

1. Bei der Ermittlung des Grundzustands eines Heliumatoms (§ 189) stießen wir auf ein sechsfaches Integral, das in abgekürzter Form geschrieben werden kann:

$$I = \iint \frac{e^{-\varrho_1} e^{-\varrho_2}}{\varrho_{12}}\, d\tau_1\, d\tau_2, \qquad \text{(VIII,1)}$$

worin

$$d\tau_1 = \varrho_1^2\, d\varrho_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1, \quad d\tau_2 = \varrho_2^2\, d\varrho_2 \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, d\varphi_2$$

ist. Auf ein derartiges Integral führt auch die Berechnung der Wechselwirkungsenergie zwischen zwei sphärisch symmetrischen Ladungen der Dichte $e^{-\varrho_1}$ und $e^{-\varrho_2}$. Um bei der Berechnung dieses Integrals ein anschauliches Bild vor Augen zu haben, werden wir gerade dieses Problem lösen.

Der Lösungsweg ist folgender: Zunächst suchen wir das Potential, das durch die erste Ladung entsteht, wozu wir die Integration über $d\tau_1$ vollziehen. Danach ermitteln wir die Energie der zweiten Ladung im Feld der ersteren, die uns auch das Integral (VIII,1) liefert.

So beginnen wir also mit der Berechnung des Potentials der ersten Ladung und integrieren zunächst über die Winkel ϑ_1 und φ_1, d. h., wir bestimmen das Integral

$$e^{-\varrho_1}\varrho_1^2\, d\varrho_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1}{\varrho_{12}}. \qquad \text{(VIII,2)}$$

Dabei erhalten wir das Potential, das durch eine Kugelschale mit den Radien ϱ_1 und $\varrho_1 + d\varrho_1$ der ersten Ladung im Punkte A erzeugt wird, wo sich ein Element der zweiten Ladung $e^{-\varrho_2}\, d\tau_2$ im Abstand ϱ vom Symmetriezentrum O der ersten Ladung befindet (Abb. 468). Der Abstand ϱ_{12} hängt von ϑ_1 ab und ist, wie aus der Zeichnung ersichtlich, gleich

$$\varrho_{12} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1 - 2\varrho\varrho_1 \cos\vartheta_1}.$$

Somit ist

$$e^{-\varrho_1}\varrho_1^2\,d\varrho_1\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\varrho_{12}}=2\pi e^{-\varrho_1}\varrho_1^2\,d\varrho_1\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1\cos\vartheta_1}}\,.$$

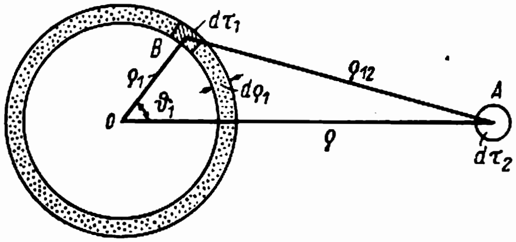


Abb. 468

Für die Berechnung des bleibenden Integrals über ϑ substituieren wir

$$\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1\cos\vartheta_1=z^2\,,$$

$$\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1=\frac{1}{\varrho\varrho_1}z\,dz\,.$$

Das Integral ist jetzt leicht auszurechnen:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1\cos\vartheta_1}}=\frac{1}{\varrho\varrho_1}\left(\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2+2\varrho\varrho_1}-\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1}\right).$$

Die zweite Wurzel ist so zu nehmen, daß der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist. Wir erhalten dann

a) für $\varrho>\varrho_1$ $\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1}=\varrho-\varrho_1$,

b) für $\varrho<\varrho_1$ $\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1}=\varrho_1-\varrho$.

Darum ist

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\varrho_{12}}=\begin{cases}2/\varrho & \text{im Falle a)},\\ 2/\varrho_1 & \text{im Falle b)}\end{cases}\tag{VIII,3}$$

und entsprechend

$$2\pi e^{-\varrho_1}\varrho_1^2\,d\varrho_1\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\varrho_{12}}=4\pi\frac{e^{-\varrho_1}\varrho_1^2}{\varrho}\,d\varrho_1\ \text{[im Falle a)]},$$

$$2\pi e^{-\varrho_1}\varrho_1^2\,d\varrho_1\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\varrho_{12}}=4\pi e^{-\varrho_1}\varrho_1\,d\varrho_1\ \text{[im Falle b)]}.$$

Bei der Integration über ϱ sind natürlich beide Fälle zu berücksichtigen. Wir führen diese Integration aus:

$$V(\varrho) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-\varrho_1} d\tau_1}{\varrho_{12}} = 4\pi \int_0^\varrho \frac{e^{-\varrho_1} \varrho_1^2 d\varrho_1}{\varrho} + 4\pi \int_\varrho^\infty e^{-\varrho_1} \varrho_1 d\varrho_1 .$$

Beide Integrale sind leicht durch partielle Integration zu lösen. Wir finden als Ergebnis

$$V(\varrho) = \frac{4\pi}{\varrho} [2 - e^{-\varrho} (\varrho + 2)] . \qquad \text{(VIII,4)}$$

Das gesuchte Integral (VIII,1) hat jetzt die Form

$$I = \int V(\varrho_2) e^{-\varrho_2} d\tau_2 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V(\varrho_2) e^{-\varrho_2} \varrho_2^2 d\varrho_2 \sin\vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2 =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty \frac{4\pi}{\varrho_2} e^{-\varrho_2} [2 - e^{-\varrho_2} (\varrho_2 + 2)] \varrho_2^2 d\varrho_2 = 20\pi^2 . \qquad \text{(VIII,5)}$$

Setzen wir diesen Wert I in Gleichung (189,11) ein, so erhalten wir den auf S. 128 gegebenen Ausdruck.

2. Die Formel für die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Protonen erhält man auf folgende Weise. Wir stellen uns vor, daß die Ladung e eines Protons über den ganzen Raum des Kerns $v = \frac{4}{3} \pi R^3$ verteilt sei, wobei R der Kernradius ist; die Ladungsdichte ist dann $\frac{e}{v}$. Wir berechnen zunächst das Potential $V(\varrho)$, das durch dieses Proton erzeugt wird, und suchen danach die Energie des zweiten Protons, das ebenfalls über den ganzen Kern verteilt sei, im Feld $V(\varrho)$ des ersten Protons auf. Die Rechnung erfolgt nach demselben Schema wie unter 1. Das Potential, das im Punkt A durch die Ladung $\frac{e}{v} d\tau_1$ erzeugt wird, die im Volumenelement $d\tau_1$ um den Punkt B (Abb. 469) verteilt ist, ist gleich

$$\frac{e}{v} \frac{d\tau_1}{\varrho_{12}} = \frac{e}{v} \varrho_1^2 d\varrho_1 \frac{\sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1}{\varrho_{12}} . \qquad \text{(VIII,6)}$$

Das Potential, das durch eine Kugelschale mit den Radien ϱ_1 und $\varrho_1 + d\varrho_1$ entsteht, erhalten wir durch Integration über die Winkel. Wie unter 1. ergibt sich

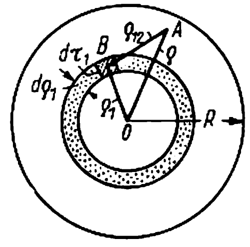


Abb. 469

$$\text{a)} \quad \frac{e}{v} \varrho_1^2 d\varrho_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta_1 d\vartheta_1}{\varrho_{12}} = 4\pi \frac{e}{v} \frac{\varrho_1^2 d\varrho_1}{\varrho}$$

für $\varrho > \varrho_1$, und

$$\text{b)} \quad \frac{e}{v} \varrho_1^2 d\varrho_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta_1 d\vartheta_1}{\varrho_{12}} = 4\pi \frac{e}{v} \varrho_1 d\varrho_1 \quad \text{für } \varrho < \varrho_1 .$$

Um $V(\varrho)$ zu erhalten, ist unter Beachtung der beiden möglichen Fälle über ϱ_1 zu integrieren. Es ergibt sich

$$V(\varrho) = \frac{4\pi e}{v}\left(\int\limits_0^{\varrho} \frac{\varrho_1^2 d\varrho_1}{\varrho} + \int\limits_{\varrho}^{R} \varrho_1 d\varrho_1\right) = \frac{4\pi e}{v}\left(\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^{\varrho} \varrho_1^2 d\varrho_1 + \int\limits_{\varrho}^{R} \varrho_1 d\varrho_1\right) = \frac{4\pi e}{v}\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}\varrho^2\right). \quad \text{(VIII,7)}$$

Jetzt können wir die Energie des zweiten Protons, das über eine Kugel mit dem Radius R verteilt ist, im Felde $V(\varrho)$ ausrechnen

$$U = \frac{e}{v}\int V(\varrho_2)\, d\tau_2 = \frac{e}{v}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R} d\varphi_2 \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, V(\varrho_2)\, \varrho_2^2 d\varrho_2 = \frac{4\pi e}{v}\int\limits_0^{R} V(\varrho_2)\, \varrho_2^2\, d\varrho_2 .$$

Setzen wir $V(\varrho_2)$ aus (VIII,7) ein, so erhalten wir

$$U = \left(\frac{4\pi e}{v}\right)^2 \left\{\frac{1}{2}R^2 \int\limits_0^{R} \varrho_2^2 d\varrho_2 - \frac{1}{6}\int\limits_0^{R} \varrho_2^4 d\varrho_2\right\} =$$

$$= \left(\frac{4\pi e}{v}\right)^2 \left\{\frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}R^5\right\} = \left(\frac{4\pi e}{v}\right)^2 \cdot \frac{2}{15}R^5 .$$

Ersetzen wir nun v durch $\frac{4}{3}\pi R^3$, so finden wir schließlich

$$U = \frac{6}{5}\frac{e^2}{R}, \quad \text{(VIII,8)}$$

den Ausdruck, den wir im Text auf S. 323 benutzt haben.

IX. Quasistationäre Zustände und virtuelle Energieniveaus

Bei der Behandlung der Bewegung eines Teilchens im Feld, das die Form eines Potentialkastens hat (siehe Teil I, § 147), wurde gezeigt, daß in einem derartigen Feld diskrete Energieniveaus existieren, denen stationäre Zustände mit genau bestimmten Energien entsprechen. Zu einem analogen Resultat gelangten wir bei der Behandlung eines Teilchens in einem Potentialtopf endlicher Tiefe oder — was dasselbe ist — in einem Potentialkasten endlicher Höhe (siehe Teil I, Anhang V). Im letzteren Falle hat das Potential die Form der Abb. 470. Ein Teilchen mit einer Energie, die kleiner als die Höhe des Kastens U_0 ist, bleibt dauernd im Kasteninnern und hält sich in einem stationären Zustand mit einer ganz bestimmten Energie auf. Genauer gesagt folgt rechts und links von der Kastenwand die ψ-Funktion einem Exponentialgesetz und geht asymptotisch gegen Null, wenn x gegen Unendlich geht. Dies ist auch die Grundlage für die Behauptung, daß die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Innern des Kastens zu finden, viele Male größer ist als die, es außerhalb der Kastenbegrenzung anzutreffen.

In der Theorie des α-Zerfalls (§ 284) übertrugen wir dieses Resultat auf einen Kasten, der vom restlichen Raum durch einen Wall endlicher Breite abgetrennt ist, d. h. z. B. auf den Fall eines Felds von der in Abb. 471 dargestellten Form.

Tatsächlich ist aber eine derartige vorbehaltlose Übertragung nicht exakt, obwohl sie eine gewisse Berechtigung hat. Im Falle eines Walls endlicher Breite existiert für das

Teilchen, sogar für $E < U_0$, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, durch den Tunneleffekt hinter die Kastengrenze zu gelangen. Sein Zustand ist daher nicht stationär. Ebenso gibt es für ein Teilchen, das von außen auf den Wall auftrifft, eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, durch Tunneleffekt ins Innere des Kastens „durchzusickern". Das Spektrum der Eigenfunktionen ist daher in diesem Falle streng gesehen nicht diskret, sondern kontinuierlich. Wir behandeln diesen Fall eingehender, weil er uns, abgesehen von seiner Präzisierung, zu einigen wichtigen Resultaten führt.

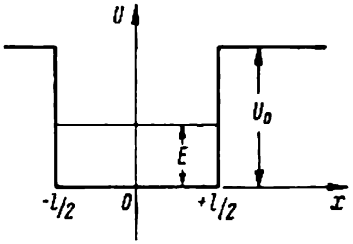


Abb. 470

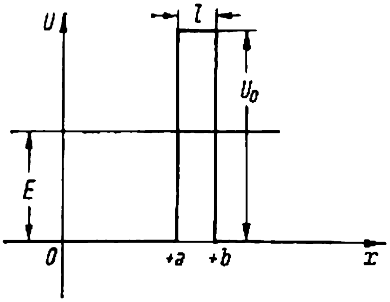


Abb. 471

Wir betrachten also ein Teilchen im Feld, das in der Abb. 471 dargestellt ist. Den Koordinatenursprung legen wir in die Kastenmitte. Die Kastenbreite sei gleich $2a$, die Breite des Walls $l = b - a$. Es existiert für das Teilchen eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, sich an einem beliebigen Ort des Raums aufzuhalten: Im Innern des Kastens, im Innern des Walls oder rechts oder links außerhalb des Kastens. Der Gang der Lösung ist dem in Teil I, § 145, bei der Lösung des Problems eines Walls endlicher Breite verfolgten analog: Wir teilen den gesamten Raum in drei Bereiche ein: I — das Kasteninnere, II — das Innere des Walls, III — den gesamten übrigen Raum. Für jeden Bereich stellen wir die Schrödinger-Gleichung auf und fordern dann, daß die drei Funktionen ψ_I, ψ_{II}, ψ_{III} und ihre ersten Ableitungen an den Grenzen der Bereiche stetig seien.

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Kasteninnere und den Bereich außerhalb des Walls stellt stehende Wellen dar. Möglich sind zwei Typen von stehenden Wellen: Zum Koordinatenursprung symmetrische und antisymmetrische. Die ersteren genügen der Forderung $\psi(x) = \psi(-x)$ und sind durch die Cosinusfunktion darzustellen; die antisymmetrischen stehenden Wellen erfüllen die Bedingung $\psi(x) = -\psi(-x)$ und werden durch den Sinus dargestellt. Wir betrachten den Fall symmetrischer Wellen. Die Funktion ψ ist in den erwähnten drei Bereichen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_I &= A' \cos k_1 x && \text{für } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \psi_{II} &= A e^{kx} + B e^{-kx} && \text{für } a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi_{III} &= C \cos(k_1 x + \varphi) && \text{für } x \geqslant b \\ &\left(k_1 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}, \quad k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{IX,1}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A', A, B, C benutzen wir die Stetigkeitsbedingung für die ψ-Funktion und ihre ersten Ableitungen. Da uns jedoch die Koeffizienten selbst nicht interessieren, sondern ihr Verhältnis, können wir einen, A' oder C, gleich 1 setzen. Wir setzen $A' = 1$. Dann führen die Bedingungen

$$(\psi_I)_{x=a} = (\psi_{II})_{x=a}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=a}$$

zu

$$\cos k_1 a = A e^{ka} + B e^{-ka},$$

$$\frac{k_1}{k} \sin k_1 a = -A e^{ka} + B e^{-ka},$$

woraus wir

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\cos k_1 a - \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right) e^{-ka}, \\ B &= \frac{1}{2}\left(\cos k_1 a + \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right) e^{ka} \end{aligned}\right\} \tag{IX,2}$$

erhalten. Die Bedingungen

$$(\psi_{II})_{x=b} = (\psi_{III})_{x=b}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=b} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=b}$$

ergeben

$$\begin{aligned} C \cos (k_1 b + \varphi) &= A e^{kb} + B e^{-kb}, \\ C \sin (k_1 b + \varphi) &= -\frac{k}{k_1} A e^{kb} + \frac{k}{k_1} B e^{-kb}. \end{aligned} \tag{IX,3}$$

Ersetzen wir darin A und B durch ihre Werte aus (IX,2), quadrieren und addieren, so erhalten wir unter Benutzung der Bezeichnung $l = b - a$

$$\begin{aligned} C^2 = {} & \left[\left(\cos k_1 a - \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right) e^{kl} + \left(\cos k_1 a + \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right) e^{-kl}\right]^2 + \\ & + \frac{k^2}{k_1^2}\left[\left(\cos k_1 a - \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right) e^{kl} - \left(\cos k_1 a + \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right) e^{-kl}\right]^2. \end{aligned} \tag{IX,4}$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Breite des Walls l hinreichend groß sei, so daß die e^{-kl} enthaltenden Glieder gegenüber den Gliedern mit e^{+kl} vernachlässigt werden können. Dann nimmt (IX,4) die Form

$$C^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{k^2}{k_1^2}\right)\left(\cos k_1 a - \frac{k_1}{k} \sin k_1 a\right)^2 e^{2kl} \tag{IX,5}$$

an. Ist l hinreichend groß, so ist $e^{kl} \gg 1$ und C^2 beträchtlich größer als 1, d. h. $C^2 \gg A'^2$. Daraus folgt, daß bei hinreichender Breite des Walls die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teil-

chen außerhalb des Kastens zu finden, wesentlich größer ist als die, es im Kasten anzutreffen. Die ψ-Funktion verläuft dabei annähernd so, wie es in Abb. 472 gezeichnet ist. (Die Lage des Walls ist schematisch durch einen etwas dickeren Strich gekennzeichnet).

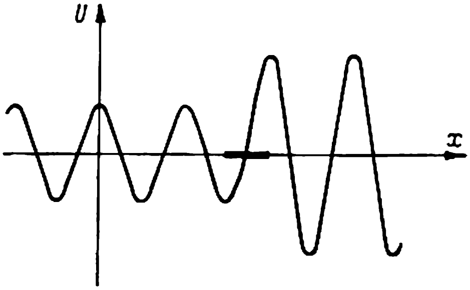


Abb. 472

Ein Ausnahmefall wird eintreten, wenn

$$\cos k_1 a - \frac{k_1}{k} \sin k_1 a = 0 \qquad \text{(IX,6)}$$

oder

$$\operatorname{tg} k_1 a = \frac{k}{k_1} \qquad \text{(IX,7)}$$

ist.

Um diesen Fall zu diskutieren, wenden wir uns zunächst den Formeln (IX,2) zu. Mit der Bedingung (IX,6) ergeben sie

$$A = 0, \quad B = e^{ka} \cos k_1 a, \qquad \text{(IX,8)}$$

und die Formeln (IX,3) führen unter Beachtung von (IX,8) zu

$$C \cos (k_1 b + \varphi) = e^{-kl} \cos k_1 a,$$
$$C \sin (k_1 b + \varphi) = e^{-kl} \sin k_1 a.$$

Durch Quadrieren und Addieren erhalten wir dann

$$C^2 = e^{-2kl}, \qquad \text{(IX,9)}$$

d. h. $C^2 \ll 1$ oder, was dasselbe ist, $C^2 \ll A'$.

So ist in den Ausnahmefällen, für die die Bedingung (IX,7) gilt, die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen außerhalb des Kastens anzutreffen, bei hinreichender Breite des Walls klein im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit, es im Kasteninnern zu finden; das Teilchen hält sich einen großen Teil der Zeit innerhalb des Kastens auf, und die ψ-Funktion hat für diese Fälle den Verlauf der Abbildung 473.

Wir schreiben jetzt die Bedingung (IX,7) unter Beachtung der Werte für k_1 und k explicite hin und erhalten

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}\, a = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}. \tag{IX,10}$$

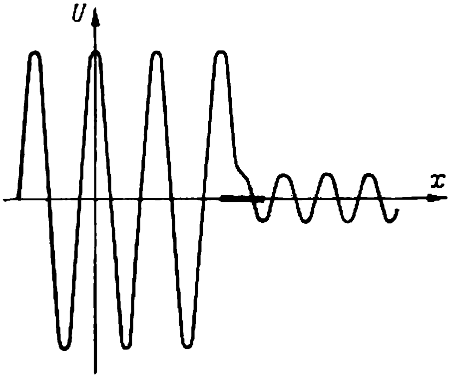


Abb. 473

Dies ist eine transzendente Gleichung für E, deren Lösung z. B. graphisch durch Konstruktion der Schnittpunkte zwischen den Kurven $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}\, a$ und $\sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}$ gefunden werden kann. So ergibt sich für den betrachteten Ausnahmefall eine endliche Zahl diskreter Energiewerte E_1, E_2, ... Vergleichen wir diese Werte mit den Energieniveaus eines Teilchens im Kasten mit Wänden endlicher Höhe. Im Anhang V des I. Teiles, S. 437, erhielten wir für diese Niveaus auch eine transzendente Gleichung

$$\operatorname{tg} 2 \frac{2\pi}{h} \sqrt{2\, mE}\, a = \frac{2\sqrt{E\,(U_0 - E)}}{2E - U_0}. \tag{IX,11}$$

Unter Benutzung der elementaren trigonometrischen Formel

$$\operatorname{tg} 2k_1 a = \frac{2 \operatorname{tg} k_1 a}{1 - \operatorname{tg}^2 k_1 a}$$

finden wir, nachdem wir für $\operatorname{tg} k_1 a$ den Ausdruck aus (IX,10) eingesetzt haben,

$$\operatorname{tg} 2k_1 a = \frac{2\sqrt{E\,(U_0 - E)}}{2E - U_0},$$

d. h. die uns schon bekannte Formel (IX,11).

Wir sehen, daß sich das Teilchen im allgemeinen außerhalb des Kastens aufhalten wird, d. h. im ungebundenen Zustand. Nur für einige ausgewählte Energiewerte ist die Wahrscheinlichkeit seines Aufenthalts innerhalb des Kastens beträchtlich größer als die seines Aufent-

halts außerhalb des Kastens. Diese Energiewerte ergeben sich aus der transzendenten Gleichung (IX,10), die der Gleichung (IX,11), aus der die gequantelten Energiewerte für einen Kasten mit unendlich breitem Wall zu bestimmen sind, völlig äquivalent ist. Daraus folgt, daß es Vorzugswerte der Energie gibt, die den stationären Niveaus zugeordnet sind, in denen sich das Teilchen einen großen Teil der Zeit im Kasten aufhält, obwohl das Spektrum der Energieeigenwerte für den uns interessierenden Fall kontinuierlich ist. Allerdings existiert im betrachteten Fall eine bekannte, wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen den Kasten verläßt. Daher sind die Zustände, in denen sich ein derartiges Teilchen befindet, keine stationären im exakten Sinne des Wortes. Sie werden *quasistationär* genannt, und die ihnen entsprechenden ausgewählten Energiewerte heißen *virtuelle Niveaus*.

Die virtuellen Niveaus besitzen noch eine Eigentümlichkeit: Im Unterschied zu stationären Niveaus sind sie nicht scharf, sondern haben eine bestimmte Breite. Das bedeutet, daß ein virtuelles „Niveau" tatsächlich ein schmales Intervall des kontinuierlichen Eigenwertspektrums ist. Davon kann man sich durch folgende halbquantitative Überlegung überzeugen. Aus Formel (IX,4) folgt, daß C^2 dann ein Maximum hat, wenn die e^{-kl} enthaltenden Glieder gegen Null gehen, und ein Minimum dann, wenn die Glieder mit e^{+kl} Null werden. Die letztere Bedingung führt zu den uns schon bekannten Formeln (IX,7) und (IX,9)

$$\operatorname{tg} k_1 a = \frac{k}{k_1}, \quad C^2 = e^{-2kl},$$

und die erste ergibt

$$\operatorname{tg} k_1 a = -\frac{k}{k_1}, \quad C^2 = e^{2kl}. \tag{IX,12}$$

Aus den Formeln (IX,7) und (IX,9) findet man jene Energiewerte, für die das Teilchen hauptsächlich im Kasteninnern verweilt, aus den Formeln (IX,12) diejenigen, bei denen sich das Teilchen vorzugsweise außerhalb des Kastens befindet. Die Intervalle zwischen beiden Werten bestimmen die Breite des virtuellen Energieniveaus. Tatsächlich ist diese Breite aber beträchtlich kleiner, da schon bei solchen Energiewerten, für die $C^2 = e^{2kl}$ groß gegen 1 (d. h. größer als A') ist, die Wahrscheinlichkeit für den Aufenthalt des Teilchens außerhalb des Kastens diejenige für den Aufenthalt innerhalb des Kastens übertrifft.

Aus den oben entwickelten Überlegungen folgt, daß sich das Vorhandensein eines Walls endlicher Breite durch das Auftreten einer endlichen Wahrscheinlichkeit für das „Entschlüpfen" des Teilchens aus dem Kasten und durch eine Niveauverbreiterung bemerkbar macht. Es ist verständlich, daß diese Überlegungen auch für die umgekehrte Erscheinung des Einfangs eines auf den Wall auftreffenden Teilchens von Interesse sind. Als konkrete Veranschaulichung hierfür kann das Beispiel eines Teilcheneinfangs bei Kernprozessen dienen, speziell das scharfe Anwachsen der Einfangwahrscheinlichkeit bei Resonanzspaltung.

Abschließend möchten wir dem Leser vorschlagen, als Übung dasselbe Problem für antisymmetrische stehende Wellen zu behandeln.

Für diesen Fall haben die drei Funktionen die Form

$$\begin{aligned} \varphi_I &= A' \sin k_1 x && \text{für } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \varphi_{II} &= A e^{kx} + B e^{-kx} && \text{für } a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi_{III} &= C \sin (k_1 x + \varphi) && \text{für } x \geqslant b. \end{aligned}$$

Die virtuellen Niveaus ergeben sich aus der Bedingung

$$\operatorname{tg} k_1 a = -\frac{k_1}{k}$$

oder, wenn man k_1 und k durch ihre Werte ersetzt,

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}a = -\sqrt{\frac{E}{U_0 - E}}.$$

Diese Gleichung ist (IX,11)

$$\operatorname{tg} 2\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}a = \frac{2\sqrt{E(U_0 - E)}}{2E - U_0} \tag{IX,11}$$

äquivalent.

X. Die Erhaltung des Drehimpulses für ein relativistisches Elektron

Wir betrachten ein Elektron, das sich in einem zentralsymmetrischen Feld, z. B. dem Coulomb-Feld eines Kerns, befindet. Das Potential ist in diesem Fall eine nur von r abhängige Funktion

$$\varphi = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{X,1}$$

Wir schreiben die Dirac-Gleichung für das Elektron im elektromagnetischen Feld in folgender Form auf:

$$P_4\psi = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4\mu_0 c)\,\psi, \tag{X,2}$$

wobei

$$P_4 = -\frac{1}{c}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + e\varphi\right),$$

$$P_1 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x,$$

$$P_2 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c}A_y,$$

$$P_3 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c}A_z.$$

Befindet sich das Elektron in einem zentralsymmetrischen elektrostatischen Feld, so ist

$$A_x = A_y = A_z = 0.$$

Wir betrachten jetzt irgendeinen stationären Zustand. In diesem Zustand besitzt die Energie einen bestimmten Wert, und die Lösung kann man in der Form

$$\psi = a\Psi e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$$

ansetzen. Hier ist Ψ der Teil der Eigenfunktion, der von den Koordinaten x, y, z abhängt; die „Amplitude" a enthält jene zusätzliche Veränderliche, auf die die Operatoren $\cdot \alpha_i$ wirken.

Berücksichtigen wir dies, so können wir die Lösung in der Form

$$\psi = \psi^0 e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}, \quad \psi^0 = a\Psi \tag{X,3}$$

schreiben. Setzen wir (X,3) in die DIRAC-Gleichung (X,2) ein, so erhalten wir explicite (unter der Bedingung, daß das Vektorpotential A gleich Null ist):

$$\left[c\frac{h}{2\pi i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right)+\alpha_4\mu_0c^2+e\varphi\right]\psi^0 = E\psi^0.$$

Der Operator auf der linken Seite dieser Gleichung,

$$H = c\frac{h}{2\pi i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right)+\alpha_4\mu_0c^2+e\varphi, \tag{X,4}$$

ist offensichtlich der relativistische Energieoperator.

Der Operator der z-Komponente des Bahndrehimpulses ist

$$L_z = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{176,1}$$

Wir zeigen jetzt, daß dieser Operator nicht mit dem relativistischen Energieoperator (X, 4) kommutiert, d. h., daß also für den *Bahn*drehimpuls der Erhaltungssatz nicht gilt. Wir finden

$$\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}L_z\psi = \frac{h}{2\pi i}\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{h}{2\pi i}\alpha_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\psi x^2}\right),$$

$$L_z\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{h}{2\pi i}\alpha_1\left(x\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right).$$

Es ist dann

$$\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}L_z - L_z\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = \alpha_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Analog ergibt sich

$$\left(\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}L_z - L_z\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi = -\alpha_2\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Daß L_z mit $\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}$ und $\alpha_4\mu_0c^2$ kommutativ ist, liegt auf der Hand. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß L_z auch mit $e\varphi$ kommutiert. Den Beweis dieser Behauptung wollen wir dem Leser selbst überlassen. Das Endresultat besteht darin, daß L_z *nicht* mit dem relativistischen Energieoperator kommutiert, da

$$\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right)L_z - L_z\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{h}{2\pi i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{X,5}$$

ist. Nun wollen wir den Operator J_z betrachten (siehe S. 178):

$$J_z = L_z - i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi} = L_z + \sigma_z \frac{h}{4\pi}. \tag{X,6}$$

Dieser Operator kommutiert mit dem relativistischen Energieoperator. Unter Ausnutzung der Eigenschaften der Operatoren α_i ($\alpha_i^2 = 1$; $\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$) finden wir

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\psi\right) = i\alpha_1^2\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\alpha_2 \frac{h}{4\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\left(\alpha_1 \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = i\alpha_1\alpha_2\alpha_1 \frac{h}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{h}{4\pi}\alpha_1^2\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{h}{4\pi}\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{h}{4\pi i}\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Somit ist

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\right) - i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{h}{2\pi i}\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}.$$

Durch analoge Überlegungen überzeugt man sich leicht davon, daß

$$\alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\right) - i\alpha_2\alpha_1 \frac{h}{4\pi}\left(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{h}{2\pi i}\alpha_1\frac{\partial}{\partial y}$$

ist.

Schließlich kommutiert der Operator $i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}$ mit $\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}$ und mit $\alpha_4 \mu_0 c^2$, was unter Benutzung der Bedingung $\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$ ohne weiteres nachzuprüfen ist. Wir sehen auf diese Weise, daß das zweite Glied des Operators (X,6) nicht mit dem relativistischen Energieoperator kommutiert, da

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\right) -$$
$$- \left(i\alpha_1\alpha_2 \frac{h}{4\pi}\right)\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{h}{2\pi i}\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{X,7}$$

Berücksichtigt man aber (X,5), (X,7) und den Ausdruck (X,6) für den Operator J_z so ist zu sehen, daß J_z mit H kommutativ ist, obwohl jedes einzelne Glied der Differenz (X,6) nicht mit dem relativistischen Operator der Energie kommutiert, was zu beweisen war. J_z hängt nicht von der Zeit ab und kommutiert mit dem relativistischen Energieoperator, woraus folgt, daß J_z dem Gesamtimpulsmoment entspricht, für das der Erhaltungssatz gilt.

XI. Dipol- und Quadrupolstrahlung

Für die Berechnung des elektromagnetischen Strahlungsfeldes muß man das skalare (φ) und das Vektorpotential (A) kennen. Die Feldstärken errechnen sich dann nach den Formeln (siehe Teil I, § 60)

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}. \tag{XI,1}$$

Die Potentiale φ und A sind bekanntlich[1])

$$\varphi = \int \frac{\varrho}{r'}\,d\tau\,, \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\varrho\mathfrak{v}}{r'}\,d\tau\,, \tag{XI,2}$$

worin r' der Abstand vom Punkt P (Abb. 474) mit den Koordinaten X, Y, Z zur Zeit t vom Volumenelement Q mit den Koordinaten x, y, z zur Zeit

$$t' = t - \frac{r'}{c}$$

ist. An Stelle der Ladungsdichte ϱ und der Stromdichte $\varrho\mathfrak{v} = \mathfrak{j}$ benutzen wir deren zeitabhängige Ausdrücke unter der Annahme, daß es sich um harmonische Schwingungen handelt

$$\varrho = \varrho_0 e^{-i\,2\pi\nu t'}, \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{j}_0 e^{-i\,2\pi\nu t'}. \tag{XI,3}$$

Es sei O der Koordinatenursprung im Innern der Ladungswolke. Der Abstand zwischen O und dem Beobachtungsort P sei R, der Abstand zwischen O und dem Volumenelement Q

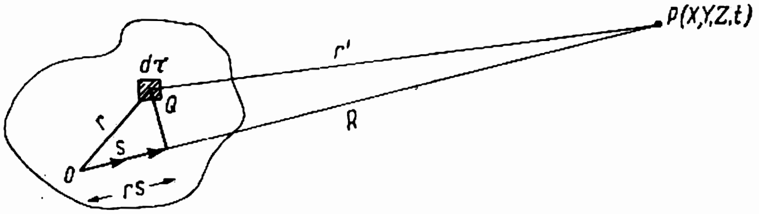


Abb. 474

gleich $\mathfrak{r}$, der Einheitsvektor in Richtung P möge $\mathfrak{s}$ sein. Dann haben wir für $R \to \infty$

$$r' = R - \mathfrak{r}\mathfrak{s} \tag{XI,4}$$

und folglich

$$t' = t - \frac{r'}{c} = t - \frac{R}{c} + \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}{c}\,. \tag{XI,5}$$

Nun setzen wir (XI,3), (XI,4) und (XI,5) in (XI,2) ein. Dabei können wir den Nenner $\frac{1}{r'}$, mit hinreichender Genauigkeit durch $\frac{1}{R}$ ersetzen, da man bei Entwicklung von $\frac{1}{r'}$ nach negativen Potenzen von R

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\beta}{R^3} + \cdots$$

für den Fall $R \to \infty$ alle Glieder außer dem ersten vernachlässigen kann. Beachtet man

[1]) Siehe z. B. Becker: „Theorie der Elektrizität", Band I, Teubner, Leipzig 1949.

weiter, daß wegen (XI,5)

$$e^{-i2\pi\nu t'} = e^{-i2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)} e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}$$

ist, erhält man

$$\varphi = \frac{e^{-i2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R} \int \varrho e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}, \tag{XI,6}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{e^{-i2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R} \int \frac{\mathfrak{j}}{c} e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}. \tag{XI,7}$$

Die Retardierung ist durch das Glied $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}{c}$ in (XI,5) bedingt, und in (XI,6) und (XI,7) entsprechend durch den Exponentialfaktor

$$e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}.$$

Es ist klar, daß man im Falle

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1 \tag{XI,8}$$

den Exponentialfaktor in (XI,6) und (XI,7) gleich 1 setzen kann, so daß wir

$$\varphi = \frac{e^{-i2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R} \int \varrho \, d\tau \tag{XI,6'}$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{e^{-i2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R} \int \frac{\mathfrak{j}}{c} \, d\tau \tag{XI,7'}$$

erhalten. Dies sind die Potentiale für elektrische Dipolstrahlung (HERTZscher Dipol)[1]). Die Bedingung (XI,8) gilt für Strahlung im *optischen* Gebiet des Spektrums. Die Abmessung eines Atoms sind von der Größenordnung 10^{-8} cm, die Wellenlänge für sichtbare Strahlung liegt bei 10^{-5} cm. Demnach ist

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \sim 10^{-3},$$

d. h., die Bedingung (XI,8) ist erfüllt. So kann man bei Problemen der Emission von Licht des optischen Spektralgebiets das strahlende Objekt (Atom) als elektrischen Dipol ansehen.

Im allgemeinen Falle hingegen kann r von der gleichen Größenordnung wie λ sein und der Exponentialfaktor darf nicht gleich 1 gesetzt werden. Um mit Hilfe der Formeln (XI,1) die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aus den Potentialen (XI,6) und (XI,7) zu erhalten, hat man die

[1]) Siehe BECKER: „Theorie der Elektrizität", Bd. I, § 71, Teubner, Leipzig 1949.

Potentiale nach der Zeit und den Koordinaten des *Beobachtungspunktes* $P\,(X, Y, Z, t)$ zu differenzieren. Bei der Differentiation nach den Koordinaten kann der Exponentialfaktor

$$e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}$$

als konstant gelten. Die Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{s}$ sind $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$, so daß

$$e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}} = e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\frac{xX+yY+zZ}{R}},$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ist. Bei der Differentiation nach X, Y, Z tauchen Potenzen R^{-1} auf, die wegen $R \to \infty$ vernachlässigt werden können. Aus demselben Grunde kann bei der Differentiation der Faktoren vor dem Integral der Nenner R als konstant gelten. So hat man also bei der Berechnung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach den Formeln (XI,1) lediglich den Exponentialfaktor vor dem Integral

$$e^{-i\,2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}$$

zu differenzieren. Das Resultat ist

$$\mathfrak{E} = -i\frac{2\pi\nu}{c}\cdot\frac{e^{-i\,2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R}\int\left(\varrho\mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{j}}{c}\right)e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}\,d\tau, \tag{XI,9}$$

$$\mathfrak{H} = -i\frac{2\pi\nu}{c}\cdot\frac{e^{-i\,2\pi\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R}\int\frac{\mathfrak{j}}{c}\mathfrak{s}\,e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}}\,d\tau. \tag{XI,10}$$

Unter Benutzung dieser Formeln kann man zeigen, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ihrem Absolutwert nach einander gleich sind, aufeinander senkrecht und senkrecht zur Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{s}$ stehen. Wegen der Gleichheit $|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}|$ ist der Umow-Poyntingsche Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

dem Betrage nach $\mathfrak{E}^2$ proportional, und es genügt uns daher, in unseren weiteren Überlegungen nur $\mathfrak{E}$ zu betrachten.

Wir stellen fest, daß $\frac{2\pi\nu}{c}\mathfrak{s} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{s}$ nichts anderes ist als der Wellenvektor $\mathfrak{k}$, so daß der Exponentialfaktor unter dem Integral in der Form

$$e^{-}$$

geschrieben werden kann. Kennen wir die Feldstärken (XI,9) und (XI,10), so können wir den Umow-Poyntingschen Vektor (siehe Teil I, § 64) und nach Integration über die Winkel die

Gesamtintensität der Strahlung ausrechnen. Auf diesem Wege gelangt man allerdings nicht zu einer Vorstellung über die Eigenschaften des Strahlungsfeldes. Um diese zu erlangen, muß man den Retardierungsfaktor $e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} = 1 - i\mathfrak{k}\mathfrak{r} + \frac{1}{2}(i\mathfrak{k}\mathfrak{r})^2 + \ldots.$$

Dann liegen das Vektorpotential und die Feldstärke in Form von Reihen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \ldots,$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3 + \ldots$$

vor. Setzen wir $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1$ und lassen die folgenden Glieder weg, dann haben wir eine Dipolstrahlung; denn das erste Glied der Entwicklung des Vektorpotentials entspricht dem am Anfang betrachteten Falle $e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} \sim 1$. Die Beschaffenheit des zweiten Gliedes $\mathfrak{A}_2$ und entsprechend $\mathfrak{E}_2$ ist wesentlich komplizierter. Die Rechnungen zeigen, daß dieses Glied ein Tensor zweiter Ordnung ist, der in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden kann. Der symmetrische Teil stellt die Strahlung eines elektrischen Quadrupols dar, der antisymmetrische die Strahlung eines magnetischen Dipols. Das dritte Glied $\mathfrak{A}_3$ (und entsprechend $\mathfrak{E}_3$) stellt einen Strahlenkomplex aus elektrischer Oktupol- und magnetischer Quadrupolstrahlung dar. Es entsprechen also die aufeinanderfolgenden Glieder der Strahlung elektrischer Systeme von 2^1 (Dipol), 2^2 (Quadrupol), 2^3 (Oktupol) allgemein 2^n-Polen oder magnetischer Systeme mit einem um 1 niedrigeren Exponenten. Da sich die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe durch den Faktor $i\mathfrak{k}\mathfrak{r}$ unterscheiden, unterscheidet sich die Intensität der Strahlung der aufeinanderfolgenden Multipole durch den Faktor $(kr)^2 = \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2$. Für die Strahlung im optischen Gebiet ist $\frac{2\pi r}{\lambda} \sim 10^{-3}$, folglich muß die Quadrupolstrahlung von etwa 10^6mal geringerer Intensität sein als die Dipolstrahlung.

Die Polardiagramme der Intensitätsverteilung unterscheiden sich für die verschiedenen Multipole wesentlich. So hat z. B. die Intensität der Strahlung eines elektrischen Dipols Maxima bei den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$, bezogen auf die Schwingungsrichtung. Die Intensität der Quadrupolstrahlung hat bei $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ Maxima, während sie in der Richtung $\frac{\pi}{2}$ gleich Null ist, usw.

XII. Die Parität des Zustands

In der Quantenmechanik spielt die Symmetrieeigenschaft des Zustands, die „Parität", eine wichtige Rolle. Um zu erklären, was diese Eigenschaft bedeutet, bemerken wir zunächst, daß sich weder der Hamilton-Operator eines isolierten Systems von Teilchen, noch die Energie ändern, wenn wir gleichzeitig die Vorzeichen der Koordinaten aller Teilchen ändern. Diese Änderung kann durch den Ersatz eines Rechtssystems der Koordinaten durch ein Linkssystem verwirklicht werden. Die physikalischen Befunde hängen aber nicht davon ab, ob wir ein Rechts- oder ein Linkssystem benutzen.

Die Operation der Vorzeichenänderung der Teilchenkoordinaten kann als eine Spiegelung am Koordinatenursprung beschrieben werden. Sie wird auch Inversion am Koordinaten-

ursprung genannt. Bezeichnen wir die Gesamtheit der Koordinaten des k-ten Teilchens mit $\mathbf{r}_k$, so können wir die Invarianzeigenschaft des HAMILTON-Operators bezüglich der Inversion in der Formel

$$H(-r_k) = H(r_k) \tag{XII,1}$$

darstellen. Dabei ist angenommen, daß sich nicht nur die Koordinaten des k-ten, sondern die aller Teilchen gleichzeitig ändern.

Wir führen den Inversionsoperator I ein, dessen Wirkung darin besteht, daß er die Vorzeichen aller Teilchenkoordinaten umkehrt. Nun wollen wir uns davon überzeugen, daß die Bedingung (XII,1) damit gleichbedeutend ist, daß der Operator I mit dem Energieoperator kommutativ ist. Wir haben

$$\left.\begin{aligned} IH(r_k)\,\psi(r_k) &= H(-r_k)\,\psi(-r_k),\\ H(r_k)\,I\,\psi(r_k) &= H(r_k)\,\psi(-r_k). \end{aligned}\right\} \tag{XII,2}$$

Gilt (XII,1), so sind die rechten Seiten gleich, und folglich ist

$$IH = HI. \tag{XII,3}$$

Umgekehrt folgt aus (XII,2) unmittelbar (XII,1), wenn (XII,3) gilt.

In § 175 sahen wir, daß die Eigenwerte eines Operators zeitlich unveränderlich sind, wenn der Operator nicht explicite von der Zeit abhängt und mit dem Energieoperator kommutiert. Wir suchen die Eigenwerte des Inversionsoperators. Es ist leicht zu sehen, daß eine zweimalige Anwendung des Inversionsoperators zweimal die Vorzeichen der Koordinaten ändert, d. h., zu der Identität

$$I^2\,\psi(r_k) = \lambda^2\,\psi(r_k) = \psi(r_k)$$

führt, woraus

$$\psi(r_k) = \lambda^2\psi(r_k)$$

folgt, d. h.

$$\lambda^2 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda = \pm 1.$$

Somit sind also die Eigenwerte des Inversionsoperators gleich $\pm$ 1, d. h.

$$I\psi(r_k) = \pm\,\psi(-r_k).$$

Ändert die Funktion bei Änderung aller Koordinatenvorzeichen nicht ihr Vorzeichen, so nennt man sie *gerade*; ändert sie ihr Vorzeichen, so heißt sie *ungerade*. Aus der Bedingung der Kommutativität des Inversionsoperators folgt weiter, daß die Eigenschaft der Parität zeitlich unveränderlich ist, d. h., die Wellenfunktion ist entweder gerade oder ungerade. Erwähnt sei, daß das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen eine gerade, das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion eine ungerade Funktion ist. Es ist offensichtlich, daß die Parität eines Produkts mehrerer Funktionen nach derselben Regel bestimmt wird, wie das Vorzeichen bei der Multiplikation von positiven und negativen Zahlen.

Wir ermitteln jetzt die Parität des Zustands eines Teilchens mit dem Impulsmoment l. Die Bildung der Inversion besteht in einer Auswechslung der Koordinaten x, y, z durch $-x$,

$-y, -z$. Dem entspricht folgende Transformation der Polarkoordinaten

$$\vartheta \to \pi - \vartheta,$$
$$\varphi \to \pi + \varphi.$$

Die Eigenfunktionen eines Teilchens mit dem Impulsmoment l sind in Tabelle XXIII, S. 86, aufgeführt. An Hand dieser Tabelle ist leicht nachzuprüfen, daß die Eigenfunktion bei Inversion mit $(-1)^l$ multipliziert wird, und zwar unabhängig von m. Daraus folgt, daß die Eigenfunktionen eines Teilchens mit geradzahligem Impulsmoment gerade sind, bei ungeradzahligem Impulsmoment ungerade.

Jetzt wollen wir uns den Auswahlregeln zuwenden. Im Text (§ 193) sahen wir, daß das Verbot eines Übergangs mit dieser oder jener Änderung der Quantenzahlen aus dem Verschwinden eines Matrixelements hergeleitet wird. Das letztere hat immer die Form eines über den ganzen Raum genommenen Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, d\tau.$$

Das Integral ist Null, wenn $f(x, y, z)$ eine ungerade Funktion ist. Davon kann man sich wie folgt überzeugen. Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so sind die unabhängigen Variablen r, ϑ, φ. Das Volumenelement $d\tau$ in Polarkoordinaten ist

$$d\tau = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = r^2\, d\omega.$$

Bei Integration über den ganzen Raum wird über den räumlichen Winkel 4π, d. h. über die ganze Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1 integriert. Das Integral über die Winkel kann als Summe zweier Integrale dargestellt werden, von denen jedes über eine Halbkugel genommen wird:

$$\int F(r_k)\, d\omega = \int \left\{F(r_k) + F(-r_k)\right\} d\omega.$$

Hierin ist r_k der Radiusvektor des k-ten Teilchens. Ist $F(r_k)$ eine ungerade Funktion, so ist das Integral natürlich gleich Null. Dasselbe gilt, wenn F von den Koordinaten mehrerer Teilchen abhängt.

Das Matrixelement des Dipolmoments ist

$$er_{mn} = \int er\, \psi_m^*\, \psi_n\, d\tau;$$

er ist aber eine ungerade Funktion. Daher wird das Matrixelement nur von Null verschieden sein, wenn das Produkt $\psi_m^*\ \psi_n$ auch eine ungerade Funktion ist, d. h., ψ_m und ψ_n müssen verschiedene Parität besitzen: Die eine Funktion muß gerade, die andere ungerade sein. So ist also ein Dipolübergang zwischen zwei geraden oder zwei ungeraden Zuständen in jedem Falle verboten. Da die Parität des Zustands durch die Parität des Impulsmoments gegeben ist, kann man sofort behaupten, daß für Dipolstrahlung Übergänge mit $\Delta l = 0$ oder ± 2 verboten sind. Im Matrixelement eines Quadrupolübergangs

$$eQ_{mn} = \int \psi_m^*\, (eQ)\, \psi_n\, d\tau$$

hängt eQ quadratisch von den Koordinaten ab, ist also eine gerade Funktion der Koordinaten. Daher müssen, damit die ganze Funktion unter dem Integral gerade ist, ψ_m und ψ_n beide entweder gerade oder ungerade sein. Übergänge mit $\Delta l = 0$ oder ± 2 sind also erlaubt, Übergänge mit $\Delta l = \pm 1$ verboten.

Als Fazit kann man eine allgemeine Auswahlregel (die Regel von LAPORTE) formulieren. Alle Terme können in zwei Klassen eingeteilt werden: gerade und ungerade. Ein Term ist gerade, wenn die arithmetische Summe der Quantenzahlen l_i der einzelnen Elektronen (oder allgemein der das System bildenden Teilchen) eine gerade Zahl ist, und ungerade, wenn die arithmetische Summe der Zahlen l_i ungerade ist.

Da die Parität des Terms aus der *arithmetischen* Summe der Quantenzahlen l aller Elektronen des Atoms bestimmt wird, hängt die Parität sowohl von den Quantenzahlen der einzelnen Elektronen als auch von ihrer Anzahl ab. Für die einzelnen Elektronen sind bei $l = 0, 2, 4, \ldots$ (s-, d-, g-, ... Elektronen) die Zustände gerade und bei $l = 1, 3, 5, \ldots$ (p-, f-, h-...Elektronen) ungerade. Der Term kann allerdings gerade sein, wenn sich auch einige Elektronen in ungeraden Zuständen aufhalten, ihre Anzahl aber gerade ist, und umgekehrt. So führt z. B. die Elektronenfiguration $1s^2\, 2s^2\, 2p^2$ zu geraden Termen des Atoms, die Konfiguration $1s\; 2p\; 3d$ aber zu ungeraden.

Die erwähnte Regel von LAPORTE lautet: Dipolübergänge sind möglich zwischen geraden und ungeraden Termen und verboten bei einer Kombination von Termen gleicher Parität. Quadrupolübergänge sind umgekehrt für Übergänge zwischen Termen gleicher Parität erlaubt und verboten für Übergänge zwischen Termen verschiedener Parität.

XIII. Tabelle der Massen leichter Kerne

Kern	Masse des neutralen Atoms	Wahrscheinlicher Fehler $\times 10^5$	Bindungs-energie E
n^1	1,00893	3	0,00
H^1	1,008123	0,6	0,00
H^2	2,014708	1,1	2,18
H^3	3,01700	3,4	8,33
He^3	3,01700	4	7,60
He^4	4,00390	3	28,11
He^5	5,0137	35	27,30
He^6	6,0209	50	28,90
Li^5	(5,0136)	(60)	26,64
Li^6	6,01697	5	31,81
Li^7	7,01822	6	38,96
Li^8	8,02502	7	40,94
Be^6	6,0219	(100)	26,47
Be^7	7,01916	7	37,33
Be^8	8,00785	7	56,17
Be^9	9,01503	6	57,80
Be^{10}	10,01677	8	64,49
Be^{11}	(11,0277)	—	62,62
B^9	9,01620	7	55,96
B^{10}	10,01618	9	64,29
B^{11}	11,01284	8	75,71
B^{12}	12,0190	70	78,28
B^{13}	(13,0207)	—	85,01
C^{10}	10,0210	30	59,05
C^{11}	11,01495	9	72,99
C^{12}	12,00382	4	91,66
C^{13}	13,00751	10	96,54
C^{14}	14,00767	5	104,70
C^{15}	(15,0165)	—	104,79
N^{12}	(12,0233)	—	72,78
N^{13}	13,0988	7	93,58
N^{14}	14,00751	4	104,10
N^{15}	15,0489	21	114,85
N^{16}	$>$ 16,0065	—	121,66
N^{16}	$<$ 16,011	—	117,47
N^{17}	(17,014)	—	122,99

(Fortsetzung)

Z	Kern	Masse des neutralen Atoms	Wahrscheinlicher Fehler $\times 10^5$	Bindungs-energie E	Bindungsenergie pro einzelnes Teilchen E/A
8	O^{14}	(14,0131)	—	98,14	7,01
	O^{15}	15,0078	40	111,39	7,43
	O^{16}	16,000000	—	126,96	7,94
	O^{17}	17,00450	6	131,08	7,71
	O^{18}	18,0049	40	139,02	7,72
	O^{19}	(19,0139)	—	138,95	7,31
9	F^{16}	(16,0175)	—	109,92	6,87
	F^{17}	17,0075	30	127,54	7,50
	F^{18}	18,0065	60	136,78	7,60
	F^{19}	19,00450	26	146,95	7,73
	F^{20}	$>$ 20,0042	—	155,54	7,78
	F^{20}	$<$ 20,0092	—	150,88	7,54
	F^{21}	(21,0059)	—	162,27	7,73
10	Ne^{18}	(18,0114)	—	131,47	7,30
	Ne^{19}	19,00781	20	143,12	7,53
	Ne^{20}	19,99877	10	159,85	7,99
	Ne^{21}	$>$ 20,99963	22	167,35	7,97
	Ne^{22}	$<$ 21,99844	36	176,77	8,04
	Ne^{23}	(23,0013)	—	182,42	7,93
11	Na^{21}	(21,0035)	—	163,00	7,76
	Na^{22}	21,9999	50	174,66	7,94
	Na^{23}	22,99618	31	186,44	8,11
	Na^{24}	23,9975	45	193,52	8,06
	Na^{25}	(24,9967)	—	202,57	8,10
12	Mg^{22}	(22,0062)	—	168,05	7,64
	Mg^{23}	23,0002	40	181,94	7,91
	Mg^{24}	23,9924	60	197,52	8,23
	Mg^{25}	24,9938	90	204,52	8,18
	Mg^{26}	25,9898	50	216,56	8,33
	Mg^{27}	26,9928	150	222,07	8,22
13	Al^{25}	24,9981	100	199,77	7,99
	Al^{26}	25,9929	150	212,92	8,19
	Al^{27}	26,9899	80	224,02	8,30
	Al^{28}	27,9903	70	231,96	8,28
	Al^{29}	28,9893	80	241,20	8,32
	Al^{30}	(29,9954)	—	243,83	8,13

(Fortsetzung)

Z	Kern	Masse des neutralen Atoms	Wahrscheinlicher Fehler $\times 10^5$	Bindungs-energie E	Bindungsenergie pro einzelnes Teilchen E/A
14	Si^{27}	26,9949	90	218,62	8,10
	Si^{28}	27,9866	60	234,66	8,38
	Si^{29}	28,9866	60	242,97	8,38
	Si^{30}	29,9832	90	254,44	8,48
	Si^{31}	30,9862	60	259,96	8,39
	Si^{32}	(31,9849)	—	269,48	8,42
15	P^{29}	(28,9919)	(100)	237,28	8,18
	P^{30}	29,9873	100	249,87	8,33
	P^{31}	30,9843	50	260,98	8,42
	P^{32}	31,9827	40	270,78	8,46
	P^{33}	(32,9826)	—	279,18	8,46
16	S^{31}	(30,9899)	—	255,01	8,23
	S^{32}	31,98089	7	271,71	8,49
	S^{33}	32,9800	60	280,85	8,51
	S^{34}	33,97710	35	291,86	8,58
	S^{35}	34,9788	80	298,59	8,53
	S^{36}	35,978	100	307,64	8,55
17	Cl^{33}	(32,9860)	—	274,51	8,32
	Cl^{34}	33,9801	—	288,32	8,48
	Cl^{35}	34,97867	21	297,96	8,51
	Cl^{36}	35,9788	100	306,15	8,50
	Cl^{37}	36,97750	14	315,67	8,53
	Cl^{38}	37,981	300	320,72	8,44
	Cl^{39}	(38,9794)	—	330,52	8,74
18	Ar^{35}	(34,9850)	—	291,32	8,23
	Ar^{36}	35,9780	100	306,14	8,50
	Ar^{37}	(36,9777)	—	314,73	8,51
	Ar^{38}	37,974	250	326,49	8,59
	Ar^{39}	(38,9755)	—	333,40	8,55
	Ar^{40}	39,9756	60	341,62	8,54
	Ar^{41}	40,9770	60	248,62	8,50
19	K^{37}	(36,9830)	—	309,05	8,35
	K^{38}	(37,9795)	—	320,62	8,44
	K^{39}	(38,9747)	—	333,39	8,55
	K^{40}	39,9760	100	340,49	8,51

(Fortsetzung)

Z	Kern	Masse des neutralen Atoms	Wahrscheinlicher Fehler $\times 10^5$	Bindungs-energie E	Bindungsenergie pro einzelnes Teilchen E/A
20	Ca^{40}	39,9753	150	340,40	8,51
	Ca^{42}	41,9711	—	360,93	8,59
	Ca^{43}	42,9723	—	368,12	8,56
	Ca^{44}	—	—	—	—
	Ca^{45}	44,968	—	388,74	8,64
21	Sc^{45}	44,9669	—	389,02	8,64
22	Ti^{46}	45,9661	100	397,32	8,64
	Ti^{47}	46,9647	100	406,93	8,66
	Ti^{48}	47,9631	50	416,73	8,68
	Ti^{49}	48,9646	60	423,65	8,65
	Ti^{50}	49,9621	40	434,28	8,69
	Ti^{51}	50,9587	100	445,76	8,74
23	V^{51}	50,9577	50	445,94	8,74
24	Cr^{51}	50,958	—	444,91	8,72
	Cr^{52}	51,956	—	455,08	8,75
	Cr^{53}	52,956	—	463,39	8,74
25	Mn^{55}	54,957	—	478,33	8,70
26	Fe^{54}	53,957	—	469,27	8,69
	Fe^{56}	55,9568	170	486,08	8,68
	Fe^{57}	56,957	—	494,20	8,67

XIV. Tabelle der Isotope[1])

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
1	H^1	99,9844		
	H^2	0,0156		
	H^3		β^-	12,1 Jahre
2	He^3	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$		
	He^4	99,9999		
	He^6		β^-	0,89 Sek.
3	Li^6	7,30		
	Li^7	92,70		
	Li^8		β^-, 2α	0,89 Sek.
4	Be^7		K, γ	52,9 Tage
	Be^8		$2\ \alpha$	10^{-15}—10^{-17} Sek.[2])
	Be^9	100		
	Be^{10}		β^-	$2{,}5 \cdot 10^6$ Jahre
5	B^{10}	18,83		
	B^{11}	81,17		
	B^{12}		β^-	0,027 Sek.
6	C^{10}		β^+	19,1 Sek.
	C^{11}		β^+	20,42 Min.
	C^{12}	98,9		
	C^{13}	1,1		
	C^{14}		β^-	5100 Jahre
7	N^{12}		β^+	$12{,}5 \cdot 10^{-5}$ Sek.
	N^{13}		β^+	9,93 Min.
	N^{14}	99,62		
	N^{15}	0,38		
	N^{16}		β^-, γ	7,35 Sek.
	N^{17}		β^-, n	4,14 Sek.
8	O^{14}		β^+, γ	76,5 Sek.
	O^{15}		β^+	126 Sek.
	O^{16}	99,757		
	O^{17}	0,039		
	O^{18}	0,204		
	O^{19}		β^-, γ	27 Sek.

[1]) In der Tabelle wurden folgende Bezeichnungen gewählt: α = α-Teilchen, β^- = Elektron, β^+ = Positron, γ = γ-Strahlung, n = Neutron, e^- = Elektronen der inneren Umwandlung, K = Einfang von K-Elektronen, i. Ü. = isomerer Übergang, * = isomerer Kern. In Klammern stehen die Isotope, bei denen die Massenzahl oder das Element unsicher ist.

[2]) Theoretischer Wert.

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
9	F^{17}		β^+	66 Sek.
	F^{18}		β^+	107 Min.
	F^{19}	100		
	F^{20}		β^-, γ	12 Sek.
10	Ne^{19}		β^+	18,2 Sek.
	Ne^{20}	90,51		
	Ne^{21}	0,28		
	Ne^{22}	9,21		
	Ne^{23}		β^-	40,0 Sek.
11	$Na(^{21})$			23 Sek.
	Na^{22}		β^+, γ	3 Jahre
	Na^{23}	100		
	Na^{24}		β^-, γ	14,8 Std.
	$Na(^{25})$		β^-, γ	58,2 Sek.
12	Mg^{23}		β^+	11,6 Sek.
	Mg^{24}	78,60		
	Mg^{25}	10,11		
	Mg^{26}	11,29		
	Mg^{27}		β^-, γ	10,2 Min.
13	Al^{25}			7,3 Sek.
	Al^{26}		β^+	6,3 Sek.
	Al^{27}	100		
	Al^{28}		β^-, γ	2,30 Min.
	Al^{29}		β^-	6,7 Min.
14	Si^{27}		β^+	4,9 Sek.
	Si^{28}	92,16		
	Si^{29}	4,71		
	Si^{30}	3,13		
	Si^{31}		β^-	170 Min.
15	P^{29}		β^+	4,6 Sek.
	P^{30}		β^+	2,55 Min.
	P^{31}	100		
	P^{32}		β^-	14,3 Tage
	P^{34}		β^-, γ	12,4 Sek.
16	S^{31}		β^+	2,6 Sek.
	S^{32}	95,06		

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
16	S^{33}	0,74		
	S^{34}	4,18		
	S^{35}		β^-	87,1 Tage
	S^{36}	0,016		
	$S(^{37})$		β^-, γ	5,0 Min.
17	Cl^{32}		β^+	2,8 Sek.
	Cl^{34}		β^+, γ	33 Min.
	Cl^{35}	75,43		
	Cl^{36}		β^+, K, β^-	$2 \cdot 10^6$ Jahre
	Cl^{37}	24,57		
	Cl^{38}		β^-, γ	38,5 Min.
	$Cl(^{39})$		β^-	1 Std.
18	Ar^{35}		β^+	1,88 Sek.
	Ar^{36}	0,307		
	Ar^{37}		K	34,1 Tage
	Ar^{38}	0,060		
	Ar^{40}	99,632		
	Ar^{41}		β^-, γ	109,4 Min.
19	K^{38}		β^+, γ	7,5 Min.
	K^{39}	93,3		
	K^{40}	0,011	β^-, K, γ	$4,5 \cdot 10^8$ Jahre
	K^{41}	6,7		
	K^{42}		β^-, γ	12,44 Std.
	$K(^{43})$		β^-, γ	22,4 Std.
	$K(^{43})$		β^-	27 Min.
	$K(^{43}, {}^{44})$		β^-	18 Min.
20	$Ca(^{39})$			1,06 Sek.
	Ca^{40}	96,92		
	Ca^{42}	0,64		
	Ca^{43}	0,13		
	Ca^{44}	2,13		
	Ca^{45}		β^-	152 Tage
	Ca^{46}	0,0033		
	Ca^{48}	0,18		
	Ca^{49}		β^-, γ	2,5 Std.
	$Ca(^{49})$		β^-	30 Min.
21	Sc^{41}		β^+	0,87 Sek.
	Sc^{43}		β^+, γ	3,92 Std.

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
21	Sc^{44*}		i. Ü., e^-, γ	2,44 Tage
	Sc^{44}		β^+, γ	3,92 Std.
	Sc^{45}	100		
	Sc^{46*}		i. Ü., γ, e^-	20 Sek.
	Sc^{46}		β^-, γ, K	85 Tage
	$Sc(^{47})$		β^-	3,4 Tage
	Sc^{48}		β^-, γ, K	44 Std.
	Sc^{49}		β^-	57 Min.
22	Ti^{45}		β^+	3,08 Std.
	$Ti(^{45})$			21 Tage
	Ti^{46}	7,95		
	Ti^{47}	7,75		
	Ti^{48}	73,45		
	Ti^{49}	5,51		
	Ti^{50}	5,34		
	Ti^{51*}		β^-, γ	6 Min.
	Ti^{51}		β^-, γ	72 Tage
23	$V(^{47})$		β^+	33 Min.
	V^{48}		β^+ (58 %), K (42 %), γ	16 Tage
	$V(^{49})$		K	600 Tage
	V^{50}		β^+	3,7 Std.
	V^{51}	100		
	V^{52}		β^-, γ	3,74 Min.
24	Cr^{49}		β^+, γ	42 Min.
	Cr^{50}	4,31		
	Cr^{51}		K, γ, e^-; nicht β^+	26,5 Tage
	Cr^{52}	83,76		
	Cr^{53}	9,55		
	Cr^{54}	2,38		
	$Cr(^{55})$			1,3 Std.
25	Mn^{51}		β^+	46 Min.
	Mn^{52*}		β^+, γ	21 Min.
	Mn^{52}		β^+ (35 %), K (65 %), γ	6,5 Tage
	Mn^{54}		K, γ	310 Tage
	Mn^{55}	100		
	Mn^{56}		β^-, γ	2,59 Std.
26	Fe^{52}		β^+	7,8 Std.
	Fe^{53}		β^+	8,9 Min.

XIV. Tabelle der Isotope

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität
Fe^{54}	5,81	
Fe^{55}		K
Fe^{56}	91,64	
Fe^{57}	2,21	
Fe^{58}	0,34	
Fe^{59}		β^-, γ
Co^{55}		β^+, γ
Co^{56}		β^+, γ, K
Co^{57}		K, γ, e^-, β^+
Co^{58}		β^+, γ, K
Co^{59}	100	
Co^{60}		β^-, γ
Co^{60*}		i. Ü., γ, e^- ($>$ 90 %), β^-
Co^{61}		β^-
Co^{62}		β^-, γ
Ni^{57}		β^+
Ni^{58}	67,76	
$Ni(^{59})$		K
Ni^{60}	26,16	
Ni^{61}	1,25	
Ni^{62}	3,66	
$Ni(^{63})$		β^-
Ni^{64}	1,16	
Ni^{65}		β^-, γ
Ni^{66}		β^-
$Cu(^{58})$		β^+
$Cu(^{59})$		
Cu^{60}		β^+, γ
$Cu(^{61})$		β^+, K
Cu^{62}		β^+, γ
Cu^{63}	68,94	
Cu^{64}		K, β^-, β^+, γ
Cu^{65}	31,06	
Cu^{66}		β^-, γ
$Cu(^{67})$		β^-
Zn^{62}		K
Zn^{63}		β^+ (93 %), K (7 %), γ
Zn^{64}	48,89	

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
30	Zn^{65}		β^+ (1,3 %), K (98,7 %), γ, e^-	250 Tage
	Zn^{66}	27,81		
	Zn^{67}	4,07		
	Zn^{68}	18,61		
	Zn^{69*}		i. Ü., γ	13,8 Std.
	Zn^{69}		β^-	57 Min.
	Zn^{70}	0,620		
	Zn^{71}		β^-, γ	2,2 Min.
	Zn^{72}		β^-, γ	49 Std.
31	$Ga(^{64})$		β^+	48 Min.
	Ga^{65}		K, e^-	15 Min.
	Ga^{66}		β^+	9,4 Std.
	Ga^{67}		K, γ, e^-	78,3 Std.
	Ga^{68}		β^+	68 Min.
	Ga^{69}	60,2		
	Ga^{70}		β^-, γ	20,3 Min.
	Ga^{71}	39,8		
	Ga^{72}		β^-, γ	14,3 Std.
	$Ga(^{73})$		β	5 Std.
32	Ge^{66}			~ 140 Min.
	Ge^{67}		β^+	23 Min.
	Ge^{68}		K	250 Tage
	Ge^{70}	20,55		
	Ge^{71}		K	11 Tage
	$Ge(^{71})$		β^+	38 Std.
	Ge^{72*}		i. Ü., e^-	$5 \cdot 10^{-7}$ Sek.
	Ge^{72}	27,37		
	Ge^{73}	7,61		
	Ge^{74}	36,74		
	Ge^{75}		β^-, γ	89 Min.
	Ge^{76}	7,67		
	$Ge(^{77})$		β^-, γ	12 Std.
	$Ge(^{77})^*$		β^-	59 Sek.
	Ge^{78}		β^-, γ	2,1 Std.
33	$As(^{71})$		η^+	52 Min.
	As^{71}		K	50 Std.
	$As(^{72})$		β^+, γ	26 Std.
	As^{73}		K, e^-	90 Tage
	As^{74}		β^-, β^+, γ	17,5 Tage
	As^{75}	100		

Isotop	Häufigkeit in %
As^{76}	
As^{77}	
As^{78}	
$As(^{78})$	
$Se(^{71})$	
$Se(^{72})$	
$Se(^{73})$	
Se^{74}	0,87
Se^{75}	
Se^{76}	9,02
Se^{77}	7,58
Se^{77*}	
Se^{78}	23,52
Se^{79}	
So^{80}	49,82
$Se(^{81})*$	
Se^{81}	
Sc^{82}	9,19
Se^{83*}	
Se^{83}	
Se^{84}	
$Br(^{75})$	
$Br(^{76})$	
$Br(^{77})$	
Br^{78}	
Br^{79}	50,5
Br^{80*}	
Br^{80}	
Br^{81}	49,5
Br^{82}	
Br^{83}	
Br^{84}	
Br^{85}	
$Br(^{87})$	
$Br(^{87})$	
$Br(^{88})$	
$Kr(^{77})$	
Kr^{78}	0,342
Kr^{79}	
$Kr(^{79,\ 81})$	

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
36	Kr^{80}	2,223		
	Kr^{82}	11,50		
	Kr^{83}	11,48		
	Kr^{83*}		i. Ü., e^-	113 Min.
	Kr^{84}	57,02		
	Kr^{85}		β^-, γ	4,5 Std.
	Kr^{85}		β^-	9,4 Jahre
	Kr^{86}	17,43		
	$Kr(^{87})$		β^-	74 Min.
	Kr^{88}		β^-	3 Std.
	Kr^{89}		β^-	2,6 Min.
	Kr^{90}		β^-	~ 33 Sek.
	$Kr(^{91})$		β^-	5,7 Sek.
	Kr^{92}		β^-	2,3 Sek.
	Kr^{93}		β^-	2,2 Sek.
	$Kr(^{94})$		β^-	1,4 Sek.
	Kr^{97}		β^-	kurz
37	Rb^{81}		β^+, γ, e^-	5,0 Std.
	$Rb(^{82})$		β^+, γ	6,3 Std.
	Rb^{82}			20 Min.
	$Rb(^{84})$		β^+	~ 40 Tage
	Rb^{85}	72,8		
	Rb^{86}		β^-, γ	19,5 Tage
	Rb^{87}	27,2	β^-, γ, e^-	$6 \cdot 10^{10}$ Jahre
	Rb^{88}		β^-	17,5 Min.
	Rb^{89}		β^-, γ	15 Min.
	Rb^{90}		β^-	kurz
	Rb^{91}		β^-	kurz
	$Rb^{>90}$		β^-	80 Sek.
	Rb^{93}		β^-	kurz
	$Rb(^{94})$		β^-	kurz
	Rb^{97}		β^-	kurz
38	Sr^{84}	0,55		
	Sr^{85*}		i. Ü., e^-, γ	70 Min.
	Sr^{85}		K, γ	65 Tage
	Sr^{86}	9,75		
	Sr^{87*}		i. Ü., e^-, γ	2,7 Std.
	Sr^{87}	6,96		
	Sr^{88}	82,74		
	Sr^{89}		β^-	54,5 Tage
	Sr^{90}		β^-	25 Jahre

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität
Sr^{91}		β^-, γ
Sr^{92}		β^-
Sr^{93}		β^-
$Sr(^{94})$		β^-
Sr^{97}		β^-
$Y(^{87})^*$		i. Ü., e^-, γ
Y^{87}		K
Y^{88}		β^+
Y^{88}		K, γ, β^+
Y^{89}	100	
Y^{90}		β^-
Y^{91*}		i. Ü., γ, e^-
Y^{91}		β^-
Y^{92}		β^-, γ
Y^{93}		β^-, γ
$Y(^{94})$		β^-, γ
Y^{97}		β^-
Zr^{89}		e^-, γ, i. Ü.
Zr^{89}		β^+
Zr^{90}	51,46	
Zr^{91}	11,23	
Zr^{92}	17,11	
Zr^{94}	17,40	
Zr^{95}		β^-, γ, e^-
Zr^{96}	2,80	
Zr^{97}		β^-, γ
$Nb(^{90})$		β^+, γ
Nb^{91*}		i. Ü., e^-, γ
Nb^{92}		β^-, γ
Nb^{92}		β^-, γ
Nb^{93}	100	
Nb^{94*}		i. Ü., e^- ($\sim$ 99,9 %), β^- (0,1 %)
Nb^{94}		
Nb^{95*}		i. Ü., e^- (100 %)
Nb^{95}		β^-, γ, e^-
Nb^{96}		β^-, γ
Nb^{97}		β^-, γ
Nb^{98}		β^-

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
42	Mo^{92}	15,84		
	$Mo(^{93})$		β^+, γ	6,7 Std.
	Mo^{94}	9,12		
	Mo^{95}	15,72		
	Mo^{96}	16,53		
	Mo^{97}	9,45		
	Mo^{98}	23,76		
	Mo^{99}		β^-, γ	66,0 Std.
	Mo^{100}	9,62		
	Mo^{101}		β^-, γ	14,6 Min.
	$Mo(^{102})$		β^-	12 Min.
	$Mo(^{105})$		β^-	kurz
43	$Tc(^{92})$		β^+, γ	4,5 Min.
	$Tc(^{92},^{93})$		β^+, γ	2,7 Std.
	Tc^{94*}		i. Ü., e^-	53 Min.
	$Tc(^{94})$		β^+, K (65%), γ	$<$ 53 Min.
	Tc^{95}		K, γ, e^-, β^+ ($\sim$1%)	56 Tage
	Tc^{95}		K, γ, e^-	20,0 Std.
	Tc^{96}		K, e^-, γ	4,30 Tage
	Tc^{97*}		i. Ü., e^-	90 Tage
	Tc^{97}			$>$ 100 Jahre
	$Tc(^{98})$		β^-, K, γ	2,8 Tage
	Tc^{99*}		i. Ü., e^-, γ	6,0 Std.
	Tc^{99}		β^-	$4,7 \cdot 10^5$ Jahre
	$Tc(^{100})$		β^-, γ	80 Sek.
	Tc^{101}		β^-, γ	14,5 Min.
	Tc^{102}		β^-	$<$ 1 Min.
	Tc^{105}		β^-	kurz
44	Ru^{95}		β^+, K, γ	1,65 Std.
	Ru^{96}	5,68		
	Ru^{97}		K, γ, e^-	2,8 Tage
	Ru^{98}	2,22		
	Ru^{99}	12,81		
	Ru^{100}	12,70		
	Ru^{101}	16,98		
	Ru^{102}	31,34		
	Ru^{103}		β^-, γ	45 Tage
	Ru^{104}	18,27		
	Ru^{105}		β^-, γ	4,5 Std.
	Ru^{106}		β^-	1,0 Jahr
	$Ru(^{107})$		β^-	4 Min.

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität
Rh^{100}		K, γ, e^-, β^+ (~ 5%)
Rh^{101}		K, γ, e^-
Rh^{102}		β^-, β^+, γ, K
Rh^{103}	100	
Rh^{103*}		i. Ü., e^-
Rh^{103*}		i. Ü., e^-
Rh^{104*}		i. Ü., e^-
Rh^{104}		β^-, γ, e^-
Rh^{105}		β^-, γ, e^-
Rh^{106}		β^-, γ
Rh^{107}		β^-
Pd^{100}		K, γ
Pd^{101}		K (~ 90%), β^+ (~ 10%)
Pd^{102}	0,8	
Pd^{104}	9,3	
Pd^{105}	22,6	
Pd^{106}	27,2	
Pd^{107}		
Pd^{108}	26,8	
Pd^{109}		β^-
Pd^{110}	13,5	
Pd^{111}		β^-
Pd^{112}		β^-
$Ag^{102, 104}$		β^+, K
Ag^{105}		β^+
Ag^{106}		K, e^-, γ
Ag^{107}	51,35	
Ag^{107*}		i. Ü., e^-, γ
Ag^{108}		β^-
Ag^{109*}		i. Ü., e^-, γ
Ag^{109}	48,65	
Ag^{110}		β^-, γ
Ag^{110}		K, γ, e^-, β^-
Ag^{111}		β^-
Ag^{112}		β^-, γ
Ag^{113}		β^-
Ag^{115}		β^-
$Cd^{105, 107}$		β^+
Cd^{106}	1,215	
Cd^{107}		K (~ 100%), γ (4%), β^+ (0,3%)

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
48	Cd^{108}	0,875		
	Cd^{109}		K	330 Tage
	Cd^{110}	12,39		
	Cd^{111*}		i. Ü., e^-	48,7 Min.
	Cd^{111}	12,75		
	Cd^{112}	24,07		
	Cd^{113}	12,26		
	Cd^{113*}		i. Ü.	2,3 Min.
	Cd^{114}	28,86		
	Cd^{115}		β^-, γ	2,39 Tage
	Cd^{115*}		β^-, γ	43 Tage
	Cd^{116}	7,58		
	Cd^{117}		β^-	2,72 Std.
49	In^{109}		K, β^+, γ	6,5 Std.
	In^{110}		β^+	65 Min.
	In(^{110})?		β^+	72 Min.
	In^{111}		K, γ, e^-	2,84 Tage
	In^{112*}		i. Ü., γ, e^-	23 Min.
	In^{112}		β^+	9 Min.
	In^{113*}		i. Ü., γ, e^-	105 Min.
	In^{113}	4,23		
	In^{114*}		i. Ü., e^-	48 Tage
	In^{114}		β^-	72 Sek.
	In^{115}	95,77		
	In^{115*}		i. Ü.	4,5 Std.
	In^{116}		β^-	13 Sek.
	In^{116}		β^-, γ	54,05 Min.
	In^{117}		β^-	1,90 Std.
50	Sn(^{110})		K	4,5 Std.
	Sn^{112}	0,90		
	Sn^{113}		K, e^-, γ	105 Tage
	Sn^{114}	0,61		
	Sn^{115}	0,35		
	Sn^{116}	14,07		
	Sn^{117}	7,54		
	Sn^{118}	23,98		
	Sn^{119*}	i. Ü., γ, e^-		14 Tage
	Sn^{119}	8,62		
	Sn^{120}	33,03		
	Sn^{121}		β^-	28 Std.
	Sn(^{121}, ^{123})		β^-	130 Tage

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
50	Sn^{122}	4,78		
	$Sn>^{120}$		β^-	60 Std.
	Sn^{123}		β^-, γ	7,5 Tage
	Sn^{124}	6,11	$2\beta^-$	$\sim 10^{16}$ Jahre
	Sn^{125}		β^-, γ	9,8 Min.
	Sn^{123}		β^-	40 Min.
	$Sn(^{121})$		β^-	36 Min.
	$Sn>^{126}$		β^-	$\sim$ 400 Tage
	$Sn(^{126})$		β^-, γ	70 Min.
	$Sn>^{125}$		β^-	$\sim$ 20 Min.
51	$Sb(^{116})$		β^+	60 Min.
	$Sb(^{117})$		K, e^-	2,8 Std.
	$Sb(^{118})$		K, γ, e^-	5,1 Std.
	$Sb(^{118})$		β^+	3,3 Min.
	$Sb(^{119})$		K	39 Std.
	$Sb(^{120})$		β^+	17 Min.
	$Sb(^{120})$		K, γ, e^-	6,0 Tage
	Sb^{121}	57,25		
	Sb^{122*}		i. Ü., e^-	5 Min.
	Sb^{122}		β^-, γ, e^-	3,,67 Tage
	Sb^{123}	42,75		2
	Sb^{124}		β^-, γ	0 Tage
	Sb^{124*}		i. Ü., β^-, γ	621 Min.
	Sb^{124*}		β^-, γ, i. Ü.	1,3 Min.
	Sb^{125}		β^-, γ	2,7 Jahre
	$Sb(^{126})$		β^-	60 Min.
	Sb^{127}		β^-, γ	90 Std.
	Sb^{129}		β^-	4,2 Std.
	Sb^{132}		β^-	5 Min.
	Sb^{133}		β^-	$<$ 10 Min.
	Sb^{134}		β^-	$<$ 10 Min.
52	$Te>^{118}$		β^+	2,5 Std.
	Te^{118}		K	6,0 Tage
	Te^{119}		K, γ, e^-	4,5 Tage
	Te^{120}	0,091		
	Te^{121*}		i. Ü., s^-, γ	143 Tage
	Te^{121*}		i. Ü., γ	$5\cdot10^{-8}$ Sek.
	Te^{121}		K, γ	17 Tage
	Te^{122}	2,49		
	Te^{123}	0,89		
	Te^{124}	4,63		

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
52	Te^{125}	7,01		
	Te^{125*}		i. Ü., e^-	58 Tage
	Te^{126}	18,72		
	Te^{127*}		i. Ü., e^-	90 Tage
	Te^{127}		β^-	9,3 Std.
	Te^{128}	31,72		
	Te^{129*}		i. Ü., e^-	35,5 Tage
	Te^{129}		β^-, γ	72 Min.
	Te^{130}	34,46		
	Te^{131*}		i. Ü., e^-	30 Std.
	Te^{131}		β^-	25 Min.
	Te^{132}		β^-, γ	77 Std.
	Te^{133}		β^-	60 Min.
	Te^{134}		β^-	43 Min.
	Te^{135}		β^-	< 2 Min.
53	J^{124}		β^+	4,0 Tage
	J^{125}		K	56 Tage
	J^{126}		β^-,γ	13,1 Tage
	J^{127}	100		
	J^{128}		β^-, γ	24,99 Min.
	J^{129}		β^-	> 10^8 Jahre
	J^{130}		β^-, γ	12,6 Std.
	J^{131}		β^-, γ, e^-	8,0 Tage
	J^{132}		β^-, γ	2,4 Std.
	J^{133}		β^-, γ	20,5 Std.
	J^{134}		β^-, γ	54 Min.
	J^{135}		β^-, γ	6,6 Std.
	J^{136}		β^-, γ	1,8 Min.
	J^{137}		β^-, n	22,5 Sek.
	J^{138}		β^-	5,9 Sek.
	J^{139}		β^-	2,6 Sek.
54	Xe^{124}	0,094		
	Xe^{126}	0,088		
	Xe^{127}		i. Ü., e^-, γ	75 Sek.
	Xe^{127}		e^-, γ	34 Tage
	Xe^{128}	1,917		
	Xe^{129}	26,24		
	Xe^{130}	4,053		
	Xe^{131}	21,240		
	Xe^{131*}		i. Ü.	12 Tage
	Xe^{132}	26,930		

(Fortsetzung)

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
Xe^{133}		β^-, γ, e^-	5,27 Tage
Xe^{134}	10,520		
Xe^{135}		β^-, γ, e^-	9,2 Std.
Xe^{135*}		γ, i. Ü., e^-	15,6 Min.
Xe^{136}	8,930		
Xe^{137}			68 Min.
$Xe^{(137)}$		β^-	3,9 Min.
$Xe^{(138)}$		β^-	17 Min.
Xe^{139}		β^-	41 Sek.
Xe^{140}		β^-	16 Sek.
Xe^{141}		β^-	1,7 Sek.
Xe^{143}		β^-	~ 1,3 Sek.
Xe^{144}		β^-	kurz
$Xe^{(145)}$		β^-	0,8 Sek.
$Cs^{(130)}$			30 Min.
$Cs^{(131)}$		K, γ, e^-	9,6 Tage
$Cs^{(132)}$		K, γ, e^-	7,1 Tage
Cs^{133}	100		
Cs^{134*}		β^-, γ, i. Ü., e^-	3,15 Std.
Cs^{134}		β^-, γ, e^- (2,5%)	2,3 Jahre
Cs^{135}		β^-	$2 \cdot 10^6$ Jahre
Cs^{136}		β^-, γ	13,7 Tage
Cs^{137}		β^-	37 Jahre
$Cs^{(138)}$		β^-, γ	33 Min.
Cs^{139}		β^-	9,7 Min.
$Cs^{(140)}$		β^-	65 Sek.
Cs^{141}		β^-	kurz
$Cs^{(142)}$		β^-	kurz
Cs^{143}		β^-	kurz
Cs^{144}		β^-	kurz
$Cs^{(145)}$		β^-	kurz
Ba^{130}	0,101		
Ba^{131}		K, γ, e^-	11,7 Tage
Ba^{132}	0,097		
Ba^{133*}		i. Ü., e^-, γ	37,8 Std.
Ba^{133}		K, γ, e^-	> 20 Jahre
Ba^{134}	2,42		
Ba^{135*}		i. Ü., γ, e^-	28,7 Std.
Ba^{135}	6,59		
Ba^{136}	7,81		
Ba^{137*}		i. Ü., γ, e^-	2,63 Min.

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
56	Ba^{137}	11,32		
	Ba^{138}	71,66		
	Ba^{139}		β^-, γ	84 Min.
	Ba^{140}		β^-, γ, e^-	308 Std.
	Ba^{141}		β^-, γ	18 Min.
	Ba^{142}		β^-	6 Min.
	Ba^{143}		β^-	$<$ 1 Min.
	Ba^{144}		β^-	kurz
	Ba^{145}		β^-	kurz
57	$La^{<139}$		β^+	10 Min.
	La^{135}		K, γ	19,5 Std.
	La^{136}		β^+	2,1 Std.
	La^{137}			$>$ 400 Jahre
	La^{138}	0,089		
	La^{139}	99,911		
	$La^{(140)}$		β^-	$\sim$ 3 Jahre
	La^{140}		β^-, γ	10,4 Std.
	La^{141}		β^-	3,7 Std.
	$La^{(142)}$		β^-, γ	77 Min.
	La^{143}		β^-	20 Min.
	La^{144}		β^-	kurz
	$La^{(145)}$		β^-	kurz
58	Ce^{135}		β^+	$\sim$ 16 Std.
	Ce^{136}	0,193		
	Ce^{137}		K, γ, e^-	36 Std.
	Ce^{138}	0,250		
	Ce^{139}		K, γ, e^-	140 Tage
	Ce^{140}	88,48		
	Ce^{141}		β^-, γ	30,6 Tage
	Ce^{142}	11,07		
	Ce^{143}		β^-, γ	33 Std.
	Ce^{144}		β^-, e^-	275 Tage
	$Ce^{(145)}$		β^-	1,8 Std.
	$Ce^{(146)}$		β^-	14,6 Min.
59	Pr^{140}		β^+	3,5 Min.
	Pr^{141}	100		
	Pr^{142}		β^-, γ	19,2 Std.
	Pr^{143}		β^-	13,5 Tage
	Pr^{144}		β^-, γ, e^-	17,5 Min.
	$Pr^{(145)}$		β^-	4,5 Std.
	$Pr^{(146)}$		β^-, γ	24,6 Min.

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
60	Nd^{140}		K	3,3 Tage
	Nd^{141}		β^+ (3%), K (97%), γ	2,42 Std.
	Nd^{142}	27,13		
	Nd^{143}	12,20		
	Nd^{144}	23,87		
	Nd^{145}	8,30		
	Nd^{146}	17,18		
	Nd^{147}		β^-, γ, e^-	11,1 Tage
	Nd^{148}	5,72		
	Nd^{149}		β^-, γ	1,7 Std.
	Nd^{150}	5,60		
61	Pm^{143}		K, e^-, γ	~ 200 Tage
	Pm^{147}		β^-	3,7 Jahre
	Pm^{148}		β^-, γ	5,3 Tage
	Pm^{149}		β^-, γ	55 Std.
62	Sm^{144}	3,16		
	Sm^{147}	15,07		
	Sm^{148}	11,27		
	Sm^{149}	13,87		
	Sm^{150}	7,47		
	Sm^{151}		β^-	~ 20 Jahre
	Sm^{152}	26,63		
	Sm^{152}		α	$2,5 \cdot 10^{11}$ Jahre
	Sm^{153}		β^-, γ, e^-	47 Std.
	Sm^{153}		β^-, γ	25 Min.
	Sm^{154}	22,53		
	Sm^{156}		β^-	~ 10 Std.
63	$Eu^{(147)}$			53 Tage
	Eu^{149}			14 Tage
	Eu^{151}	47,77		
	Eu^{152}		β^-, γ, e^-	9,3 Std.
	Eu^{152}		β^-, γ, e^-	5,3 Jahre
	Eu^{153}	52,23		
	Eu^{154}		β^-, γ, K	5,4 Jahre
	Eu^{155}		β^-, γ	1,7 Jahre
	Eu^{156}		β^-, γ	15,4 Tage
	Eu^{157}		β^-, γ	15,4 Std.
	$Eu^{>154}$		β^-	60 Min.
64	Gd^{152}	0,20		
	Gd^{153}		K, e^-, γ	155 Tage

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
64	Gd^{154}	2,15		
	Gd^{155}	14,78		
	Gd^{156}	20,59		
	Gd^{157}	15,71		
	Gd^{158}	24,78		
	Gd^{160}	21,79		
	Gd^{161}		β^-, γ	18,0 Std.
	Gd			8,6 Tage
	$Gd(^{159}, ^{161})$		β^-, γ	4,5 Min.
	$Gd(^{161})$		β^-	218 Sek.
65	Tb^{152}		K	4,5 Std.
	Tb^{153}		K, e^-	5,1 Tage
	Tb^{154}		β^+, K, γ, e^-	17,2 Std.
	Tb^{155}		K, e^-	~ 1 Jahr
	Tb^{159}	100		
	Tb^{160}		β^-	3,9 Std.
	Tb^{160}		β^-, γ	77,3 Tage
	Tb^{161}		β^-, γ	6,75 Tage
66	Dy^{156}	0,0524		
	Dy^{158}	0,0902		
	Dy^{160}	2,294		
	Dy^{161}	18,88		
	Dy^{162}	25,53		
	Dy^{163}	24,97		
	Dy^{164}	28,18		
	Dy^{165*}		i. Ü., e^-	1,25 Min.
	Dy^{165}		β^-, γ	140 Min.
67	Ho^{160}		K	~ 20 Min.
	$Ho(^{161}, ^{162})$		K, γ, e^-	60 Tage
	$Ho(^{162}, ^{161})$		β^+, K, γ	4,5 Std.
	Ho^{163}		K, e^-	7 Tage
	Ho^{164}		β^-	36,8 Min.
	Ho^{165}	100		
	Ho^{166}		β^-	26,8 Std.
68	Er^{162}	0,1		
	Er^{164}	1,5		
	Er^{166}	32,9		
	Er^{167}	24,4		
	Er^{168}	26,9		

(Fortsetzung)

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
Er^{169}		β^-	9,4 Tage
Er^{170}	14,2		
Er^{171}		β^-, γ, e^-	7,5 Std.
Tu^{166}		β^+, K, γ, e^-	7,7 Std.
Tu^{167}		K, γ, e^-	9,6 Tage
$Tu^{167,\ 168}$		K, e^-	85 Tage
Tu^{169*}		i. Ü., γ, e^-	$1 \cdot 10^{-6}$ Sek.
Tu^{169}	100		
Tu^{170}		β^-, γ	127 Tage
Tu^{171*}		i. Ü., e^-	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Sek.
Tu^{171}		β^-	$\sim$ 500 Tage
Yb^{168}	0,140		
Yb^{169}		K, γ, e^-	33 Tage
Yb^{170}	3,034		
Yb^{171}	14,34		
Yb^{172}	21,88		
Yb^{173}	16,18		
Yb^{174}	31,77		
Yb^{175}		β^-, γ	99 Std.
Yb^{176}	12,65		
Yb^{177}		β^-	2,4 Std.
$Lu^{(170)}$		K, γ, e^-, β^+	2,15 Tage
$Lu^{(171)}$		K, γ, e^-	9 Tage
$Lu^{(171,\ 172)}$			$>$ 100 Tage
Lu^{175}	97,5		
Lu^{176}	2,5	β^- (33 %), γ, K (67 %)	$2{,}4 \cdot 10^{10}$ Jahre
Lu^{176*}		β^-	3,67 Std.
Lu^{177}		β^-, γ	6,8 Tage
Hf^{174}	0,18		
Hf^{175}		K, γ, e^-	70 Tage
Hf^{176}	5,30		
Hf^{177}	18,47		
Hf^{178}	27,10		
Hf^{179}	13,84		
Hf^{180}	35,11		
Hf^{181}		β^-, γ	46 Tage
Hf^{*}		i. Ü., e^-	19 Sek.
$Ta^{(176)}$		K, γ, e^-	8,0 Std.
$Ta^{(177)}$		K, e^-	2,66 Tage

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
73	$Ta(^{178}, ^{177})$		K, e^- oder β^-	16 Tage
	Ta^{180}		K, e^-, γ	8,2 Std.
	Ta^{181*}		i. Ü., γ, e^-	$2 \cdot 10^{-5}$ Sek.
	Ta^{181}	100		
	Ta^{182}		β^-, γ, e^-	113 Tage
	Ta^{182}		β^-, γ	16,2 Min.
74	$W(^{179}, ^{178})$		K, e^-, γ	135 Min.
	W^{180}	0,125		
	W^{181}		K, γ, e^-	140 Tage
	W^{182}	26,31		
	W^{183}	14,28		
	W^{184}	30,64		
	W^{185}		β^-, γ	73,2 Tage
	W^{186}	28,64		
	W^*		i. Ü., e^-	5,5 Sek.
	W^{187}		β^-, γ	24,1 Std.
75	$Re(^{182})$		K, γ, e^-	64 Std.
	$Re(^{183}, ^{184})$		K, e^-	~ 80 Tage
	Re^{184}		β^-, K, γ	50 Tage
	Re^{185}	37,07		
	Re^{186}		β^-	92,8 Std.
	Re^{187*}		i. Ü., e^-, γ	$0,65 \cdot 10^{-6}$ Sek.
	Re^{187}	62,93	β^-	$5,8 \cdot 10^{12}$ Jahre
	Re^{188}		β^-, γ, e^-	18,9 Std.
76	Os^{184}	0,018		
	Os^{185}		K, γ	97 Tage
	Os^{186}	1,582		
	Os^{187}	1,64		
	Os^{188}	13,27		
	Os^{189}	16,14		
	Os^{190}	26,38		
	Os^{191}		β^-, γ, e^-	16,0 Tage
	Os^{192}	40,97		
	Os^{193}		β^-, γ	31,8 Std.
77	Ir^{190}		K, e^-, γ	10,7 Tage
	Ir^{191}	38,5		
	Ir^{192*}		i. Ü., γ, e^-	1,5 Min.
	Ir^{192}		β^-, γ, e^-	75 Tage
	Ir^{193}	61,5		
	Ir^{194}		β^-, γ	19,0 Std.

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität
Pt^{190}	0,006	
Pt^{191}		K, e^-, γ
Pt^{192}	0,78	
Pt^{193}		K, γ, e^-
Pt^{194}	32,8	
Pt^{195}	33,7	
Pt^{196}	25,4	
$Pt(^{196})^*$		i. Ü., e^-, γ
$Pt(^{197})$		β^-
Pt^{197}		β^-, γ
Pt^{198}	7,23	
Pt^{199}		β^-
$Au(^{191})$		K oder β^+
$Au(^{192})$		K, γ, e^-
$Au(^{193})$		K, e^-
$Au(^{194})$		K, γ, e^-
Au^{195}		K, γ, e^-
$Au(^{196})$		β^-, K oder i. Ü.
Au^{196}		γ, e^-, K (70%), β^- (30%)
Au^{197}	100	
Au^{197*}		i. Ü., e^-
Au^{198}		β^-, γ, e^- (4,7%)
Au^{199}		β^-, γ
$Au(^{200}, {}^{202})$		β^-
Hg^{196}	0,15	
Hg^{197}		K, γ, e^-
Hg^{197}		K, γ, e^-
Hg^{198}	10,1	
Hg^{199}	17,0	
Hg^*		i. Ü., e^-, γ
Hg^{200}	23,3	
Hg^{201}	13,2	
Hg^{202}	29,6	
$Hg(^{203}, {}^{205})$		β^-, γ, e^-
Hg^{204}	6,7	
Hg^{205}		β^-
Tl		K, e^-, γ
Tl		K, e^-
$Tl(^{198})$		K, γ, e^-
$Tl(^{199})$		K, γ, e^-

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
81	Tl^{200}		K, γ, e^-	27 Std.
	Tl^{201}		K	75 Std.
	Tl^{202}		K, γ, e^-	13 Tage
	Tl^{203}	29,46		
	Tl^{204}		β^-	2,7 Jahre
	Tl^{205}	70,54		
	Tl^{206}		β^-	4,23 Min.
	AcC''^{207}		β^-, γ	4,76 Min.
	ThC''^{208}		β^-, γ	3,1 Min.
	Tl^{209}		β^-	2,2 Min.
	RaC''^{210}		β^-	1,32 Min.
82	$Pb^{(199)}$		K	1—2 Std.
	$Pb^{(200)}$		K	18 Std.
	$Pb^{(201)}$		K, e^-, γ	8 Std.
	$Pb^{(203)}$		i. Ü. oder K, e^-, γ	52 Std.
	Pb^{204}	1,37		
	Pb^{204m}		i. Ü., γ, e^-	68 Min.
	Pb^{206}	25,15		
	Pb^{207}	21,11		
	Pb^{208}	52,38		
	Pb^{209}		β^-	3,32 Std.
	RaD^{210}		β^-, γ	22 Jahre
	AcB^{211}		β^-, γ	36,1 Min.
	ThB^{212}		β^-, γ	10,6 Std.
	RaB^{214}		β^-, γ	26,8 Min.
83	$Bi^{(198)}$		α, K	9 Min.
	$Bi^{(199)}$		α, K	27 Min.
	$Bi^{(200)}$		α, K	62 Min.
	$Bi^{(204)}$		K, e^-, γ	12 Std.
	Bi^{206}		K, e^-, γ	6,4 Tage
	Bi^{209}	100		
	RaE^{210}		β^- ($\sim$ 100%), α (10^{-4}—10^{-5}%)	5,0 Tage
	AcC^{211}		α (99,68%), γ, β^- (0,32%)	2,16 Min.
	ThC^{212}		α (33,7%), γ, β^- (66,3%)	60,5 Min.
	Bi^{213}		β^-, α (2%)	47 Min.
	RaC^{214}		α (0,04%), β^- (99,96%), γ	19,7 Min.
84	$Po^{(203)}$		α, K	40 Min.
	$Po^{(205)}$		α, K	4 Std.
	Po^{206}		K ($\sim$ 90%), γ, e^-, α ($\sim$ 10%)	9 Tage

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
84	Po^{207}		K (~ 100 %), γ, α (0,01 %)	5,7 Std.
	Po^{208}		α	3 Jahre
	Po^{210}		α, γ	138 Tage
	AcC'^{211}		α	$5 \cdot 10^{-3}$ Sek.
	ThC'^{212}		α	$3 \cdot 10^{-7}$ Sek.
	Po^{213}		α	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$ Sek.
	RaC'^{214}		α	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Sek.
	AcA^{215}		α (~ 100 %), β^- ($5 \cdot 10^{-4}$ %)	$1{,}83 \cdot 10^{-3}$ Sek.
	ThA^{216}		α (~ 100 %), β^- (0,014 %)	0,158 Sek.
	RaA^{218}		α (99,96 %), β^- (0,04 %)	3,05 Min.
85	$At(^{207})$		α, K	1,7 Std.
	At^{208}		α, K	4,5 Std.
	At^{210}		K, γ	8,3 Std.
	At^{211}		α (40 %), K (60 %)	7,5 Std.
	At^{212}		α	0,25 Sek.
	At^{214}		α	sehr kurz, ~ 10^{-6} Sek.
	At^{215}		α	~ 10^{-4} Sek.
	At^{216}		α	$3 \cdot 10^{-4}$ Sek.
	At^{217}		α	0,021 Sek.
86	Em^{216}		α	sehr kurz, ~ 10^{-5} Sek.
	Em^{217}		α	~ $1 \cdot 10^{-3}$ Sek.
	Em^{218}		α	0,019 Sek.
	An^{219}		α	3,92 Sek.
	Tn^{220}		α	54,5 Sek.
	Rn^{222}		α	3,825 Tage
87	Fr^{218}		α	sehr kurz, ~ 10^{-2} Sek.
	Fr^{219}		α	~ 0,02 Sek.
	Fr^{220}		α	27,5 Sek.
	Fr^{221}		α	4,8 Min.
	Fr^{223}		β^-, γ	21 Min.
88	Ra^{220}		α	10^{-2} Sek.
	Ra^{221}		α	31 Sek.
	Ra^{222}		α	38 Sek.
	AcX^{223}		α, γ	11,2 Tage
	ThX^{224}		α	3,64 Tage
	Ra^{225}		β^-	14,8 Tage

(Fortsetzung)

Z	Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
88	Ra^{226}		α, γ	1622 Jahre
	Ra^{227}		β^-	
	$MsTh_1^{228}$		β^-	6,7 Jahre
89	Ac^{222}		α	10 Sek.
	Ac^{223}		α (99,9 %), K (0,1 %)	2,2 Sek.
	Ac^{224}		α (~ 10 %), K (90 %)	2,9 Std. in.
	Ac^{225}		α	10,0 Tage
	Ac^{226}		β^-	22 Std.
	Ac^{227}		α (1,2 %), β^- (99 %), γ, e^-	21,7 Jahre
	$MsTh^{228}$		β^-, γ, α (?)	6,13 Std.
90	Th^{224}		α	~ 1 Sek.
	Th^{225}		α (90 %), K (10 %)	7,8 Min.
	Th^{226}		α	30,9 Min.
	$RdAc^{227}$		α, γ	18,6 Tage
	$RdTh^{228}$		α, γ	1,9 Jahre
	Th^{229}		α	7000 Jahre
	Io^{230}		α, γ	$8{,}0 \cdot 10^4$ Jahre
	UY^{231}		β^-, γ, e^-	25,65 Std.
	Th^{232}	100	α	$1{,}39 \cdot 10^{10}$ Jahre
	Th^{233}		β^-	23,5 Min.
	UX_1^{234}		β^-, γ	24,10 Tage
91	$Pa^{(226)}$		α	1,7 Min.
	Pa^{227}		α (~ 80 %), K (~ 20 %)	38 Min.
	Pa^{228}		α (~ 2 %), K (~ 98 %)	22 Std.
	Pa^{229}		α (~ 1 %), K (~ 99 %)	1,5 Tage
	Pa^{230}		β^-, γ, K (~ 90 %)	17,7 Tage
	Pa^{231}		α, γ	$3{,}43 \cdot 10^4$ Jahre
	Pa^{232}		β^-, γ, e^-	1,3 Tage
	Pa^{233}		β^-, γ, e^-	27,4 Tage
	UZ^{234}		β^-, γ	6,7 Std.
	UX_2^{234*}		β^-, γ, i. Ü. (0,15 %)	1,22 Min.
92	U^{228}		α (80 %), K (20 %)	9,3 Min.
	U^{229}		α (~ 20 %), K (~ 80 %)	58 Min.
	U^{230}		α	20,8 Tage
	U^{231}		K	4,2 Tage
	U^{232}		α	70 Jahre
	U^{233}		α, γ, e^-	$1{,}62 \cdot 10^5$ Jahre
	U_{II}^{234}	0,0051	α	$2{,}35 \cdot 10^5$ Jahre
	AcU^{235}	0,71	α, γ	$8{,}91 \cdot 10^8$ Jahre

(Fortsetzung)

Isotop	Häufigkeit in %	Typ der Radioaktivität	Halbwertszeit
U^{237}		β^-, γ, e^-	6,63 Tage
U_I^{238}	99,28	α	$4{,}498 \cdot 10^9$ Jahre
U^{239}		β^-, γ, e^-	23,54 Min.
Np^{231}		α, K	53 Min.
$Np(^{234})$		K, γ	4,40 Tage
$Np(^{235})$		K, α ($\sim$ 0,1 %)	435 Tage
Np^{236}		β^-, γ	22 Std.
Np^{237}		α	$2{,}20 \cdot 10^6$ Jahre
Np^{238}		β^-, γ, e^-	2,1 Tage
Np^{239}		β^-, γ, e^-	2,33 Tage
$Pu(^{232})$		α	22 Min.
Pu^{234}		α, K	8,5 Std.
Pu^{236}		α	2,7 Jahre
$Pu(^{237})$		K	40 Tage
Pu^{238}		α	92 Jahre
Pu^{239}		α, γ, e^-	$2{,}411 \cdot 10^4$ Jahre
Pu^{240}		α	$\sim$ 6000 Jahre
Pu^{241}		β^-, α ($\sim$ 0,002 %)	$\sim$ 10 Jahre
$Am(^{238})$		K	1,5 Std.
$Am(^{239})$		K ($\sim$ 100 %), e^-, γ, α ($\sim$ 0, 1 %)	12 Std.
$Am(^{240})$		K, γ, e^-	53 Std.
Am^{241}		α, γ	490 Jahre
Am^{242*}		β^-	17 Std.
Am^{242}		α ($\sim$ 0,2 %)	$\sim$ 400 Jahre
$Cm(^{238})$		α	$\sim$ 2,5 Std.
Cm^{240}		α	26,8 Tage
$Cm(^{241})$		K	55 Tage
Cm^{242}		α	150 Tage

XV. Die wichtigsten Atomkonstanten

1. Grundgrößen

1. Avogadrosche Zahl

$$N = 6{,}023 \cdot 10^{23} \text{ (chemische Skala)},$$
$$N = 6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ (physikalische Skala)}.$$

2. Elektronenladung

$$e = 4{,}802 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{CGSE} = 1{,}601 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{CGSM}^{1)}.$$

3. Spezifische Elektronenladung

$$\frac{e}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{7}\,\mathrm{CGSM} \cdot \mathrm{g}^{-1} = 5{,}274 \cdot 10^{17}\,\mathrm{CGSE} \cdot \mathrm{g}^{-1}.$$

4. Plancksche Konstante

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg} \cdot \mathrm{sek}.$$

2. Verschiedene Atomkonstanten

1. Rydberg-Konstante für unendlich große Masse

$$R = 109\,737{,}30\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

2. Rydberg-Konstante für Wasserstoff

$$R_{\mathrm{H}} = 109\,677{,}581\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

3. Rydberg-Konstante für Deuterium

$$R_{\mathrm{D}} = 109\,707{,}419\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

4. Magnetisches Moment des Bohrschen Magnetons

$$\mu_1 = 0{,}927 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{erg} \cdot \mathrm{Gau\ss}^{-1}.$$

5. Magnetisches Moment eines Bohrschen Magnetons pro Mol

$$\mu_1 N = 5585\ \mathrm{erg} \cdot \mathrm{Gau\ss}^{-1} \cdot \mathrm{Mol}^{-1}.$$

6. Elektronenmasse

$$m = 9{,}106 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{g}.$$

---

[1]) 1 CGSE = elektrostatische Ladungseinheit
1 CGSM = elektromagnetische Ladungseinheit

7. Atomgewicht des Elektrons

$$5{,}4862 \cdot 10^{-4} \text{ (physikalische Skala)},$$
$$5{,}4847 \cdot 10^{-4} \text{ (chemische Skala)}.$$

8. Masse des Wasserstoffatoms (H^1)

$$M_{\mathrm{H}} = 1{,}6733 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

9. Protonenmasse

$$M_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

10. Masse des α-Teilchens

$$M_\alpha = 6{,}644 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

11. Verhältnis der Masse des Wasserstoffatoms zur Elektronenmasse

$$\frac{M_{\mathrm{H}}}{m} = 1837{,}5.$$

12. Verhältnis der Protonenmasse zur Elektronenmasse

$$\frac{M_p}{m} = 1836{,}5.$$

13. Anzahl der Moleküle in 1 cm³ unter Normalbedingungen

$$L = 2{,}687 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}.$$

14. Boltzmann-Konstante

$$k = 1{,}380 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{Grad}^{-1}.$$

15. Erste Konstante des Strahlungsgesetzes

$$c_1 = 8\pi hc = 4{,}990 \cdot 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}.$$

16. Zweite Konstante des Strahlungsgesetzes

$$c^2 = \frac{hc}{k} = 1{,}4384 \text{ cm} \cdot \text{Grad}.$$

17. Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes

$$\sigma = 5{,}672 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{Grad}^{-4} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

18. Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes

$$\lambda_{\max} T = 0{,}2897 \text{ cm} \cdot \text{Grad}.$$

19. „Erster Bohrscher Radius"

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} = 0{,}5291 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

20. Compton-Wellenlänge

$$\Lambda = \frac{h}{mc} = 0{,}02427 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

21. Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = 7{,}2981 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha^2 = 5{,}326 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{1}{\alpha} = 137{,}021.$$

22. Schrödinger-Konstante für das Elektron

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} = 1{,}639 \cdot 10^{27} \text{ erg}^{-1}.$$

23. Energie, die einem eV entspricht

$$1{,}6020 \cdot 10^{-12} \text{ erg},$$

24. Umrechnungsfaktor einer atomaren Masseneinheit in MeV

$$1 \text{ ME} = 931{,}04 \text{ MeV}.$$

25. Energieäquivalent der Elektronenmasse

$$0{,}5108 \text{ MeV}.$$

26. „Temperatur“, die 1 eV entspricht

$$11\,606^\circ \text{ K}.$$

27. Energie, die 1° K entspricht

$$0{,}8616 \cdot 10^{-4} \text{ eV}.$$

3. Verschiedene physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = 2{,}99776 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

2. Gravitationskonstante

$$6{,}670 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2}.$$

3. Standard-Atmosphäre

$$A_0 = 1{,}013246 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{atm}^{-1},$$

$$A_{45} = 1{,}013195 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{atm}^{-1}.$$

4. Liter-Volumen

$$V_0 = 1000{,}028 \text{ cm}^3.$$

5. Volumen eines Mols eines idealen Gases

$$(0^\circ\, C, A_0)\colon\ V_0 = 22{,}4146 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot \text{atm} \cdot \text{Mol}^{-1} = 22{,}4140 \text{ l} \cdot \text{atm} \cdot \text{Mol}^{-1},$$

$$(0^\circ\, C, A_{45})\colon\ V_0 = 22{,}4157 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot \text{atm} \cdot \text{Mol}^{-1} = 22{,}4151 \text{ l} \cdot \text{atm} \cdot \text{Mol}^{-1}.$$

6. Mechanisches Wärmeäquivalent

$$J_{15} = 4{,}1855 \text{ Joule} \cdot \text{cal}_{15}^{-1}.$$

7. Absolute Schmelztemperatur des Eises

$$T_0 = 273{,}16^\circ \text{ K}.$$

8. Gaskonstante pro Mol

$$R_0 = 8{,}3144 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{Grad}^{-1} \cdot \text{Mol}^{-1} = 1{,}9864 \text{ cal}_{15} \cdot \text{Grad}^{-1} \cdot \text{Mol}^{-1} =$$
$$= 8{,}2054 \cdot 10^{-2} \cdot \text{l} \cdot \text{atm} \cdot \text{Mol}^{-1}.$$

$$\text{Produkt } R_0 T_0 = 2{,}27115 \cdot 10^{10} \text{ erg} \cdot \text{Mol}^{-1}.$$

9. Verhältnis der Einheiten in der physikalischen und chemischen Skala

$$r = 16{,}00435 : 16 = 1{,}00027.$$

10. Faradaysche Konstante

$$F = 9649{,}6 \text{ CGSM } g\text{-äquiv.}^{-1} \text{ (chemische Skala)}$$
$$= 9652{,}2 \text{ CGSM } g\text{-äquiv.}^{-1} \text{ (phys. Skala)}$$

11. Dichte des Quecksilbers (0°, A_0)

$$D_0 = 13{,}5954.$$

12. Schwerebeschleunigung

$$\text{Standart:} \quad g_0 = 980{,}665 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2},$$
$$\text{Für } 45^\circ \text{ Breite:} \quad g_{45} = 980{,}616 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

									2 He 4,003
4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 O 16,0000	9 F 19,000				10 Ne 20,183
12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457				18 Ar 39,944
20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69	
30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916				36 Kr 83,7
38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc (99)	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71	
48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92				54 Xe 131,3
56 Ba 137,36	57 La* 138,92	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,92	75 Re 186,31	76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23	
80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 208	85 At (211)				86 Rn 222
88 Ra 226,05	89 Ac 227,05	**							

SACH- UND NAMENREGISTER

α-Strahlen 412
α-Teilchen, Reaktionen der 404
α-Teilchen, Reichweite von 432
α-Umwandlung 413
α-Zerfall 453
Abschirmungsdublett 243
Abschirmungszahl 229, 230
Absorption der Höhenstrahlen 566, 567
Absorption des Lichtes 122, 126
Absorption, photoelektrische 442
Absorption, selektive 296, 392
Absorption von γ-Strahlen 441
Absorption von Neutronen 509
Absorption von π-Mesonen 606
Absorptionsbänder, Kanten der 242
Absorptionsgesetz für Elektronen 439
Absorptionskoeffizient für γ-Strahlen 444
Absorptionslinie, Kontur der 261
Absorptionsröntgenspektren 238
Absorptionsspektrum von Na-Dampf 100
Aktiniumreihe 429
Aktivierungsenergie 530
ALICHANOW, ALICHANJAN und ARZIMOWITSCH, Versuche von 452
ALICHANJAN, Versuche von 621
Alkalimetalle, Dubletts der 181
Alkalimetalle, Spektralserien der 104
ALLEN, Methode von 466
ALVAREZ und BLOCH, Methode von 496
Americium 542
angeregte Zustände, Lebensdauer der 260ff
Anregung, optische 247
Anregung, stufenweise nach WOOD 250
Anregung, thermische 251
Antikoinzidenzschaltung 338
ARKADJEW, BERKMAN und JAKOWLEW, Versuche von 506
Atom, magnetisches Moment des 140
Atom, wasserstoffähnliches 83
atomare Konstanten, Bestimmung nach KRAWEZ 261
Atomgewichtsbestimmung von BUTLEROW 374
Atomkonstanten 676ff
AUGER-Effekt 265
AUGER-Elektron 442, 473
AUGER-Schauer 623
Ausschließungsprinzip 209
Auswahlregeln 131, 164, 184, 269, 470, 490
Auswahlregeln, theoretische Grundlagen der 269
Austauschenergie 206
Austauschentartung 196, 199
Austauschintegral 206
Autoionisation 262

β-Prozeß, erlaubter 469
β-Prozeß, verbotener 470
β-Spektren 460, 475
β-Strahlen 412
β-Teilchen, Reichweite der 437
β-Umwandlung 413
β-Zerfall 303, 459f, 471
BABINETsches Prinzip 501
BACK-PASCHEN-Effekt 192
BALMER-Energieniveaus 94
BALMER-Formel 170, 181, 229
BALMER-Linien 84
Bahnimpulse, Addition der 220
barn 380
BARNETT, Versuch von 153
BERGMANN-Serie 109
Berkelium 542
Beryllium- 8, Energieniveaus des 401
Berylliumkern, Bindungsenergie des 304
Beschleuniger für Protonen 368
Beschleuniger, linearer 366
Beschleuniger nach SLOAN und LAWRENCE 366
Betatron 354ff
Betatron der „General Electric" 361
Betatron, Maximalenergie des 362
Betatron, Verteilung der magnetischen Kraftlinien im 358
BETHE, Formel von 557
Beugung von Neutronen 501
Bevatron 366
Bewegung, kollektive, aller Kernteilchen 386
Bewegung im Zentralfeld 63
Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik 55, 57
Bindungsenergie 308
BIOT-SAVARTsches Gesetz 173
BLOCH und ALVAREZ, Methode von 496
BOHRsche Frequenzbedingung 7, 12
BOHRscher Radius 174
BOHR-SOMMERFELD, Postulate von 22
BOSE-Teilchen 210
BOTHE und KOHLHÖRSTER, Versuche von 564
BRAGG-CLEEMANsche Näherungsformel 435
BRAGG-Kurve 434
Brechungsindex für Neutronenwellen 504

BREIT und WIGNER, Formel von 393f, 504
Breiteneffekt der Höhenstrahlung 572
Bremseigenschaften des Moderators 548
Bündel, „zwinkerndes" 508

Californium 542
CARIO und FRANCK, Versuch von 254
Cäsium, Energieniveaus des 108
CLEEMAN-BRAGGsche Näherungsformel 435
C-N-Zyklus 560
Compoundkern 382
COMPTON-Effekt 485
COMPTON-Rückstoß 89
COMPTON-Streuung 443
Cosmotron 366
CROOKESsches Spinthariskop 341
Curie 425
CURIE und LABORDE, Versuch von 426
CURIE-Konstante 225
Curium 542

Dauergleichgewicht 424
DE-BROGLIE-Welle 17
DE-BROGLIE-Welle des Neutrons 394
DE-BROGLIE-Welle, Dispersionsgesetz der 158
Deformation, kritische 532
DE HAAS-EINSTEIN-Effekt 153
Deuteron 319
Deuteron, Bindungsenergie des 320
Deuteron, Massendefekt des 404
Deuteron, Potentialtopf des 321
Deuteron, Reaktionen des 402
Deuteron, Theorie des 322
Deuteron, Zerreißen des 407
Deuteroneneinfang, teilweiser 403
Dichteverteilung 42
diffuse Serie, Tripletts der 109, 218
Dipol, Energie des 166
Dipolmoment des Kerns 288
Dipolstrahlung 639
Dipolstrahlung, Matrixelement der 470, 645
DIRAC-Gleichung 159ff
DIRACsche Theorie 446
Dispersionsgesetz 158
DOPPLER-Effekt, Linienverbreiterung durch 254
Drehimpuls, Erhaltung des 637
DSCHELEPOW und WLASSOW, Versuch von 452
Dublett 242
Dubletts der Alkalimetalle 181
Dublett, irreguläres 243
Durchdringungsvermögen der Höhenstrahlen 566
Durchlässigkeit 454
Durchlässigkeit für langsame Neutronen 406, 511

EHRENFEST, Theorem von 56, 292
Einfangquerschnitt 394
Eigenfunktion, gemeinsame 33
Eigenfunktion, symmetrische, antisymmetrische 205
Eigenfunktion, linear ab- und unabhängige 15
Eigenfunktionen linearer Operatoren 6
Eigenfunktionen, Orthogonalität der 11
Eigenfunktionen wasserstoffähnlicher Atome 138
Eigenwerte linearer Operatoren 6
EINSTEIN-DE HAAS-Effekt 153
EINSTEIN-Koeffizienten 128
EINSTEIN, Strahlungstheorie von 128
EINSTEINsche Gleichung 243
Elegas 348
Elektron 316
Elektron, Hypothese des rotierenden 148
Elektron im Magnetfeld 143
Elektron, Spin des 148, 168
Elektron, magnetisches Eigenmoment des 163
Elektronen, Bindungsenergie der inneren 244
Elektronen-Kernschauer 623
Elektronenschale 233
Elektronenabsorption 439
Elektronenbahn, Stabilitätsbedingung der 356
Elektronenschicht 233
Emission des Lichtes 122
Emission, erzwungene 126, 128
Emission, spontane 128
Energie der β-Teilchen 437
Energiebilanz der Spaltungsreaktion 527
Energieerhaltungssatz 61
Energieniveau, virtuelles 391, 631, 636
Energieoperator, Eigenfunktion des 170
Energiespektrum von α-Teilchen 457
Energiespektrum von Zerfallsteilchen 602, 603
Energieverlust durch Ionisation 577, 590
Energieverlust durch Strahlung 590
Entartung 14, 94, 230
Entropie des Kerns 383
Erhaltungssätze der Quantenmechanik 59
Erwärmungseffekt 420

Feinstrukturformel 170, 181
Feinstrukturkonstante 174
FERMI, Annahme von 522
FERMI-Teilchen 210
Fluoreszenz 251
Fluoreszenz, Depolarisation der 257
Fluoreszenz, sensibilisierte 254, 256
Fluoreszenzlöschung 256
Fokussierung im Zyklotron 357ff, 452
Francium 277
FRANCK-HERTZ-Versuch 250, 253
FRANCK und CARIO, Versuch von 254
FRISCH, Versuch von 283
FRISCH und MEITNER, Versuche von 524
Fundamentalserie 109
Funktionen, normierte 13

γ-Radioaktivität, selbständige 488
γ-Strahlen, Absorption der 441
γ-Strahlen, innere Umwandlung der 481
γ-Strahlen, Streuung der 441
γ-Strahlenspektroskopie 485
γ-Strahlung 412, 456, 477
GEIGER-MÜLLER-Zählrohr 335
GEIGER-NUTTALLsches Gesetz 436, 455
GEIGER und RUTHERFORD, Versuche von 418
Gleichgewicht, dauerndes 423
Gleichgewicht, Prinzip des detaillierten 253
Generator, elektrostatischer 347
Generator, VAN DE GRAAFscher 348
Geokoronium 272
geomagnetische Effekte 569
gerade-gerade Kerne 314
gerade-ungerade Kerne 314
Geradheit der Wellenfunktion 470
GERLACH-STERN, Versuch von 150, 288
Gesamtimpulsmoment, Quantenzahl des 182
Geschwindigkeitsselektor, mechanischer 505
GOUDSMIT und UHLENBECK, Hypothese von 154
GROTRIAN-Diagramm 105

Hakenmethode nach ROSHDESTWENSKI 261
Halbwertszeit 276, 415
Halbwertszeit der Isotope 651ff
HAMILTON-Funktion 171
HAMILTON-Funktion für Zweielektronenproblem 110
HAMILTON-Operator 20, 143, 196
HAMILTONsche kanonische Gleichungen 57
Hauptquantenzahl, effektive 103, 181
Hauptserie des Natriums 100
HEISENBERGsche Ungenauigkeitsrelation 36, 39
heiße Funken, Methode der 228
Helium, Energieniveaus des 195
Helium, Feinstruktur des 179
Helium-Problem 201
Helium, Singulett- und Triplettzustand des 212ff
Helium, Termschema des 264
Heliumatom, Grundzustand des 116
HELMHOLTZ-KELVIN, Theorie von 555
HERMITE-TSCHEBYSCHEWsche Polynome 132
HERTZ-FRANCK-Versuch 250, 253
HERTZscher Dipol 641
Hochfrequenzspektroskopie 180, 288, 295, 496
Höhenstrahlung, Breiteneffekt der 572
Höhenstrahlung, harte Komponente der 568, 595
Höhenstrahlung, Intensität der 563
Höhenstrahlung, sekundäre 562
Höhenstrahlung, Ursprung der 561, 624ff
Höhenstrahlung, weiche Komponente der 568, 595
Hohlleiter, belasteter 366
Hohlraumstrahlung 129
Hyperfeinstruktur 282

Identität der Mikroteilchen, Prinzip der 200
Illinium 277
Impulse, Vektordiagramm der 377
Impulsmoment, Eigenfunktionen des 69ff
Impulsmoment, Eigenschaften des 66
Impulsmoment, Operator des 63, 72
Indikatormethode 520, 543
Induktionsbeschleuniger von KERST 354
Interferenz 46
Interkombination 270
Interkombinationsverbot 196
Intervallregel, spektroskopische 297
Ion, Bremsung des, im Zyklotron 362
Ionen, isoelektronische 225
Ionen, maximale Energie der, im Zyklotron 452
Ionisation 439
Ionisation, Energieverlust durch 577
Ionisationsenergie 119
Ionisationsenergie des Wasserstoffs 84
Ionisationskammer 336, 339
Ionisation, spezifische 434
Ionisationswahrscheinlichkeit 265
Isobar 278
Isobare, stabile 476
Isobaren, Triaden von stabilen 278
isoelektrische Reihe, MOSELEY-Diagramm der 229
Isomer 278
isomere Kerne 488
Isotope 277, 651ff
Isotope, stabile und radioaktive 279, 280
Isotope, Häufigkeit der 281

JOLIOT-CURIE, I. u. F., Experiment von 492

Kanalstrahlmethode 260
kanonische Gleichungen, HAMILTONsche 57
Kaskadenprozeß 561, 623
Kaskadenschauer 593
K-Einfang 460, 465, 473
KELVIN-HELMHOLTZ, Theorie von 555
KEPLER-Problem 89
KEPLER-Bewegung, Potentialkurve der 91
Kern als quantenmechanisches System 385
Kern, Aufbau des 278
Kern, effektiver 101
Kern, Entropie des 383
Kern-Magnetkreisel 289
Kern, magnetisches Dipolmoment des 288
Kern, Potentialkurve des 299
Kern, radioaktiver 276
Kern, stabiler 276, 307

Kernbindungsenergie 303, 310
Kernerwärmung 384
Kerngröße, Bestimmung der 299
Kernisomerie 487
Kernkraft, Abhängigkeit vom Spin 328
Kernkraft, Eigenschaften der 297, 328
Kernladung 276
Kernmagneton 288
Kernmasse 277
Kernmoment, magnetisches 295
Kernphotoeffekt 319, 410, 498
Kernreaktion 370, 389
Kernreaktion, Energie der 372ff
Kernreaktion, photochemische 410
Kernspaltung 345, 370, 397, 521, 526
Kernspin 281, 284
Kerntemperatur 383
Kernthermometer 385
Kerntrümmer des U^{235} 536
Kernumwandlung, spontane 412
Kernzertrümmerung 409
Kettenreaktion 545
Klein, Nishina und Tamm, Formel von 443
Kohlhörster, Versuche von 562
Koinzidenzschaltung 338
Konfigurationsraum 110
Kontinuitätsgleichung 43
Konversion, innere 482
Kopplung, normale 219
Kreisstrom, magnetisches Dipolmoment des 479
Kristallspektrometer 513
Kristallzähler 341
kritische Größe des Reaktors 551

Laborde und Curie, Versuch von 420
Laborsystem 375
Ladungsdichte, mittlere 99
Ladungsverteilung im Kern 296
Lamb und Retherford, Methode von 180
Laplacesche Gleichungen 69
Laplacescher Operator 83
Landé-Faktor 189
Laporte, Regel von 646
Larmor-Präzession 172
Latischew und Leipunski, Versuch von 253
v. Laue, Methode von 516
Laufzeitmethode 506
Lebensdauer, Bestimmung der 260
Lebensdauer des angeregten Zustandes 135
Lebensdauer, mittlere 271, 415
Lebensdauer von π-Mesonen 604
Legendresche Gleichung 90
Legendrescher Operator 65
Leipunski und Latischew, Versuch von 253
Leipunski, Versuch von 465, 467
Leuchtelektronenmodell 100
Linearbeschleuniger 366
Linearbeschleuniger, Theorie des 367
Linienumkehr 238
Linie, verbotene 139, 273
Linienverbreiterung 254
Lithiumkern, Spaltung eines 372
Lithium, Resonanzkurve des 294
Lithiumterme 103, 106
Lorentz-Aufspaltung, normale 190
Lorentz-Formel 185
Lorentz-Kraft 443
Lorentz-Transformation 158
Lorentz-Triplett, normales 147, 193
Löchertheorie von Dirac 448
Lukirski und Perfilow, Beobachtungen von 614
Lumineszenzzählrohr 342

Magnesium, Schema der Energieniveaus des 217
Magnesiumtriplett, Entstehung des 268
magnetomechanische Effekte 153
magnetooptische Umwandlung 192
Masse leichter Kerne 647ff
Massendefekt 307, 309
Massenskala, chemische 305
Massenskala, physikalische 305
Massenzahl 277
Masurium 277
Matrixelement 126
μ-Meson 318
μ-Meson, Masse des 600, 618
μ-Mesonen, Lebensdauer der 604
Meson 317, 596ff
Meson, neutrales 619
Meson, Zerfall des 611ff
Mesonenabsorption, anomale 608
Mesonen, Bestimmung der Lebensdauer der 610
Mesonenladung 331
Mesonenmasse 332
Mesonen-Zerfallskurve 605
Mesotron 596
Methode der markierten Atome 520
Methode, photographische zur Registrierung von Teilchenbahnen 344
Miller und Sazepin, Versuch von 623
Mittelwerte mechanischer Größen 28, 31, 52
Moderator 547
Monochromatisierung von Neutronen 505
Moseley-Diagramm der isoelektronischen Reihe 229
Moseleysches Gesetz 230, 238
Müller-Geiger-Zählrohr 335
Multiplikator, monochromatischer 40
Multiplizität, Wechsel der 223
Muttersubstanz 421
Mysowski, Methode von 344
Mysowski und Shdanow, Methode von 583
Mysowski und Tuwin, Versuch von 566

Na-Dublett, Aufspaltung des 191, 281
Natrium, Energieniveaus des 107
Natrium, Feinstruktur der D-Linien 282
Natrium, Resonanzlinien des 247
Natriumlinie, gelbe 104
Nebelkammer 342
Nebelleuchten 274
Nebenserie 109
Nebenserie, zweite 218
Nebulium 272
Neptunium 432, 540
Neutrino 316, 463, 473
Neutron 317, 492
Neutron, β-Zerfall des freien 460
Neutron, DE-BROGLIE-Wellenlänge des schnellen 406
Neutron, magnetisches Moment des 293, 497
Neutron, Masse des 303, 494
Neutron, Massendefekt des 307
Neutron, Radioaktivität des 496, 538
Neutron, thermisches 346
Neutronen, Entstehung verzögerter 539
Neutronen, Entstehung von 409
Neutronen, Erzeugung kalter 520
Neutronen, Erzeugung monochromatischer 505, 512
Neutronen, Monochromatisierung von 505
Neutronen, Nachweis von 345ff
Neutronen, Polarisation der 520
Neutronen-Radioaktivität 496, 538
Neutronen, Resonanzabsorption von 394
Neutronenabsorption 509
Neutronenausbeute 498
Neutronenbeugung 517
Neutronenemission, sofortige 538
Neutronenemission, verzögerte

Neutronenenergie, Abhängigkeit der, vom Emissionswinkel 379
Neutronenlawine 545
Neutronenquelle Ra + Be 497
Neutronenreflexion 519
Neutronenspektrometer 513
Neutronenstreuung, elastische 545
Neutronenstrom, monochromatischer 380
Neutronenwellen, Brechungsindex der 504
NISHINA, KLEIN und TAMM, Formel von 443
Niveauabstände, Formel der, von LANDAU 387
Niveaubreite 262, 390
Niveauverteilung nach BOHR 388
Nordlicht 569
Normierung von Funktionen 11
Nukleon 303, 469
Nukleonenverdampfung 384
Nullpunktschwingungen 181
NUTTALL-GEIGERsches Gesetz 436, 455

OCCHIALINI und POWELL, Versuche von 612
Operator des Impulsmomentes 63
Operator des radialen Momentes 68
Operatoren, antikommutative 3
Operator, hermitescher 9
Operator, linearer 1
Operatoren, Produkt mehrerer 2
Operator, selbstadjungierter 9
Operatorensumme 2
Operator, LEGENDREscher 65
OPPENHEIMER- und PHILLIPS-Prozeß 402, 408
Orthohelium 195
orthonormierte Systeme 11
Orthowasserstoff 287
Orthozustand des Heliums 215
Ost-West-Effekt 574
Oszillator, Dämpfungsfaktor des 135
Oszillator, linearer harmonischer 55, 131

$\pi \to \mu \to e$ Zerfall 613
π-Meson 318, 561, 611
π-Meson, Masse des 618
π-Mesonen, künstliche Erzeugung von 615
π-Mesonen, Lebensdauer geladener 617
Paarbildung 445, 448, 482
Paarbildung, Wirkungsquerschnitt der 450
Paarvernichtung 437
Packungsanteil 307, 309
paramagnetische Theorie von LANGEVIN 225
Parawasserstoff 287
Parazustand des Heliums 215
Parhelium 195
Parität des Zustands 643
PASCHEN-BACK-Effekt 192
PAULI, Hypothese von 463
PAULIscher Operator 157
PAULI-Prinzip 208, 211, 231
PAULIsche Theorie 157
PERFILOW und LUKIRSKI, Beobachtungen von 614
Periodisches System der Elemente 230, 232
Permutationsentartung 199
Permutationsoperator 200
Phasotron 364
PHILLIPS- und OPPENHEIMER-Prozeß 402, 408
Photoeffekt 155, 244
photoelektrische Absorption 442
Photoelektronenvervielfacher 341
Photon 316
Photonenstreuung, unelastische 390
Photoplattenmethode 578
Photoplattenmethode nach SHDANOW 344
Platzwechselvorgang 331
Plutonium 277, 541, 544
Plutoniumgewinnung 552
POISSONsche Klammer, klassische 56
POISSONsche Klammer, quantenmechanische 57
Polarisation der Neutronen 520
Polarisationsregeln 138
Polarkoordinaten, räumliche 63
Polonium 429
Positron 58, 162, 316
Positron, Eigenschaften des 446

Positron, Entstehung des 444
Potentialmodell des Kerns 454
Potentialtopf 196, 386, 631
POWELL und OCCHIALINI, Versuche von 612
POYNTING-UMOWscher Vektor 642
Praseodym, Hyperfeinstruktur der Linien des 283
Primärstrahlung 561
Problem, gestörtes 113
Proportionalzähler 336
Proton 317
Protonen, COULOMBsche Abstoßung der 313
Protoneneinfang, Wirkungsquerschnitt des 399
Protonen-Elektronen-Modell des Kerns 301
Protonen-Neutronen-Modell des Kerns 301
Protonensynchroton 366
Proton, magnetische Momente des 293
Proton, Streuung eines 345

Quadrupolstrahlung 639, 643
Quantelung 21
Quantelung, räumliche 76
Quantenübergang, Wahrscheinlichkeit des 470
Quantenzahl, azimutale 94
Quantenzahl, magnetische 193
Quantenzahl, radiale 94
Quantenzahlen 230
Quasi-Kontinuum 386
Quecksilber, Energieniveaus des 248
Quecksilber, Löschung der Resonanzfluoreszenz 256

RABI, Methode von 288, 496
Radialgleichung 96
Radioaktivitätskonstante 436
radioaktive Familie 413, 430
radioaktive Umwandlungen, Fluktuationen der 418
radioaktiver Zerfall, Elementargesetz des 413
radioaktiver Zerfall, Theorie von RUTHERFORD und SODDY 412
Radiophosphor, Halbwertszeit des 405
Radiosilizium, Halbwertszeit des 405
Radiostickstoff, Halbwertszeit des 405
Radium, Energiebilanz des 427
Radium, Umwandlung des 413
Radon, Bildung des 414
RAYLEIGH-Streuung 390
RAYLEIGH und WOOD, Methode von 260
Reaktion (α, n) 498
Reaktion (d, n) 498
Reaktion, endoenergetische 371
Reaktion (γ, n) 498
Reaktion, thermonukleare 533
Reaktionen der α-Teilchen 404
Reaktionen der Deuteronen 402
Reaktion, exoenergetische 371
Reaktion (n, α) 397
Reaktion (n, γ) 397
Reaktion (n, 2n) 398
Reaktion (p, α) 401
Reaktion (p, γ) 398
Reaktion (p, n) 397, 399
Reaktor, kritische Größe des 551
Reflexion von Neutronen 519
Reichweite von Elektronen (β-Teilchen) 437, 440
Reichweite, extrapolierte 433
Resonanz 390
Resonanzabsorption in U^{238} 547
Resonanz von Neutronen 394
Resonanzeinfang 549
Resonanzfluoreszenz 247
Resonanzlinie 105, 218
Resonanzlinie, Absorption der 251
Resonanzmethode, magnetische 288, 290
Resonanzstrahlung 247
RETHERFORD und LAMB, Methode von 180
Reversibilität, mikroskopische 253
Richtungsquantelung 76
ROSHDESTWENSKI, Hakenmethode von 261
Röntgenbremsstrahlung 439
Röntgenemissionsspektrum 238
Röntgenniveau, Bestimmung des, durch LUKIRSKI 244
Röntgenspektrum 238
Röntgenstrahlen, charakteristische 442
Rosettenbahn 171
ROSSI-Kurve 589
Rotationsellipsoid, Quadrupolmoment des 296
Rotator, starrer 75
Rückstoßelektron 449
Rückstoßionen, Impulsverteilung der 469
Rückstoßprotonen 484, 493
Ruhenergie des Elektrons 441
RUSSIONOW und KARMJAN, Methode von 491
RUTHERFORD, Entdeckung der Kernreaktion von 370
RUTHERFORD und GEIGER, Versuche von 418
RYDBERG-Formel 181, 228
RYDBERG-Konstante 100, 174

Sauerstoff, Massendefekt des 307
Sauerstoff-16, Energieniveau des 401
SAZEPIN und MILLER, Versuch von 623
scharfe Serie 109
scharfe Serie, Tripletts der 218
Schauer 587
Schauer, durchdringender 622
SCHEIN, Versuche von 575
SCHRÖDINGER-Gleichung 632
SCHRÖDINGER-Gleichung, allgemeine 39, 40, 49
SCHRÖDINGER-Gleichung für Helium-Atom 201
SCHRÖDINGER-Gleichung für gestörtes Problem 121
SCHRÖDINGER-Gleichung für linearen harmonischen Oszillator 22
SCHRÖDINGER-Gleichung in Polarkoordinaten 102
SCHRÖDINGER-Gleichung, verallgemeinerte 120
SCHRÖDINGER-Gleichung, zeitunabhängige 40
Schwächungskoeffiziet 442

Schwerpunktssystem 375
Selbstumkehr 250, 255
seltene Erden, Paramagnetismus der 227
SHDANOW, Photoplattenmethode nach 344
SHERVIN, Versuche von 467
Skandium 235
SKOBELZIN, Methode von 445, 578
SOMMERFELD, Feinstrukturkonstante von 172, 181
Spaltprodukt 536
Spaltung, spontane 534
Spaltung von U^{235} und U^{238} 535
Spaltungsreaktion, Energiebilanz der 527
Spektrallinien, Feinstruktur der 281
Spektrallinien, Intensität der 266
Spektrallinien, Verbreiterung der 262
Spektrograph, magnetischer 244
Spektrograph, magnetischer von ALICHANOW 483
Spektrum der Eigenwerte 7
Spektrum des Operators 7
Spektrum, diskretes 7
Spektrum, kontinuierliches 7, 23
Spin-Bahn-Kopplung 219
Spinmoment 152
Spinquantenzahl, magnetische 193
Spinthariskop, CROOKESsches 341
Spinvariable 211
Spinwelle 156
Splitterpaar 534
spontaner Kernzerfall, statistisches Gesetz des 415
STERN-GERLACH-Versuch 150, 288
Sterninneres, Temperatur und Druck 555
Stickstoffkatastrophe 301
Stickstoffkern, Spaltung eines 371
Störungspotential, Mittelwert des 115
Störungstheorie 112
Stöße zweiter Art 252
Strahlungsintensität 480
Streuquerschnitt 393
Streuung, elastische 439
Streuung, kohärente 390
Streuung von γ-Strahlen 441
Strichterm 265, 386
Superpositionsprinzip 18
Synchronisation 349
Synchrotron 363
Synchrozyklotron 364
Synchrozyklotron von Berkeley 365
System, vollständiges 13
Szintillationszählrohr 341

TAMM, KLEIN und NISHINA, Formel von 443
Teilchen, Registrierung der Bahn schneller 344
Teilcheneinfang 388ff
„Teleskop" für Höhenstrahlen 565
Temperaturstrahlung 267
Thalliumdampf, Niveauschema des 249
THOMSONscheFormel 443
Thoriumreihe 429
Thoriumverzweigung 462
TIBEAUD, Versuche von 445
Tochtersubstanz 421
Totzeit 337
Transurane 235, 277
Tritium 378, 396
Trümmerausbeute 536
TSCHEBYSCHEW-HERMITEsche Polynome 132
Tunneleffekt 453

Übergang, Dipolmoment des 125
Übergang, isomerer 487
Übergang, erlaubter 470
Übergang, verbotener 131, 272, 470
Übergangsgleichgewicht 422
Übergangsgruppe 542
Übergangskurve 589
Übergangswahrscheinlichkeit 125, 180, 215, 270
Übergangswahrscheinlichkeit erlaubter Übergänge 134
Überstruktur 519
UHLENBECK und GOUDSMIT, Hypothese von 154
Ultramikrochemie 541
Ultramikrowaage 544
UMOW-POYNTINGscher Vektor 642
Ungenauigkeitsrelation, HEISENBERGsche 36, 39
ungerade-gerade Kerne 314
ungerade-ungerade Kerne 314
Uranmeiler 541, 551
Uran, Potentialwall des 299
Uran-Reihe 428
Uranspaltung 525

Vakuum, physikalisches 181
Valenzelektron 101
Valenzelektronenmodell 99
Variation der Konstanten, Methode der 120
Verschiebungsregel 223
Verschiebungssatz 428
Versuchsanordnung nach WOOD 250
Vertauschungsregeln 35, 66
Vertauschungsregeln für Impulsmomente 67
Vervielfachungskoeffizient 549
Verweilzeit 124, 391
Verzweigung der Umwandlung 429
Vielfachspaltung 411

Wahrscheinlichkeit, Amplitude der 46
Wahrscheinlichkeitsdichte 17, 85, 207
Wahrscheinlichkeitsdichte, Polardiagramm der 81
Wahrscheinlichkeitsdichte, radiale Komponente der 96
Wahrscheinlichkeitsstrom 43, 140
Wahrscheinlichkeitsstromdichte 43
Wasserstoff, Energieniveaus des 95
Wasserstoff, Ionisationsenergie des 84
Wasserstoff, Massendefekt des 307
Wasserstoff, schwerer 319

Wasserstoff, Verschiebung der Energieniveaus 179
wasserstoffähnliche Atome, Eigenfunktionen der 138
wasserstoffähnliche Atome, Elektronenwolke der 98
Wasserstoffatom, Energie des Grundzustandes 84
Wasserstoffkern 101
Wasserstoffkern, Hochfrequenzspektrum des 294
Wasserstoffterme 103
Wellenfunktion 17
Wellenfunktion, Geradheit der 470
Wellenfunktion, symmetrische 210
Wellenfunktion, vollständige 211
Wellengleichung, relativistische zweiter Ordnung 157
Wellenpaket 25
Wellenpaket, Schwerpunkt des 53
WIGNER und BREIT, Formel von 393f, 504, 510
WILSON-Kammer 342
WILSON-Kammerverfahren 578
Wirkungsquerschnitt 379
Wirkungsquerschnitt der Paarbildung 450
Wirkungsquerschnitt, totaler 381
WLASSOW und DSCHELEPOW, Versuch von 452
Wolfram, Röntgenspektrum von 243
WOOD, Versuche von 247
WOOD und RAYLEIGH (jun.), Methode von 260

YUKAWA, Hypothese von 331

Zählrohr, Auflösungsvermögen des 337
Zählrohr, Entladungsgeschwindigkeit des 337
Zählrohr, selbstlöschendes 338
ZEEMAN-Effekt, anomaler 182, 185ff
ZEEMAN-Effekt, normaler 145
Zentralbewegung, graphische Darstellung der 79
Zentralfeld 73
Zentralfeld, Elektron im 136
Zerfall $\pi \to \mu \to e$ 613
Zerfall, spontaner 276
Zerfallsarten, radioaktive 453ff
Zerfallskonstante 415, 454
Zerfallsreihen, Theorie der 420
Zerfallsteilchen, Energiespektrum von 602, 603
Zerfallswahrscheinlichkeit des α-Strahls 436
Zerstrahlung 437, 451
Zertrümmerungsstern 410
Zusammenstoß erster Art 253
Zusammenstoß zweiter Art 253
Zustand, einquantiger 264
Zustand, gemischter 47
Zustand, metastabiler 271
Zustand, normaler 104
Zustand, quasistationärer 391, 631, 636
Zustand, reiner 47
Zustand, stationärer 48
Zyklotron 348
Zyklotron, Fokussierung im 452
Zyklotron, Gesamtansicht 355
Zyklotron, Schema des 351
Zyklotrons, Daten von 353
Zweikörperproblem 89
Zwischenkern 381ff
Zwischenkern, Theorie des 389